

**RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE**

**Jurijs ŠVABS**

**Telpisku gumijas tehnisko izstrādājumu optimālas  
sintēzes problēmu risināšanas metodes**

**PROMOCIJAS DARBS**

**Rīga 2013**

**RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE**  
Transporta un mašīnzinību fakultāte  
Mehānikas institūts

**Jurijs ŠVABS**

Doktora studiju programmas „Mašīnbūve” doktorants

**TELPISKU GUMIJAS TEHNISKO  
IZSTRĀDĀJUMU OPTIMĀLAS  
SINTĒZES PROBLĒMU RISINĀŠANAS  
METODES**

**Promocijas darbs**

Zinātniskais vadītājs  
Dr. sc. ing., profesors  
V. Gonca

**Rīga 2013**

Rīgas Tehniskā universitāte

Transporta un mašīnzinību fakultāte

Mehānikas institūts

UDK 678.074(043)

Šv 020 t



*Šis darbs izstrādāts ar Eiropas Sociālā fonda atbalstu projektā «Atbalsts RTU doktora studiju īstenošanai».*

**Švabs, J.** Telpisku gumijas tehnisko izstrādājumu optimālas sintēzes problēmu risināšanas metodes. Promocijas darbs. Rīga: Rīgas Tehniskā universitāte, 2013. – 186 lpp.

The methods of spatial rubber technical products optimal synthesis problems solution. Doctoral thesis. Riga: Riga Technical University, 2013. – 186 p.

© Švabs J., 2012

## ANOTĀCIJA

Promocijas darbs „Telpisku gumijas tehnisko izstrādājumu optimālas sintēzes problēmu risināšanas metodes” veltīts gumijas tehnisko izstrādājumu jaunu aprēķina metožu izstrādei un esošo uzlabošanai statistiskas slodzes gadījumā mazo un vidējo deformāciju apgabalā, ievērojot elastomēra īpašības un šo izstrādājumu konstruktīvās īpatnības.

Pirmajā nodaļā ir veikts literatūras apskats par gumijas tehnisko izstrādājumu analītiskām aprēķinu metodēm. Pēc literatūras apskata var secināt: literatūrā praktiski nav analītisko risinājumu, kas pilnībā ņemtu vērā elastomēru izstrādājumu un to konstrukciju visas ģeometriskās īpatnības un elastomēra mehāniskos raksturojumus.

Otrajā nodaļā izstrādātas gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodes mazu deformāciju apgabalā, kur ņemta vērā: elastomēru vājā saspiežamība, neelastomēra slāņu deformācija un elastomēra fiziskā nelinearitāte. Piedāvāta saliktas konstrukcijas formu gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika. Papildināta Delta-metode, gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanai vidējo deformāciju apgabalā, ievērojot gumijas vājo saspiežamību. Izstrādāta gumijas tehniskā izstrādājuma stinguma raksturojuma, "spēks-pārvietojums", analītiskā risinājuma precizitātes novērtējuma metodika, kas iegūta, izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu.

Trešajā nodaļā piedāvātas trīs jaunas kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstrukcijas, kas nodrošina nepieciešamo stinguma raksturojumu "spēks-pārvietojums". Izstrādāta šo kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika.

Ceturtajā nodaļā veikti gumijas kompensatoru saspiešanas naturāli eksperimenti. Bija izgatavoti trīs dažādi kompensatori un testēti saspiešanā. Pēc tam bija veikti šo kompensatoru analītiski aprēķini, izmantojot formulas, kas iegūtas otrajā nodaļā. Tāpat bija veikts šo kompensatoru aprēķins ar galīgo elementu programmas SolidWorks palīdzību. Iegūtie rezultāti (eksperimentālie, analītiskie un modelēšanas) salīdzināti sava starpā. Veikta mainīga stinguma gumijas kompensatora darbības pētīšana, kad uz to darbojas mainīgs spēks ar zemu frekvenci.

Promocijas darba apjoms – 186 lappuses, 7 tabulas, 100 attēli un 3 pielikumi

## ABSTRACT

Doctoral thesis „The methods of spatial rubber technical products optimal synthesis problems solution” is devoted to the development of rubber technical products new calculation methodologies and the improvement of existent in the case of static load in the area of small and average deformation, taking into consideration the properties of the elastomer and the structural features of these products.

In the first chapter the literature review is executed on rubber technical products analytical methodologies of calculation. In accordance with the literature review it can be concluded: in the publications practically there are no analytical solutions that completely take into consideration all geometric features of the construction of the elastomers products and mechanical characteristics of the elastomer.

In the second chapter rubber-technical products calculation methodologies are developed in the area of small deformation, taking into consideration weak compressibility of the elastomer, the deformation of the non-elastomer layers and physical non-linearity of the elastomer. The calculation methodology of composite construction forms rubber technical products is proposed. The Delta-method is supplemented, for rubber - technical products calculation in the area of average deformation, taking into consideration rubber weak compressibility. The assessment methodology of rubber technical products stiffness characteristics, “force - displacement”, analytical solution accuracy is developed, which is obtained, using the principle of complete potential energy minimum.

In the third chapter three new compensatory constructions of rubber - technical products are proposed, which provide the necessary stiffness characteristics "force - displacement". The calculation methodology of mentioned compensatory rubber - technical products is developed.

In the fourth chapter the natural experiments of rubber compensators compression are executed. Three different compensators have been produced and tested in compression. Then the analytical calculations of these compensators have been executed, using the formulas, which have been obtained in the second chapter. As well as the calculation of these compensators has been executed, using the final elements program SolidWorks. Obtained results (experimental, analytical and simulation) have been compared. The research of variable stiffness of rubber compensator operation has been executed during the variable power with low frequency.

The promotion paper consists of 186 pages, 7 tables, 100 figures and 3 annexe

## SATURS

IEVADS.....	8
Darba mērķi un uzdevumi.....	12
Darba zinātniskā novitāte.....	13
Aizstāvēšanai izvirzītie pētījumu rezultāti.....	14
Darba praktiskais nozīmīgums.....	15
1.LITERATŪRAS APSKATS.....	16
1.1. Gumijas uzbūves apskats.....	16
1.2. Gumijas īpašības.....	17
1.3. Gumijas tehnisko izstrādājumu analītiskais aprēķins.....	22
1.4. Nodaļas secinājumi.....	30
2.GUMIJAS-TEHNISKO IZSTRADAJUMU JAUNU ANALITISKU APREĶINĀŠANAS METOŽU IZSTRADE UN EKSISTĒJOŠU METOŽU PAPILDĪNĀŠANA.....	32
2.1. Lineārās elastības teorijas robežproblēmas matemātiskais modelis vāji saspižamam materiālam.....	32
2.2. Tuvināta aprēķinu metode. Pilnas sistēmas potenciālas enerģijas minimuma princips.....	35
2.3. Regularizācijas metodes lineāro robežproblēmu risināšanai nenaspižamam materiālam.....	40
2.4. Elastomēra kompensatora stinguma aprēķināšana, ņemot vērā fizisko nonlinearitāti.....	45
2.4.1. Plāno elastomēru slāņu fiziskā nonlineartāte pie saspišanas.....	45
2.4.2. Fiziskās nonlineartātes ievērošana zināmiem risinājumiem.....	49
2.5. Plānslāņa gumijas kompensatora aprēķins, ņemot vērā elastomēra vājo saspižamību un neelastomēra slāņu deformāciju.....	53
2.6. Variācijas metodes risinot robežproblēmu elastomēra izstrādājumiem ar sarežģītu konstrukcijas formu.....	58
2.6.1. Robežproblēma vāji saspižamam materiālam, izmantojot pārtraukuma funkciju.....	59
2.6.2. Funkcionālis pārtrauktu pārvietojuma un sprieguma funkciju izmantošanai.....	61

2.7. Gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķins vidējo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību, izmantojot Delta-metodi.....	67
2.8. Tuvināto sakarību „spēks-pārvietojums” kļūdu novērtējums, izmantojot variācijas metodes.....	77
2.8.1. Metodes, kas balstās uz funkcionāla divpusējo novērtēšanu.....	78
2.8.2. Palīgfunkcionāļa izveide un vienkāršojošie pārveidojumi.....	80
2.8.3. Ritca metodes precizitātes novērtējums, ja ir dažāds saskaitāmo skaits tuvinātajā risinājumā.....	86
2.9. Nodaļas secinājumi.....	89
<b>3. GUMIJAS-TEHNISKO IZSTRADĀJUMU JAUNAS KONSTRUKTĪVAS SHĒMAS UN TO APREĶINĀŠANAS METODEDES.....</b>	<b>91</b>
3.1. Elastomēra kompensators ar mainīgu stingumu.....	91
3.1.1. Elastomēra kompensatora ar mainīgu stingumu analītiskais aprēķins.....	92
3.1.1.1. Kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins nespiežamiem materiāliem.....	94
3.1.1.2. Neelastomēra starpslāņa izvēle.....	98
3.1.1.3. Stinguma pieauguma iestāšanās brīdis.....	101
3.1.1.4. Kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins, ievērojot gumijas vāju saspiežamību.....	101
3.1.1.5. Kompensatora aprēķins spiežamiem materiāliem, iekļaujot ne elastomēra starpslāņa deformāciju.....	103
3.1.1.6. Kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins, ievērojot fizisku nelinearitāti.....	107
3.2. Elastomēra kompensators ar šķidrums ieslēgumiem.....	109
3.2.1. Elastomēra kompensatora ar šķidrums ieslēgumiem konstrukcija un darbības princips.....	110
3.2.2. Elastomēra kompensatora ar šķidrums ieslēgumiem analītiskais aprēķins nespiežamiem materiāliem.....	113
3.2.3. Elastomēra kompensatora ar šķidrums ieslēgumiem analītiskais aprēķins spiežamiem materiāliem.....	118
3.3. Gumijas kompensators ar mainīga augstuma sānu balstu.....	120
3.3.1. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu konstrukcija un darbības princips.....	121

3.3.2. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu analītiskais aprēķins.....	125
3.4. Nodaļas secinājumi.....	128
4. EKSPERIMENTĀLI PĒTIJUMI.....	129
4.1. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatora saspiešana.....	129
4.1.1. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru testēšana.....	130
4.1.2. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru analītiskais risinājums.....	131
4.1.3. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru modelēšana SolidWorks vidē.....	131
4.1.4. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru aprēķinu rezultātu salīdzinājums.....	133
4.2. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu aprēķins.....	134
4.2.1. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu testēšana.....	135
4.2.2. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu analītiskais aprēķins.....	137
4.2.3. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu analītiskā aprēķina modelēšana SolidWorks vidē.....	138
4.2.4. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu aprēķina rezultātu salīdzinājums.....	140
4.3. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins.....	141
4.3.1. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu testēšana.....	142
4.3.2. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu analītiskais risinājums.....	143
4.3.3. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu modelēšana SolidWorks vidē .....	145
4.4. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu dinamikas pētīšana.....	146
4.5. Nodaļas secinājumi.....	154
SECINĀJUMI.....	155
PIELIEKUMI.....	156
1. Pielikums. Gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība.....	157
2. Pielikums. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru aprēķins.....	165
3. Pielikums. Patents.....	176
LITERATŪRAS SARAKSTS.....	178

## IEVADS

Vērtīgās elastomēru materiālu fizikāli-tehniskās īpašības: labas amortizācijas īpašības, augsta stabilitāte pret ķīmiskiem un fiziskiem faktoriem, materiāla nosacīti lielās atgriezeniskās deformācijās - nosaka to aizvien plašāku pielietojumu daudzās būvniecības un mašīnbūves konstrukcijās. Pateicoties savām unikālajām īpašībām - mehāniskām, tehnoloģiskām utt., palielinās arī gumijas-metāla detaļu īpatsvars visās mūsdienu spēka konstrukcijās līdzās šo izstrādājumu formu daudzveidībai un funkcionālajam pielietojumam [9],[60],[63],[78],[86],[89],[105].

Dažādas formas (plakanas, cilindriskas, koniskas, sfēriskas u.c.) elastomēru konstrukcijas, pateicoties elastomēru fizikāli-mehāniskām īpašībām, veiksmīgi aizstāj tradicionālās kompensācijas un spēka tehniskās sistēmas (locīklas, amortizatorus, ierobežotājus, kompensatorus u.c.). Salīdzinoši ar šīm konstrukcijām, elastomēriem ir vairākas priekšrocības:

- nav nepieciešama eļļošana, nav iespējama ieķīlēšanās, vienkārša apkope;
- vibrāciju un trokšņu līmeņa samazinājums, dažādu neprecizitāšu kompensāciju samazinājums mehānismu mezglos;
- iespēja strādāt ekstremālos apstākļos: spēcīgu putekļu un piesārņotā vidē, abrazīvā vidē;
- spēja izturēt slodzes līdz 150÷200 MPa;
- stinguma attiecība saspiešanas un nobīdes gadījumā aptuveni  $10^2 \div 10^4$ ;
- mazs izmērs, svars un izmaksas.

Pēc daudziem parametriem: konstrukcijas vienkāršuma, drošuma, izmēru, izmaksu ziņā gumijas-metāla elementi pārspēj tradicionālās tā paša pielietojuma hidro-pneimo-mehāniskās sistēmas. Šo izstrādājumu pielietojums ļauj rast principiāli jaunus mūsdienu tehnisko konstrukciju mezglu konstruktīvos risinājumus. Elastomēra locīklas nodrošina visas sešas pamatņu nosacīto nobīžu brīvības pakāpes (trīs pārvietojumus un trīs pagrieziena leņķus); elastomēru amortizatoriem stingums dažādos virzienos (spiedē un bīdē), var vairākkārtīgi atšķirties. Elastomēri apvieno elastīgās un dissipatīvās īpašības ( ir gumijas, kas spēj absorbēt vairāk kā pusi pievadātas enerģijas).

Neskatoties uz pieaugošo gumijas tehnisko izstrādājumu pielietojumu, nav pietiekami zināšanu par elastomēru uzvedību noslogotā stāvoklī, kā arī par aprēķina metodēm noslogoti-deformētā stāvoklī elastomēru izstrādājumos. Tas traucē efektīvākai un plašākai perspektīvo

konstrukciju ieviešanai, izmantojot elastomēru materiālus. Tas ir saistīts ar to, ka attiecīgu elastomēru mehānikas nodaļu attīstības līmenis neatbilst prakses pieprasījumam. Tas negatīvi ietekmē perspektīvu elastomēru konstrukciju ieviešanu. Jo īpaši, ir nepietiekami attīstīti matemātiskie modeļi un aprēķinu metodes ģeometriski sarežģītām elastomēru konstrukcijām ar dažādiem ieslēgumiem, ņemot vērā neelastomēra elementu deformācijas. Neeksistē matemātiski pamatotas pielietošanas apgabalu analīzes, kad var izmantot daudzus jau eksistējošus tuvinātus risinājumus, kuri ir iegūti izmantojot dažādas vienkāršas hipotēzes. Nav attīstītas precizitātes novērtēšanas metodes jau iegūtiem un iegūstamam tuvinātiem elastīgiem risinājumiem priekš gumijas tehniskiem izstrādājumiem. Viss tas rada nepieciešamību elastomēra konstrukciju aprēķināšanas metožu uzlabošanai.

Elastomēri ir polimēru materiāli, kas pēc savām fiziskajām īpašībām kvalitatīvi atšķiras no tradicionālajiem konstruktīvajiem materiāliem. Elastomēra uzbūves pamatā ir tas, ka tā molekulās ir daudzkārt atkārtotošies vienādi posmi, pie tam molekulas ir kā gari, lokani diegi, kas izvietoti haotiski samudžināta kamola veidā [46]. Galvenā elastomēru makromolekulu uzbūves īpatnība ir tāda, ka to garums vairākkārtīgi pārsniedz šķērsizmērus, kas nosaka molekulāro ķēžu lielāku elastīgumu un veido elastomēru augsta elastīguma īpašības. Lielu augstelastīgu deformāciju sekas ir ne tikai elastomēru konstrukciju stinguma īpašību nelinearitāte, bet arī elastomēra nosprīgotā stāvokļa kvalitatīvās izmaiņas lielāku deformāciju gadījumā. Lai izmantotu elastomēra materiālu priekšrocības gumijas tehniskajos izstrādājumos, ir nepieciešams izmantot šādas metodes [95,96]:

- nosprīgoti-deformētā stāvokļa un stinguma raksturojumu noteikšana;
- kalpošanas termiņa noteikšana; izturības un stabilitātes pārbaudes;
- racionālo formu projektēšana;
- dažādu mehānisko un nemehānisko ārējo faktoru uzskaitē.

Daļēji šie uzdevumi ir atrisināti vienkāršas konfigurācijas gumijas tehniskajiem izstrādājumiem [8], [60], [66], [72], [78]. Sarežģītas formas izstrādājumu aprēķinus pārsvarā cenšas iegūt eksperimentālā ceļā, kas neļauj projektēt un izmantot šos izstrādājumus. Vairumam uzskaitīto uzdevumu, lai varētu veikt gumijas tehnisko izstrādājumu uzvedības analīzi dažādos ekspluatācijas apstākļos, pirmkārt, ir jābūt risinājumiem mazo deformāciju jomā statistiska sloģojuma gadījumā. Ja šādi risinājumi ir, ir iespējams, izmantojot: Delta-metodi un iterācijas metodi, iegūt risinājumus vidēju deformāciju jomā [72]; viskozi-elastīgās un temperatūras-laika analogiju [13], [101], [111] ņemt vērā šļūdes, relaksācijas un temperatūras iedarbības parādības uz šo izstrādājumu ekspluatācijas raksturojumiem; risinot

optimālas gumijas-tehnisku izstrādājumu ģeometrijas projektēšanas problēmas, nodrošinot nepieciešami spēka un mehāniskie raksturotāji.

Statiskās elastības teorijas robežproblēmas precīzu risinājumu atrašana elastomēru materiāliem mazo deformāciju jomā ir sarežģīta matemātiska problēma. Tādēļ plaši tiek izmantotas dažādas matemātiskās analīzes tuvinātās metodes, kuras, ļauj iegūt analītiskā formā tuvinātos risinājumus. Tuvināto metožu vidū visefektīvākās ir variāciju metodes, kuru pamatā ir sistēmas pilnas potenciālas enerģijas minimuma princips. Principiālas grūtības ir saistītas ar nepieciešamību aplūkot telpiskas robežproblēmas ķermeņiem ar sarežģītu ģeometrisko konfigurāciju, tāpēc ir nepieciešama šo metožu pilnveidošana.

Elastomēru aprēķina īpatnība ir vājā saspiežamība, kas rada zināmus apgrūtinājumus, izmantojot tradicionālās analītiskās un variāciju aprēķinu metodes salīdzinājumā ar tradicionālajiem konstruktīvajiem materiāliem. Šī iemesla dēļ daudzi autori, iegūstot elastomēru materiālu elastīguma teorijas robežproblēmu risinājumus, plaši izmanto hipotēzi par elastomēra materiāla nesaspiežamību, kas ļauj iegūt analītiskus risinājumus gumijas-tehniskiem izstrādājumiem ar samērā vienkāršām ģeometriskām konfigurācijām. [60], [66]. Pastāv noteikta elastīguma teorijas un elastomēru izstrādājumu konstruktīvo shēmu robežproblēmu klase, kurai iegūtie risinājumi ir piemērojami, t.i., elastomēra vājo saspiežamību var neievērot. Taču pat šiem izstrādājumiem tehniskajā literatūrā nav pietiekami pamatotu rekomendāciju, lai varētu izmantot hipotēzi par elastomēra nesaspiežamību atkarībā no izstrādājuma ģeometriskajiem parametriem un elastomēra Puasona koeficienta skaitliskās vērtības.

Ir pietiekami daudz gumijas-tehnisko izstrādājumu ģeometriskas formas[9], [60], [105] un elastomēru markas, kuriem hipotēzes par elastomēra nesaspiežamību izmantošana var novēst pie kļūdainam rezultātam. Tas var būt:

- pētot masīvus gumijas tehniskos izstrādājumus, kuros elastomēra brīvā virsma ir daudz mazāka par sapsesētā elastomēra masīva virsmu;
- aprēķinot plānslāņa gumijas metāliskos elementus;
- elastomēriem (augsti piepildītiem), kuriem Puasona koeficients  $\mu$  būtiski atšķiras no 0,5.

Aizvien plašāk izmanto elastomēra izstrādājumus, kuru stiegrojošie slāņi nav metāliski vai ir ļoti plāni metāla slāņi. Gadījumos, kad stiegrojošā un elastomēra slāņu stinguma raksturojumi kļūst salīdzināmi, daudzu autoru [7],[22],[36],[39],[60],[86],[98] iegūtie risinājumi, kuros netiek ņemta vērā stiegrojoša slāņa deformācija, var novest pie būtiskām

kļūdām. Praktiski nav datu par eksperimentāliem pētījumiem par spriegumiem stiegrojošos slāņos elastomēru izstrādājumos, kas ir ļoti interesants jautājums par elastomēra konstrukciju izturību un drošumu. Publikācijās, izņemot darbus [51], [93] praktiski nav elastomēru izstrādājumu spēka raksturojumu aprēķinu metožu, kurās ņemtu vērā nospriegoti-deformēto stāvokli stiegrojošos slāņos.

Veicot aprēķinus par gumijas-metāliskajiem elementiem ar ļoti mazu elastomēra slāņa brīvo sānu virsmu ass saspiešanas gadījumā pat mazo deformāciju apgabalā ir novērojams stinguma raksturojuma "spēks-pārvietojums" nelinearitāte. Tā ir fiziska nelinearitāte, kas saistīts ar elastomēra mehānisko moduļu (telpiskā moduļa un bīdes moduļa) atkarību no hidrostatiskā spiediena, kas rodas elastomērā (no noslodzes līmeņa). Literatūrā praktiski nav sastopamas fiziskās nelinearitātes uzskaites metodes elastomēra izstrādājumu aprēķināšanā.

Ja ir risinājumi mazo deformāciju apgabalā, ir iespējams, izmantojot delta-metodi un iterācijas metodi, iegūt risinājumus vidēju deformāciju apgabalā. Šī metode balstās uz novērojuma, ka [45], [109] vidēju deformāciju apgabalā ir lineāra sakarība starp spriegumiem un deformācijām. Tas ļauj pie vienkāršiem slogojama veidiem [60], [86] pieņemt, ka, neatkarīgi no sākotnēja atskaites līmeņa, vienāds sprieguma pieaugums elastomērā izraisa vienādu deformāciju pieaugumu.

Neatrisināts paliek jautājums par iegūto tuvināto risinājumu precizitāti, jo literatūrā praktiski nav metožu, kas ļautu novērtēt tuvinātā risinājuma kļūdu. Tas apgrūtinā tuvināto risinājumu izmantošanu analizējot gumijas-tehnisku izstrādājumu darbību un veicot to projektēšanu. Tuvinātu risinājumu iegūšanai visbiežāk izmanto metodi, kura balstās uz pilnas potenciālas enerģijas funkcionāļa minimizāciju. Kā alternatīvu metodi, kura ļauj novērtēt iegūta tuvināta risinājuma precizitāti, tiek piedāvāta metode, kura balstās uz papildenerģijas [86] funkcionāļa minimizāciju. Tomēr, šī gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metode vēl nav pietiekoši attīstīta.

Ar universālu elastības teorijas robežproblēmu atrisināšanas metodi, priekš gumijas-tehniskiem izstrādājumiem, var atrisināt šī izstrādājumu konstruktīvas projektēšanas uzdevumu, kurš nodrošina iepriekš uzdotu ekspluatācijas procesu. Ekspluatācijas īpašību vadība var būt aktīva vai pasīva, t.i. ar konstruktīvu parametru palīdzību.

Darbam pārsvarā ir teorētisks raksturs. Piedāvātās metodikas veicina analītisko risinājumu paplašināšanu, konkrētāk, elastomēru izstrādājumu stinguma raksturotājiem, ja ir statistiska noslodze, ņemot vērā faktorus, kurus nav ņēmuši vērā citi autori. Iegūtie rezultāti un aprēķinu metodikas, kā arī to analīze rada nenoliedzamu interesi praktiskai pielietošanai.

Jāatzīmē, ka, eksperimentālo pētījumu trūkuma dēļ, analītiskos risinājumus var izmantot: elastomēra konstrukcijas nospriegoti-deformētā stāvokļa novērtēšanai; elastomēra konstrukciju projektēšanā; elastomēra mehānisko moduļu noteikšanā, izmantojot precizētus analītiskos risinājumus vienkāršas konstrukcijas elastomēra izstrādājumiem.

## **Darba mērķi un uzdevumi**

### **Darba mērķi:**

- gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas jaunu metožu izstrāde un esošo uzlabošana statistiskās noslodzes gadījumā mazo deformāciju apgabalā, ievērojot elastomēra īpašības un šo izstrādājumu konstruktīvas īpatnības;
- gumijas tehniskā izstrādājuma cietības raksturojuma, "spēks-pārvietojums", tuvināta risinājuma mazo deformāciju apgabalā precizitātes novērtējuma metodikas izstrāde;
- kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstruktīvas shēmas analīze, kas nodrošina uzdotu stinguma raksturojumu „spēks-pārvietojums” un šo konstrukcijas aprēķināšanas metodikas izstrāde.

### **Darba uzdevumi:**

- gumijas-tehnisko izstrādājumu spriegota stāvokļa aprēķināšanas metodikas izstrāde statistiskā slogojumā mazu deformāciju apgabalā, neievērojot elastomēra saspiežamību, izmantojot deformācijas pilnas potenciālas enerģijas minimuma principu;
- gumijas-tehnisko izstrādājumu tuvināto risinājumu, kuri iegūti izmantojot hipotēzi par elastomēra nespiežamību, pielietošanas apgabala noteikšana, ievērojot izstrādājuma formas faktoru un reālu Puasona koeficienta vērtību;
- plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metodes izstrāde statistiskās slodzes gadījumā mazo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību un neelastomēra slāņu deformāciju;
- plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodikas, ievērojot elastomēra fiziskās nelinearitātes, izstrāde;
- gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metodes izstrāde statistiskās slodzes gadījumā vidējo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību, izmantojot Delta-metodi;

- gumijas tehniska izstrādājuma ar saliktu konstrukcijas formu aprēķināšanas metodikas izstrāde, izmantojot variācijas metodes pārtrauktiem spēkiem un pārvietojumiem;
- gumijas tehniskā izstrādājuma stinguma raksturojuma, "spēks-pārvietojums", analītiskā risinājuma precizitātes novērtējuma metodikas izstrāde.
- kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstruktīvas shēmas analīze, kas ļauj realizēt uzdotu stinguma raksturojumu „spēks- pārvietojums”. Šādu konstrukciju aprēķināšanas metodes izstrāde.

### **Darba zinātniskā novitāte**

- izstrādāta gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika spriegota stāvokļa statistiskā slogojumā mazu deformāciju apgabalā, neievērojot elastomēra saspiežamību, izmantojot deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu;
- noteikti gumijas-tehnisko izstrādājumu tuvināto risinājumu, kuri iegūti izmantojot hipotēzi par elastomēra nesaspiežamību, pielietošanas apgabalā, ievērojot izstrādājuma formas faktoru un reālu Puasona koeficienta vērtību;
- izstrādātas plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metodes statistiskās slodzes gadījumā mazo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību un neelastomēra slāņu deformāciju;
- izstrādāta plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika elastomēra fiziskās nelinearitātes ievērošanai;
- izstrādāta gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskā metode statistiskās slodzes gadījumā vidējo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību, izmantojot Delta-metodi;
- izstrādāta saliktas konstrukcijas gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika, izmantojot variāciju metodi pārtrauktiem spēkiem un pārvietojumiem;
- izstrādāta gumijas tehnisko izstrādājumu stinguma raksturojuma, "spēks-pārvietojums", analītiskā risinājuma precizitātes novērtējuma metodika, kas iegūta, izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu.

- piedāvātas trīs jaunas kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstrukcijas, kas nodrošina nepieciešamo stinguma raksturojumu "spēks-pārvietojums". Izstrādāta šo kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika.

### **Aizstāvēšanai izvirzītie pētījumu rezultāti**

- gumijas-tehnisko izstrādājumu tuvināto risinājumu, kuri iegūti izmantojot hipotēzi par elastomēra nespiežamību, pielietošanas apgabala noteikšanas metodika, ievērojot izstrādājuma formas faktoru, reālu Puasona koeficienta vērtību un nepieciešamo precizitāti. Rezultāti attēloti ar grafiku un tabulas palīdzību. Piemērā aplūkoti taisnstūra un apaļi gumijas-tehniskie izstrādājumi;
- spriegota stāvokļa gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika statistiskā slogojumā mazu deformāciju apgabalā, neievērojot elastomēra saspiežamību un izmantojot deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu;
- plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metode statistiskās slodzes gadījumā mazo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību un neelastomēra slāņu deformāciju;
- plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika elastomēra fiziskās nelinearitātes ievērošanai;
- gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metodes statistiskās slodzes gadījumā vidējo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību, izmantojot Delta-metodi;
- gumijas tehnisko izstrādājumu ar salīktu konstrukcijas formu aprēķināšanas metodika, izmantojot variācijas metodes dalīšanu spēkiem un pārvietojumiem;
- gumijas tehnisko izstrādājumu stinguma raksturojuma, "spēks-pārvietojums", analītiskā risinājuma precizitātes novērtējuma metodika, kas iegūta, izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu.
- piedāvātas trīs jaunas kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstrukcijas, kas nodrošina nepieciešamo ( tā skaita nelineāru) stinguma raksturojumu "spēks-pārvietojums" un šo kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodikas.

## **Darba praktiskais nozīmīgums**

Piedāvātās gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķina metodikas var tikt veiksmīgi izmantotas inženieraprēķinos, kā arī jaunu elastomēru konstrukciju projektēšanā, kas nodrošina nepieciešamo (konstanto vai mainīgo) stinguma raksturojumu statiskā slogojumā. Piedāvātā iegūtā risinājuma precizitātes novērtējuma metodika ļauj novērtēt iegūto risinājuma precizitāti, kas ir svarīgi aprēķinot konstrukciju izturību. Piedāvātās kompensējošo gumijas tehnisko izstrādājumu konstrukcijas ar mainīgu stingumu var tikt veiksmīgi izmantotas dažādās mašīnbūves jomās.

# 1. LITERATŪRAS APSKATS

## 1.1 Gumijas uzbūves apskats

Gumijas uzbūves pamatā ir molekulas, kas daudzkārt atkārtojas, pie tam molekulas ir kā gari, lokani diegi, kas izvietoti haotiski samudžināta kamola veidā [46], [63]. Galvenā elastomēru makromolekulu uzbūves īpatnība ir tāda, ka to garums pārsniedz šķērsizmērus vairākus desmitus tūkstošu reižu, kas nosaka molekulāro ķēžu augstu elastīgumu.

Gumijas molekulārā uzbūve tika aprakstīta daudzos literatūras avotos, piemēram, [25], [63], [104], [115]. Gumiju veido kaučuka molekulu ķēdes (galvenās ķēdes), kas saistītas ar šķērssaitēm, kā arī pildvielu radītie sānu atzarojumi. Sākotnēji šķērssaites veidojas vulkanizācijas procesā. Par vulkanizācijas līdzekli bieži tiek izmantots sērs. Tā atomu veidoto šķērssaišu (C-S, S-S) skaits ir relatīvi neliels, jo sērs pēc masas sastāda 0.5 – 3 %. Šķērssaites var veidot arī pildvielas, piemēram, oglekļa atomi. Pildvielas daudzums gumijā var sastādīt pat 50% un vairāk, tāpēc šķērssaišu esamību nedrīkst ignorēt. Ievērojama daļa pildvielas oglekļa var atrasties nevis šķērssaitēs, bet gan veidot visdažādākos galveno ķēžu sānu atzarojumus (1.1.att. b).



a

Nesazarota ķēdes struktūra

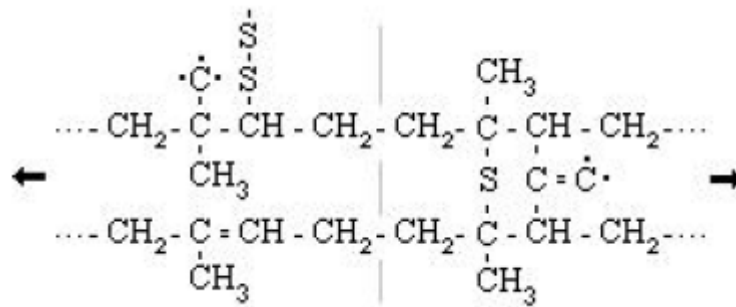


b

Sazarota ķēdes struktūra

1.1.att. Polimēru ķīmiskās struktūras

Gumijas molekulārās uzbūves piemērs dots 1.2.att. attēlā (ar pelēku līniju atdalīti kaučuka molekulas monomēri).



1.2. att. Gumijas molekulārās uzbūves piemērs.

Vulkanizāta (kaučuki tiek pakļauti vulkanizācijai, tiek pievienots sērs un citas sastāvdaļas, gala produkts – vulkanizāts) - fiziskās īpašības nosaka procentuālais sēra un dažādu pildvielu saturs. Ja sēra saturs ir 1-5% iegūst ļoti elastīgus materiālus - gumijas, ja 30-50% - cietus materiālus. Gumijas, kuras satur mazāk par 5% piedevu, dēvē par nepiepildītām. Nepiepildītas un mazpiepildītas gumijas izmanto daudzslāņa šarnīros un kompensātaros. Šīm gumijām ir bīdes modulis  $0,1 \div 2,0 \text{ MPa}$  un tilpuma saspiešanas modulis  $K = (2 \div 3) 10^3 \text{ MPa}$ . Moduļu attiecībai ir kārtā;  $G/K = 10^{-4} \div 10^{-3}$ .

## 1.2. Gumijas īpašības

No sākuma termins "gumija" tika attiecināts uz materiāliem, kas bija izgatavoti no dabīgā kaučuka. Vēlāk radās dažādi sintētiski materiāli un bioloģiskas izcelsmes materiāli, kam piemita gumijas īpašības. Tos sāka dēvēt par gumijai līdzīgiem materiāliem vai elastomēriem. Polimēru - elastomēru atšķirīgā īpašība ir to spēja izturēt ļoti lielas deformācijas neizjūkot un atgriezties sākotnējā konfigurācijā pēc tam, kad ir noņemta pieliktā slodze. Elastomēru materiāli vieglāk padodas bīdes deformācijām, nekā tilpuma deformācijām.

Konstrukcijās (biežāk plānslāņu) izmantotās gumijas parasti izgatavo uz dabīgo vai sintētisko kaučuku bāzes (hloroprēns, stirols, poliizoprēns u.c.). Elastomēru cietība pieaug pazeminātās temperatūrās, īpaši, kad tuvojas stiklošanās temperatūrai un kad ir dinamiskas slodzes.

Šajā sakarā pirmā no elastomēru aprēķināšanas atšķirīgajām iezīmēm ir vāja saspiežamība, kuras ņemšana vērā rada noteiktas grūtības salīdzinājumā ar parastiem materiāliem, kuros šis efekts neparādās.

Otra elastomēru īpatnība ir to spēja kā pastāvīgu, tā arī cikliski laikā mainīgu slodžu iedarbības gadījumā izturēt ievērojamas (500%) deformācijas, bez sabrukšanas.

Trešā elastomēru īpatnība ir tā, ka deformēšanās un augsti elastīga stāvokļa gadījumā līdzsvars starp slodzēm un pārvietojumiem tiek noteikts noteiktā laika brīdī un tam ir spilgti izteikts relaksācijas raksturs.

Tālāk tiek apskatītas svarīgākās gumijas fizikālās īpašības.

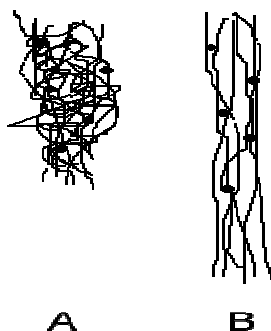
Elastomēru saspiežamība. Jebkura materiāla saspiežamību var raksturot ar attiecību starp tilpumu normālā stāvoklī un tilpumu, kad tas tiek spiests vai kā citādi deformēts. Elastomēru saspiežamība raksturo Puasona koeficients  $\mu$ . Tilpuma spiedes eksperimenti [30], [42], [75], [88] parādīja, ka:  $0,47 < \mu < 0,50$ , kur:

$$\mu = \frac{|\varepsilon_x|}{|\varepsilon_y|}, \quad (1.1)$$

kur  $\varepsilon_x$  – deformācija perpendikulāri pieliktā spēka virzienam;

$\varepsilon_y$  – deformācija pieliktā spēka virzienā.

Elastība. Gumija ieņem tik nozīmīgu lomu mašīnbūvē un celtniecībā tieši tai piemītošās elastības un triecienslāpējošo īpašību dēļ. 1.3.att. ir shematiski attēlots elastomērs brīvā stāvoklī A un nospriegotā stāvoklī B.



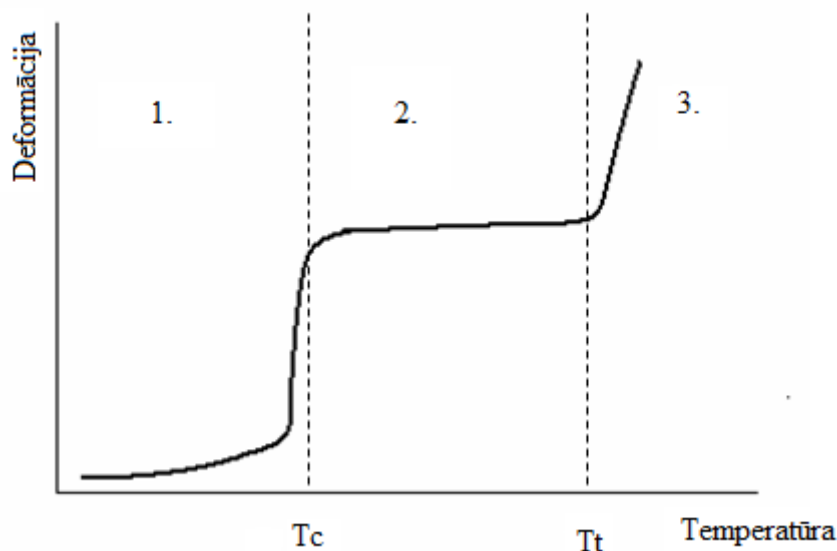
1.3. att. Elastomēra struktūra brīvā (A) un nospriegotā stāvoklī (B)

Dažādi materiāli ir elastīgi dažādos spriegumu intervālos un slogojot materiālu ar spriegumu, kas ir lielāks par maksimāli pieļaujamo jau sākas plastiska deformācija. Lielākais pieļaujama spriegums, pie kura vēl notiek elastīga deformācija ir tik liels, ka to noņemot, materiāla paraugs atgriežas sākuma stāvoklī un ieņem tādus pašus ģeometriskus izmērus. Ir novērojama parādība, kad jauniem paraugiem, kuri tiek izmantoti elastības noteikšanai, pirmie

mērījumi nedaudz atšķiras viens no otra, bet, turpinot mērījumus, slogojot un atslogojot materiālu, rezultāti sāk izlīdzināties un kļūst konstanti katrai mērījuma reizei.

Vizkoelastība. Gumija, kā arī tās pamatā esošie dabiskie vai arī mākslīgie kaučuki, ir augstmolekulu savienojumi un sastāv no makromolekulām ar lielu molekulu masu, savukārt makromolekulas sastāv no lielas daļas atsevišķu daļu ar mazu molekulu masu, tā saucamajiem monomēru daļām. Vielas ar tādu uzbūvi sauc par polimēriem. Polimērus raksturo garas un sarežģītas formas molekulu ķēdītes, un stipras starpmolekulu atšķirības starp īpašībām, kas ir pašās ķēdītēs un starp ķēdītēm. Makromolekulu lieliskā padevība uz lieci arī galvenokārt nosaka polimēru materiālu galvenās īpašības. Polimēru materiāliem atšķirībā no citiem cietiem neorganiskiem materiāliem tiek novēroti tikai divi agregātstāvokļi; ciets un šķidr, gāzveida agregātstāvoklis ir neizzināts. Cietam agregātstāvoklim pastāv divi fāzu stāvokļi: amorfs un ar kristālrežģi.

Kaučuks pieder pie amorfām vielām un atkarībā no temperatūras tas var atrasties trīs fizikālajos stāvokļos: stiklveida stāvoklī, vizkoelastīgā stāvoklī un vizkotekošā stāvoklī. Pāreja kaučukam no viena stāvokļa otrā notiek temperatūras ietekmē.



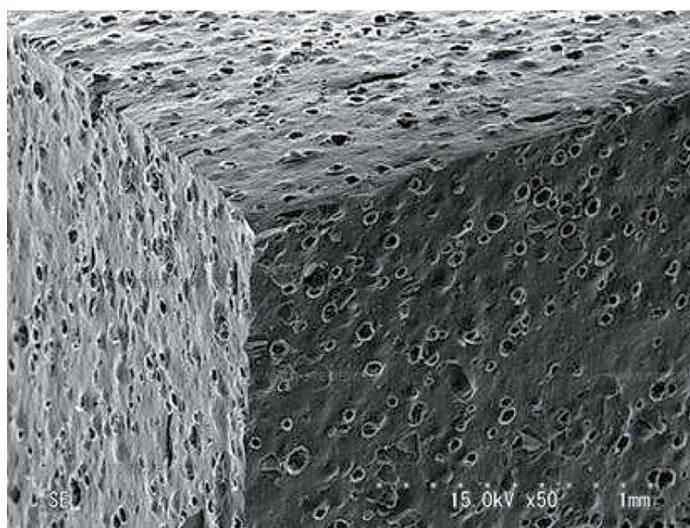
1.4. att. Kaučuku deformācijas atkarība no temperatūras, kur 1 - stiklveidīgais stāvoklis, 2 - vizkoelastīgais stāvoklis, 3 - vizkotekošs stāvoklis

Viendabība Tehniskās gumijas, kā likums, tiek izgatavotas no kaučuka maisījuma ar dažādiem pildījumiem un tāpēc, apskatīt tās kā viendabīgas vielas ir neiespējami. Tomēr, ja izpētē par vismazāk pētāmo apjomu tiks izmantots apjoms, kura lielums ir būtiski lielāks par neviendabīgo daļiņu izmēru, tad eksperimentā tiek iegūti vidējie rādītāji. Tā kā vismazāk

pētāmais apjoms satur ļoti lielu daudzumu nevienmācīgu daļiņu, var, pamatojoties uz maksimālo skaitļu likumu, pieņemt, ka vidējie apjoma rādītāji ir pastāvīgi. Tāpēc, aprēķinos, tiek pieņemts, ka gumija ir viendabīgs materiāls bez iekšējiem tukšumiem, porām un plaisām. Molekulas ir vienāda izmēra ar vienādām saitēm, visās elastomēra vietās tā īpašības ir vienādas.

Izotropija. Tiek aprēķinos pieņemts, ka gumija ir izotropas materiāls. Tās īpašības visos virzienos uz visām pusēm ir vienādas un nemainās. Šajā gadījumā gumijas mehāniskās īpašības var tikt aprakstītas ar bīdes moduli  $G$  un Puasona koeficientu  $\mu$ .

Šūde un spriegumu relaksācija. Šūde ir parādība, kad slogots materiāls, laika gaitā (ievērojot laika faktoru) maina savu sākotnējo formu un izmēru. Pie noteiktām slodzēm laika gaitā palielinās deformācijas, kas var pietuvināties, vai pat sasniegt savu kritisko robežu-materiāla sagraušanu. Gumijai, kā arī citiem konstrukciju materiāliem, piemīt īpašības, kad laika gaitā pie noteiktām slodzēm tiek novērots spriegumu kritums, materiāla atslābums.



1.5. att. Mikroskopiskas poras gumijā

Gumijas novecošana. Gumijas novecošana ir process, kad mainās gumijas īpašības laika faktoru ietekmē. Novecošanas parādību sekmē, ka nemeāniskie faktori fizikāli – ķīmiskie tā arī mehāniskie (ārējo spēku veids un lielums). Eksperimentu [4], [95], [109] dati liecina, ka laika gaitā gumijas bīdes modulis  $G$  pieaug ļoti lēni un to var aprakstīt ar lineāro funkciju. Var secināt, ka bīdes modulis  $G$  ir atkarīgs no laika faktora un agresīvās vides faktoriem, kas ir noteikti jāņem vērā veicot aprēķini un izstrādājot, gumiju aprēķinu algoritmus.

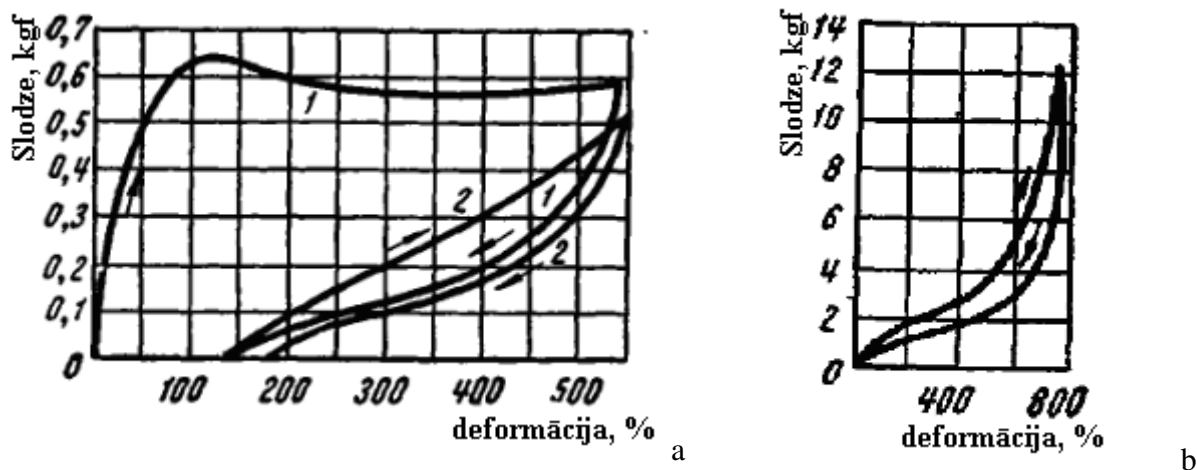
Temperatūras ietekme. Viens no lielākajiem ierobežojumiem gumijas izstrādājumu pielietošanai mašīnbūvē ir temperatūras ietekme. Temperatūras diapazons, kurā gumijas tehniskie izstrādājumi var veiksmīgi izpildīt savas funkcijas, nav ļoti liels, ja salīdzina ar tādiem materiāliem kā metāls. Pārsvārā mums pieejamo gumiju darba diapazons pie statistiskajām slodzēm ir  $-60^{\circ}$  līdz  $+180^{\circ}$ . Tiek novērots, ka paaugstinātā temperatūrā spriegumu relaksācijas efekti un šļūdes efekti paātrinās.

Histerēzes parādība. Atkarība spriegums – deformācija no laika noved pie tā, ka mehāniskā enerģija, kas ir patērēta deformācijai, pilnībā neatgriežas pie materiāla atslodzes. Daļa no mehāniskās enerģijas izkliedējas. Izkliedēto mehānisko enerģiju sauc par histerēzes zudumiem. Šī enerģija pārvēršas uz siltuma enerģiju, materiālā palielinās temperatūra; notiek pašsakaršana. Histerēzes dēļ atkarība slodze – deformācija nesakrīt pie slodzes un atslodzes (1.6. att.).

Tikai līdzsvarā stāvoklī pie ļoti lēnas deformācijas attiecība spriegums – deformācija nav atkarīga no laika. Pie gumijām līdzsvara spriegums  $\sigma_{\infty}$  un līdzsvara deformācija  $\varepsilon_{\infty}$  pieņem noteiktas vērtības. Pie viendabīga sprieguma līdz pat deformācijām 300 - 400% spriegums  $\sigma_{\infty}$  tieši proporcionāls deformācijas  $\varepsilon_{\infty}$

$$\sigma_{\infty} = E_{\infty} \varepsilon_{\infty}, \quad (1.2)$$

kur  $E_{\infty}$  – līdzsvara modulis.



1.6. att. Stiepes raksturlīknes: a) nevulkanizēta gumija; b) vulkanizēta gumija; 1 – pirmā ciklā līkne slodze –atslodze; 2 – otrā ciklā līkne

### 1.3 Gumijas tehnisko izstrādājumu analītiskais aprēķins

Jāatzīmē sekojošas elastomēru materiālu īpatnības:

- makromolekulu uzbūve. Elastomēru makromolekulu uzbūves īpatnība ir tāda, ka to garums pārsniedz šķērsizmērus vairākus desmitus tūkstošu reižu, kas nosaka molekulāro ķēžu elastīgumu, kas noved pie augsti elastīgu īpašību veidošanās. Lielu elastīgu deformāciju sekas ir ne tikai elastomēra konstrukciju stinguma nelinearitāte, bet arī elastomēra nospriegotā stāvokļa kvalitatīvās izmaiņas.

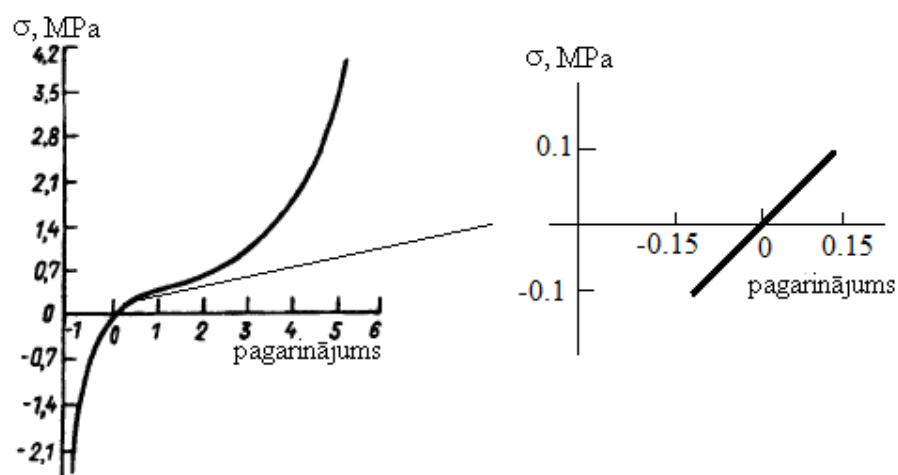
- elastomēru vāja saspiežamība (Puasona koeficients vāji piepildītiem elastomēriem ir ļoti tuvs 0,5). Tas noved elastības teorijas robežproblēmas analītiskā vai skaitliskā risinājuma gadījumā pie grūti risināmas vienādojumu sistēmas. Šāda problēma nav materiāliem, kuriem Puasona koeficienta lielums ir ievērojami mazāks par 0.5.

- spēja kā pastāvīgu, tā arī cikliski laikā mainīgu slodžu iedarbības gadījumā izturēt ievērojamas (līdz 300%-500%) elastīgās deformācijas.

- deformēšanas laikā līdzsvars starp slodzēm un pārvietojumiem tiek noteikts noteiktā laika sprīdī un tam ir spilgti izteikts relaksācijas raksturs.

- ievērojama siltuma izdalīšanās cikliskās deformēšanas laikā, kas saistīta ar histerēzes zudumiem. Šī temperatūras efekta ietekme uz deformēto stāvokli noved pie ievērojama elastomēru konstrukciju ekspluatācijas laika samazinājuma un var būt par vienu no galvenajiem gumijas-tehniskā izstrādājuma sairšanas iemesliem.

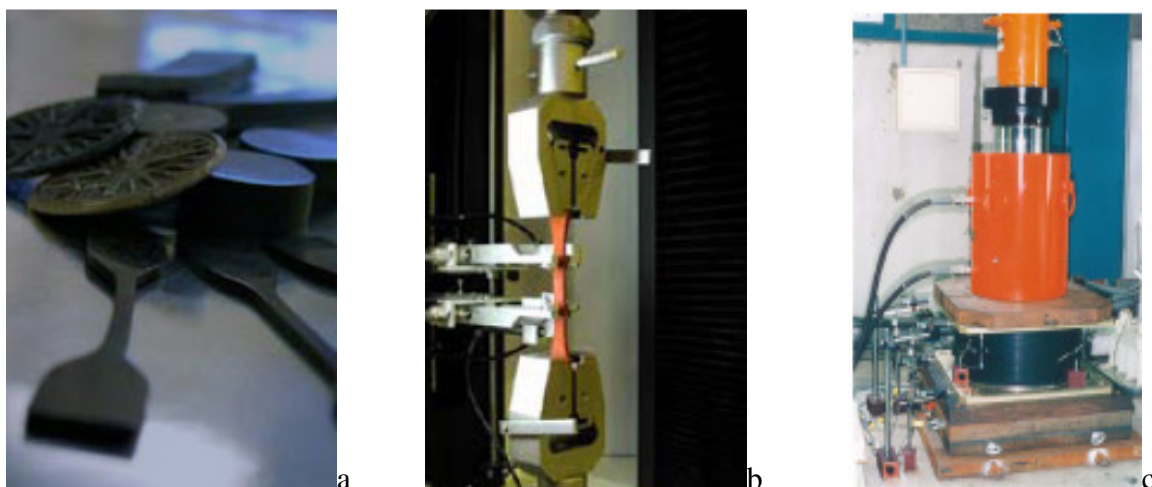
- atkarība „spriegums-deformācija” elastomēram lielu elastīgo deformāciju gadījumā, kas ir nelineāras, būtiski atšķiras izstiepšanas un saspiešanas gadījumā. Tomēr mazām deformācijām var pieņemt, ka sakarība spriegumus-deformācijas ir lineāra, un elastomēra mehāniskās īpašības izstiepšanas un saspiešanas laikā sakrīt. Deformāciju intervāls, kuras laikā ir lineāra atkarība starp spriegumu un deformācijām, ir atkarīga no elastomēra piepildījuma kvalitātes un pakāpes. Veikti daudzi eksperimentālie pētījumi par gumiju elastīguma modeļu noteikšanu un slodžu saistības ar deformācijām lineārā likuma pielietojamības robežu analīzi. Tipiskā atkarība slodze - deformācija izstiepšanas, saspiešanas gadījumā, kas minēta Roedera [32] darbā, parādīta grafikā 1.7. att. Lielu deformāciju gadījumā šai līknei ir dažāds izskats patiesām un nosacītām slodzēm.



1.7. att. Tipiskā atkarība „slodze – deformācija” izstiepšanas, saspiešanas gadījumā gumijas izstrādājumiem

Minētās īpatnības izdala elastomēru mehāniku kā patstāvīgu nodaļu deformējama cieta ķermeņa mehānikā. Matemātiskās grūtības, kas izpaužas iepriekš uzskaitīto īpašību rezultātā, noved pie būtiskām aprēķinu problēmām ne tikai elastības teorijas robežproblēmu risinājumos, bet arī tuvināto analītisko risinājumu meklēšanā konstrukcijām, kurās izmantoti elastīgi (augsti elastīgi) materiāli.

Ir neprecizitātes eksperimentālos datos, kas iegūti elastomēru konstrukcijās. Tās radušās daļēji neizbēgamo materiāla īpašību variāciju dēļ, bet biežāk eksperimentu veikšanas nepilnību dēļ. Rezultātus ietekmē noslogošanas ātrums. Ātra noslogošana un ātra pārvietojumu izmaiņa tiek asociētas ar dinamiskām slodzēm. Lēnas noslogošanas gadījumā var rasties pārvietošanās kā sekas šļūdei un citiem procesiem, kas notiek laikā.



1.7. att. Gumijas paraugu izmēģinājumi. a) gumijas paraugi, b) gumijas paraugu testēšana stiepē, c) gumijas paraugu testēšana spiedē

V. Bidermana eksperimentālos darbos [48] tika iegūti sekojoši bīdes moduļa  $G$ , tilpuma saspiešanas moduļa  $K$  un Puassona koeficienta  $\mu$  lielumi vāji iepildītajām gumijām:  $G = 0,4 \div 0,7 \text{ MPa}$ ,  $K = (2 \div 3)10^3 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0,48182 \div 0,49993$ . Nedaudz citi elastības moduļa lielumi tām pašām gumijas markām iegūti M. Lejkanda darbā [88]. Dažos darbos, piemēram M. Rezikovskijs [109], A. Gents [15], L. Woods [41], O. Yeohs [42] piedāvāja elastības moduļu aprēķināšanas paņēmienus pēc raksturojumiem, kurus izsniedz materiāla izgatavotājs, cietības un stiepes sloojumā sabrukšanas gadījumā. Aprēķinos izmantots vai nu bīdes modulis  $G$  un Puasona koeficients  $\mu$ , vai bīdes modulis  $G$  un tilpuma spiedes modulis  $K$ .

Pēc publikāciju analizēšanas, nevar atrast vienotu viedokli par Huka lineārā likuma pielietojuma intervālu atkarībā no deformācijām. G. Barteņeva [44], [45] darbos noteiktas proporcionalitātes robežas mīkstām gumijām 200 - 300%, pildītām gumijām līdz 50%. Pēc E. Grigorjeva [60] datiem lineārais likums patiesām slodzēm ir spēkā līdz deformācijām 25%. V. Poturajevs [107] pierāda, ka ir pieļaujama Huka likuma izmantošana pie deformācijām, kuras nepārsniedz 25 - 30%, ja likums formulēts patiesām slodzēm. V. Poturajevs un V. Dirda [105] uzskata, ka proporcionalitātes robeža atkarībā no pildījuma pakāpes mainās no 10% līdz 50% un vairāk vāji pildītām gumijām. V. Lepetova [89] darbā no gumijas stiepes eksperimentiem iegūts, ka lineārā atkarība novērojama diezgan plašās deformācijas robežās. Summējot visus datus var izdarīt secinājumu, ka nepildītām gumijām Huka likuma pielietojuma robežas ir plašākas, nekā piepildītām, un atbilst deformācijas zonai līdz 40%-50%, kas ir daudz plašāk nekā citiem tradicionāliem materiāliem.

Huka likuma izmantošana un vienkāršoto pieņēmumu ieviešana ļāva daudziem autoriem, veicot gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķinus, būtiski vienkāršot elastības teorijas robežproblēmu vienādojumus. Tomēr šie vienādojumi, kuros tika ņemtas vērā minētās elastomēru īpatnības, ir diferenciāli vienādojumi diezgan sarežģītas struktūras atvasinājumus, kuru risinājumus iegūt kvadrātūrās ne vienmēr izdodas. Radušās problēmas tika pārvarētas divos virzienos:

-turpmāka hipotēžu ieviešana, kas ļautu vienkāršot diferenciālo vienādojumu sistēmu elastomēru izstrādājumu elastības teorijas robežproblēmam;

- attīstīt aptuvenās skaitliskās un variāciju aprēķinu metodes.

Dažos darbos, kuru mērķis bija aprēķina metožu izstrāde [16], [64], [116], plaši izmantots formas faktora jēdziens, kā noslogotās virsmas laukuma attiecība pret brīvās no virsmas laukumu. Tā M. Daševskis [64] aplūkoja augsti nospriegota gumijas-tehniskā izstrādājuma viendimensijas modeli, kas ļauj ņemt vērā paraugu ģeometrisko un fizisko

nelinearitāte. Ģeometriskās nelineritātes ņemšana vērā kļūst iespējama, ja deformācijas lieluma vietā  $\varepsilon$ , tiek aplūkots lielums  $W = \frac{\Delta}{H - \Delta}$ , kur  $\Delta$  - gumijas-tehniskā izstrādājuma deformācijas lielums,  $H$  — gumijas slāņa sākotnējais augstums.

Dažiem darbiem raksturīga tā dēvēto «šķīstamo elastības moduļu» ieviešana, ar kuriem tiek izteikti uz gumijas paraugiem darbojošos spēku faktoru lielumi, t.i., spiedes gadījumā spēka lielums tiek izteikts ar attiecību  $F_z = E_{sasp} W_S h^{-1} a_z$ , bet lieces gadījumā — ar izteiksmi  $M_y E_{izl} I h^{-1} \omega_y$ , bīdes — ar izteiksmi  $F_x = G^* S h^{-1} a_x$ . Kur  $S$ ,  $I$  — šķēluma laukums un inerces moments;  $h$  — gumijas slāņa augstums;  $a_z, a_x$  — gumijas slāņa deformācija un horizontālā nobīde,  $\omega_y$  — pagrieziens. Jāatzīmē, ka šie „šķīstamo elastības moduļu” lielumi atšķiras no gumijas elastības moduļa  $E$  un bīdes moduļa  $G$ .

Jāatzīmē, ka aprēķina metožu, kurās izmantots formas faktora jēdziens, pielietojamība ir ierobežota. Tā, M.Reznikovska darbā [109] parādīts, ka pat taisnstūra elementiem ar vienādiem formas faktoriem novērojamas būtiskas atšķirības atkarības „spēks – pārvietojums” grafikos. Liels skaits darbu veltīts tieši šo elastības moduļu atkarības no gumijas parauga formas faktora izpētei. Tādi ir V.Keisa [21], V.Bidermana [49], E.Lavendeļa [86], [87], M.Leikanda [88], K. Čerņiha [122] u. c. darbi.

Pielāgojamība, vienkāršums, iespēja efektīvi izmantot skaitļošanas programmas, precizitāte un dažos gadījumos šīs precizitātes novērtēšanas iespējas liek variāciju metodes pirmajā vietā inženieraprēķinos. Variāciju metožu attīstībā jāatzīmē divi virzieni. Pirmajam virzienam jāpieskaita Penna [24], E.Lavendeļa [87], S. Dimņokova [71] K.Čerņih, I. Šubinas [122] un citu autoru darbi, kuros piedāvātas dažādas izteiksmes potenciālas enerģijas izteikšanai, kuros bāzes potenciālam nespīžamam materiālam tika pieskaitīti dažādi saskaitāmie, kas ļāva ņemt vērā vājo elastomēra spīžamību. Otrais virziens raksturīgs ar jaukto variācijas principu izstrādi, kuros tika aproksimēti neatkarīgi pārvietojumi un spriegumi.

Gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķini tiek veikti, izmantojot elastības teorijas vienādojumus, variāciju metodes, galīgo elementu metodi, robeželementu metodi [23], [52], [53], [54], [55], [65], [66].

Liela daļa darba autoru, piemēram V. Bidermans [48],[49], G. Kedrova [78], V. Krugļjakova [82], E. Lavendelis [86] vadās no pieņēmuma par gumijas nespīžamību. Tāda pieeja var tikt pielietota izstrādājumiem, kuriem elastomēra slāņa nepiestiprinātā virsma ir

samērojama ar piestiprinātu, piemēram: masīviem ķermeņiem, apvalkiem, membrānām. Šis fakts izriet no eksperimentiem, kurus veica V.Keiss [21]. Pretējā gadījumā, piemēram, plānslāņa gumijas-metāla elementiem tas, ka netiek ņemta vērā elastomēra vājā saspiežamība noved pie būtiskām skaitliskām un kvalitatīvām kļūdām, veicot tādu izstrādājumu nospriegoti-deformētā stāvokļa aprēķinu.

V. Bidermana [48], [49], E. Lavendeļa [86], [87] darbos parādīts, ka, izmantojot variāciju metodes, nespiežamības nosacījuma izpilde atvieglo pārvietojumu noteikšanu elastomēra slānī, jo samazina nezināmo funkciju skaitu, un ļauj iegūt daudzus risinājumus elastomēru izstrādājumu stinguma raksturojumiem. Turklāt neizdodas pilnībā noteikt nospriegoto stāvokli elastomēra slānī, jo izmantotā funkcionāla dēļ, nespiežamības nosacījuma izpildes gadījumā izkrīt hidrostatiskā spiediena funkcija. Šo funkciju nākas noteikt no papildu vienādojumiem. Piemēram, ņemot vērā, ka hidrostatiskā spiediena funkcija ir harmoniska funkcija un kopā ar atrastajiem pārvietojumiem tai jānodrošina robežnosacījumu izpilde spriegumos. Tāda pieeja prasa papildanalīzi. Paši spēka robežnosacījumi hidrostatiska spiediena funkcijai, atrasto pārvietojumu tuvināto vērtību dēļ, neatbilst reālam elastomēra slāņa spriegumstāvoklim. Ja netiek izpildīts nespiežamības nosacījums(šis nosacījums nav obligāts pilnas potenciālas deformācijas enerģijas minimuma principam), tad rodas problēmas, izvēloties hidrostatiskā spiediena funkcijas, kas saistītas ar vāju izmantotās variācijas metodes atļaujošo vienādojumu sistēmas pamatotību. Aprēķinu metodes, kuriem nespiežamības nosacījums būtu Eilera vienādojums funkcionālim, gumijas-tehnisku izstrādājumu aprēķinos literatūrā praktiski nav pētīts. Šajā gadījumā variācijas uzdevums tiek pieskaitīts nekorekto variāciju uzdevumu klasei [77]. Nebija mēģinājumu šo teoriju pielāgot klasiskiem funkcionāļiem robežproblēmu tuvinātos aprēķinos nespiežamam materiālam.

Tātad hipotēzes, par elastomēru nespiežamību, ieviešana (neņemot vērā reālo Puasona koeficienta lielumu) var novest pie būtiskām kļūdām, nosakot nospriegoti-deformēto stāvokli elastomēru slānī šādos uzdevumos:

- pētīt masīvus gumijas tehniskos izstrādājumus, kuros elastomēra brīvā virsma ir daudz mazāka par nostiprināto virsmu;
- aprēķinot plānslāņa gumijas-metāliskos elementus;
- augsti piepildītiem elastomēriem, kuriem Puasona koeficients būtiski atšķiras no 0,5.

E. Lavendeļa un S. Dimnikova darbos [86], [87], [109] piedāvāta tuvinātā metode, kurā tiek ņemta vērā vājā saspiežamība, ja jau ir zināms risinājums nespiežamības

nosacījuma izpildes gadījumā. Tiek piedāvāts tuvināti, ņemt vērā elastomēra slāņa apjoma izmaiņas pieņemot, ka hidrostatiskā spiediena funkcija ir vienmērīgi sadalīta elastomēra slānī. Pret šo rekomendāciju jāizturas piesardzīgi, jo nav metodisku pētījumu, kādiem nosacītiem elastomēra slāņa izmēriem un reāliem Puasona koeficienta lielumiem tāds piedāvājums par hidrostatiskā spiediena sadalījumu būtiski neatšķirsies no tā reālā sadalījuma.

Ievērojamu interesi izraisa plānslāņa gumijas-stiegroto elementu nospriegoti-deformētā stāvokļa aprēķina uzdevumi. Šeit der pieminēt V. Bidermana [51] darbu, kas attiecas uz plānslāņa amortizatoru un starplikas cietības aprēķina inženierformulu uzbūvi. Lineāro uzdevumu analītiskie un skaitliskie risinājumi, kas saistīti ar nospriegoti-deformētā stāvokļa noteikšanu gumijas plānajos slāņos saspiešanas un nobīdes laikā, pieņemot, ka metāla slāņi nedeformējas, tika sniegti darbos [23], [36], [39], [40], [49], [86].

Saskaņā ar vairākiem darbiem [6], [20], [45], [48], [49], [57] plānslāņu gumijas-tehniskajos izstrādājumos novērojama nelineārās atkarības spēks-deformācija esamība jau mazu deformāciju gadījumā. Lielākā daļa autoru uzskata, ka galvenais iemesls šeit ir fiziskās nelinearitātes esamība, t.i., elastomēra mehāniskie raksturojumi (bīdes modulis un saspiešanas telpiskais modulis) ir atkarīgi no hidrostatiskā spiediena funkcijas lieluma, kas parādās elastomērā spiedes slodzes gadījumā. Eksperimentos ar plānslāņa gumijas-metāla elementu saspiešanu un saspiešanu ar bīdi [20], [39], [50], [92], [94], [109] elastomēru slāņu biezums tika tā piemeklēts, lai mazu deformāciju (līdz 5%) gadījumā varētu realizēt elastomēru slāni lielākus spiedes spriegumu lielumus (līdz 150÷200 MPa). Tādos plānslāņa elastomēra slāņos lielākajā elastomēra slāņa apjoma daļā ir nospriegots stāvoklis, kas ir tuvs hidrostatiskajai saspiešanai. Tiek parādīts, ka ir arī fiziskais nelinearitāte - atkarība bīdes modulis un saspiešanas apjoma modulis no hidrostatiskā spiediena lieluma elastomēra slānī, kas pirmajā tuvinājumā tiek pietiekami labi aprakstīts ar šo moduļu lineāro atkarību no hidrostatiskā spiediena lieluma elastomērā. Tādos gadījumos pie noteiktiem elastomēra slāņa un neelastomēra slāņa biezumiem šāda izstrādājuma sairšana var notikt kā sekas stiegrojuma pārrāvumam. Tādēļ plāna neelastomēra stiegrojuma slāņa spriegota-deformējuma stāvokļa ievērošana šādu uzdevumu risināšanas laikā ir principiāli nepieciešama. Tas noved pie nepieciešamības izstrādāt aprēķinu metodes, kuri ievēro gumijas nelineāru uzvedību jau mazu deformāciju apgabalā. Variāciju pieeja, kuru piedāvā savos darbos K. Černih [120], [121] un L. Miljakova [97], [98] ir formāls saturs. S. Dimnikova darbā [72] tiek piedāvāti funkcionāli, kas ļauj aprakstīt elastomēra fizisko nelinearitāti. Šo funkcionāļu sarežģītība neļauj to izmantot tuvinātu risinājumu iegūšanai, kuri ievēro elastomēra fizisku nelinearitāti un padara

to izmantošanu problemātisku iegūtajiem analītiskajiem risinājumiem. Vienkāršāku metodiku gumijas-metāla izstrādājumu aprēķinam, kur ņemtu vērā fizisko, literatūrā nav. Tāpēc elastomēra izstrādājumu aprēķināšanai ievērojot elastomēra fizisku nelinearitāti ir nepieciešams izstrādāt jaunas aprēķinu metodes. Šīm metodēm jābūt vienkāršotām variāciju nostādņē, un kas dotu patiesus rezultātus kā ievērojot tā arī neievērojot elastomēra vāju saspiežamību.

V.Maļkova darbā [93] plānslāņa gumijas-metāla izstrādājumiem tiek piedāvāta pieeja, kas ļauj elastības trīsdimensiju robežproblēmu reducēt uz izstrādājuma elastomēra un stiegrojošo slāņu modeļiem. Tiek ieviests vidējā slāņa jēdziens, kuram nospriegoti-deformējama stāvoklis tiek noteikts ar hidrostatiskā spiediena funkciju. Tiek iegūts vienādojums un robežnosacījumi, lai atrastu šo funkciju reāliem Puasona koeficienta lielumiem. Šo modeļu sintēzes rezultātā tiek radīta kompozīto elastomēra konstrukciju diskrēta teorija, kur elastomēra un neelastomēra slāņu deformācijas tiek aprakstītas ar saviem vienādojumiem. Vienādojumu izvadīšanai secīgi ir izmantotas asimptotiskas metodes, kuras izmanto elastomēra slāņa mazu biezumu un elastomēra vāju saspiežamību.

Gumijas-tehniskiem izstrādājumiem ar sarežģītu ģeometrisku formu praktiski nevar izmantot pilnas potenciālas enerģijas minimuma princips „klasiskā” veidā. Tāpēc ka nav iespējams izvēlēties koordināšu funkcijas, kuras nodrošina pārvietojumu un to atvasinājumu nepārtrauktību, izpildīt ģeometriskos robežnosacījumus un aprakstīt visas gaidāmās deformācijas. Klasiskais elastības teorijas variāciju metodes izklāts dots E. Trefftca [119] un citos darbos. Vairāki vispārīgi funkcionāļi ar neatkarīgu pārvietojumu, deformāciju un spriegumu variēšanu aplūkoti E. Rejsnera [29], E. Tonti [34], K. Vasiđu [52] un citos darbos. Funkcionāļu apskats un to atsevišķas formas elastības teorijai ir dotas J.Hlavacheka [18] darbā. V.Pragera darbā [108] variāciju metodēm aplūkota iespēja neievērot pārvietojumu, deformāciju un spriegumu lauku nepārtrauktības prasību pie koordināšu funkcijas izvēlēs. Šī darba teorētiski atzinumi var būt izmantoti gumijas tehnisku izstrādājumu ar saliktu ģeometrisku formu aprēķināšanai. E. Lavendeļa darbā [86] nesaspiežamam elastomēram, izmantojot pilnas potenciālas enerģijas minimuma principu, aplūkots funkcionālis, kurš ļauj elastomēra izstrādājumā sadalīt apakšapgalos, un neizpildīt nepārtrauktības nosacījumus pārvietojumiem un spriegumiem.

Vairākās elastomēru konstrukcijās tiek izmantota gumijas spēja veikt lielas (ievērojamas - virs 50%) elastīgās deformācijas. Nepieciešamība ņemt vērā deformāciju lielumu noved pie būtiskām matemātiska un skaitliska rakstura grūtībām. Šādu deformāciju

vispārīgā teorija izstrādāta šādu autoru darbos: A. Grīns, D.Adkins [61], F.Murnagans [27], V.Novožilovs [100], L.Treloars [118] u.c.

Tā kā darbā tiek aplūkotas praktiski tikai mazas deformācijas, tad šajā apskata daļā atzīmēsim tikai delta-metodi nesaspiežamam materiālam, kas tiek piedāvāta šādu autoru darbos: S.Dimnikovs un E.Lavendelis [71]. Delta-metode ļauj, ja izpildās nesaspiežamības nosacījums, iegūt elastomēru izstrādājumu cietības raksturojumus vidēju deformāciju gadījumā (līdz 50%). Šīs metodes būtība ir summēšana un secīga deformēšanas procesa sasniegšana ar vēlāku robežpāreju. Iegūtais risinājums sniedz nelineāru cietības raksturojumu atkarībai "spēks-pārvietojums". Šīs metodes efektivitāte ir saistīta arī ar faktu, ka jau zināmos risinājumus mazām deformācijām var izmantot kā sākotnējo soli. Jāatzīmē, ka šīs metodes izmantojamību ierobežo prasības, ka katrā noslodzes posmā: nedrīkst mainīties noslodzes raksturs; vienādiem noslodzes soļiem jāatbilst vienādam deformāciju pieaugumam. Nav darbu, kuros tiktu aplūkota Delta-metode, ņemot vērā elastomērā vājo saspiežamību.

Aplūkojot elastomēru kā viskoelastīgu materiālu, izmantojot viskoelastīgo un temperatūras-laika analogiju [112,63,73], elastomēru izstrādājumu nopriegoti-deformētā stāvokļa analīzes laikā var ņemt vērā temperatūras un laika faktorus. Vispārīgie teorētiskie faktori, kas piemērojami elastomēru viskoelastīguma lineāro uzdevumu risinājumam, ir izklāstīti šādu autoru darbos: J. Rabotnovs [111], A. Iljušins, B. Dobedrs [76], V. Dirda, V. Poturajevs, I. Krušs [106] u.c. Viena no galvenajām problēmām šajos uzdevumos ir temperatūras lauka aprēķins elastomēru elementos uz histerēzes zaudējumu elastomērā un dinamiskā noslogojuma rēķina. Šajā virzienā ir vērts atzīmēt eksperimentālos darbus, kurus veikuši V.Poturajevs [106], A.Peins [9] u.c. Šo darbu apskats ļauj izdarīt slēdzienu, ka, lai varētu pielietot viskoelastīgās un temperatūras laika analogijas, kas ļautu ņemt vērā relaksācijas, šļūdes un temperatūras lauku iedarbības parādības, kas rodas elastomērā dinamiska ierosinātāja gadījumā, pirmajā posmā jāiegūst elastīgs risinājums mazām deformācijām.

Praktiski nav metožu, kas ļautu novērtēt iegūto tuvināto analītisko risinājumu precizitāti elastomēru konstrukcijām. Šajā virzienā jāatzīmē S.Dimnikova darbs [72], kurā amortizatoru (tips "spēks-pārvietojums") tuvināto risinājumu "dakšas" iegūšanai līdzās deformācijas pilnās potenciālās enerģijas principam, tiek piedāvāts izmantot deformācijas papildu potenciālās enerģijas principu. Deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma princips sava nosacītā pārvietojumu koordinātu funkciju izvēles vienkāršuma dēļ guva plašu pielietojumu, īpaši elastomēru izstrādājumu cietības raksturojumu atrašanai. Šī metode

nosaka pārvietojumu ar "iztrūkumu" (nosacīti precīza risinājuma pārvietojuma pazemināts lielums). Deformācijas papildu potenciālās enerģijas minimuma princips tiem pašiem raksturojumiem nosaka pārvietojumu ar "atlikumu" (nosacīti precīza risinājuma pārvietojuma paaugstināts lielums). Šī metode nav radusi pielietojumu elastomēru izstrādājumu aprēķināšanā problēmu dēļ, kas saistītas ar koordināšu funkciju izvēli spriegumiem, kam obligāti ir jāapmierina līdzsvara vienādojumi un spēka robežnosacījumi, un, izmantojot mazu skaitu koordināšu funkciju, tuvināti jāatbilst reāli iespējamam spriegumu sadalījumam elastomēra slānī. Pēdējā nosacījuma izpilde ir īpaši problemātiska, izmantojot koordināšu funkciju minimālu skaitu.

Šajā virzienā var izmantot elastības teorijas tuvināto risinājumu enerģētisko novērtējumu teorētiskās izstrādes, kas iegūtas, izmantojot variāciju metodes. Literatūrā nav metodisku izstrāžu, kas saistītas ar šo metožu pielietojumu gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķinam, gan ņemot, gan neņemot vērā elastomēru vājo saspiežamību.

Literatūrā piedāvātie [60], [89] jaunie konstruktīvie risinājumi gumijas-tehniskajiem izstrādājumiem ļauj realizēt nelineāru vai daļēji lineāru cietības raksturojumu, tips "spēks-pārvietojums", tikai cietam tipam (palielinot spēku, palielinās cietība). Parasti šādā gadījumā tiek ieteikts izmantot dažādas konfigurācijas sānu balstus. Citu konstruktīvu risinājumu, kas nodrošinātu uzdoto nelineāro cietā tipa stinguma raksturojumu, literatūrā nav. Tāpat nav konstruktīvu risinājumu, kas ļautu realizēt nelineāro stinguma raksturojumu, kā cietā, tā arī mīkstā (palielinot spēku, cietība samazinās) tipā. Šādu konstrukciju un to aprēķinu metožu izstrāde ļaus būtiski paplašināt gumijas-tehnisko izstrādājumu pielietojuma jomu un paplašināt to izmantošanas efektivitāti.

#### **1.4. Nodaļas secinājumi**

No iepriekš aplūkoto darbu apskata, kas saistīti ar gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķinu: statiskas un dinamiskas noslodzes; mazo, vidējo un lielo deformāciju; kalpošanas laika noteikšanas, viskoelastīgo un dažādu temperatūras faktoru noteikšanas gadījumā, t.sk. arī uz histerezes zudumu rēķina; un vairākiem citiem uzdevumiem izriet, ka visās uzskaitītajās problēmās sākuma etapā gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķins dažādos ekspluatācijas nosacījumos sākas ar nospriegoti-deformētā stāvokļa noteikšanu, ja ir veikta statistiskā noslodze mazo deformāciju apgalbā. Tādēļ jaunu tuvināto metožu izstrādes un elastomēra

detaļu esošo aprēķina metožu uzlabošanas jautājums mazu deformāciju gadījumā, ņemot un neņemot vērā elastomēru sājo saspietamību, paliek aktuāls.

Gumijas tehnisko izstrādājumu veiksmīgai pielietošanai un optimālai konstruēšanai, ir jābūt metodēm, kā var iegūt analītiskos risinājumus reāli iespējamām elastomēra izstrādājumu ģeometrijām un statiskās noslodzes shēmām. Publikācijās praktiski nav analītisko risinājumu, kas pilnība ņemtu vērā elastomēru izstrādājumu konstrukcijas visas ģeometriskās īpatnības un elastomēra mehāniskos raksturojumus.

Elastomēru vājā saspietamība rada papildus grūtības. Šī problēma, lai arī ir praktiski atrisināta vienkāršas formas gumijas tehniskajiem izstrādājumiem, tomēr nav pilnas analīzes un metodisko rekomendāciju par šo analītisko risinājumu pielietojumu, kas iegūti, izmantojot hipotēzi par elastomēra nesaspietamību, atkarībā no izstrādājumu ģeometriskajiem parametriem un elastomēra Puasona koeficienta reāliem lielumiem.

Lielākā daļa analītisko risinājumu ir iegūtas ar variācijas metodēm, ja izpildās elastomēra nesaspietamības nosacījums. Turklāt hidrostatiskā spiediena funkcija, kas ietilpst nesaspietamo materiālu elastīguma teorijas robežproblēmas vienādojumos, izkrīt no risinājuma, kas neļauj veikt nospriegotā stāvokļa analīzi elastomēra izstrādājumā, un atrisināt izturīguma un stabilitātes jautājumus.

Praktiski nav sarežģītas konfigurācijas gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķinu metodikas ar un bez elastomēra vājās saspietamības ievērošanas.

Nav pilnīgas plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķina metodikas, kurās tiktu ņemtas vērā stiegrojuma neelastomēra slāņu deformācijas un elastomēra mehānisko raksturojumu nonlinearitāte lielu īpatnējo ass slodžu gadījumā.

Jāpievērš uzmanība, ka pēc tuvinātā analītiskā risinājumu iegūšanas publikācijās praktiski nav metodiku, kas ļautu novērtēt iegūto tuvināto risinājumu precizitāti. Pārbaudītu eksperimentālo datu trūkums neļauj notestēt iegūtos risinājumus un viennozīmīgi ieteikt tos elastomēru izstrādājumu analīzei un projektēšanai.

Tādēļ aplūkotās tēmas aktualitāte nerada šaubas. Arī iepriekš uzskaitīto problēmu risinājumi ļaus paplašināt esošo gumijas tehnisko izstrādājumu pielietojuma sfēru, un padarīt efektīvāku optimālo elastomēru izstrādājumu projektēšanu, izpildot izturības un stabilitātes nosacījumus un nodrošinot nepieciešamos ekspluatācijas režīmus, kas tiek izvirzīti projektējamo izstrādājumu stinguma raksturojumiem.

## 2. GUMIJAS-TEHNISKO IZSTRADAJUMU JAUNU ANALITISKU APREĶINĀŠANAS METOŽU IZSTRADE UN EKSISTĒJOŠU METOŽU PAPILDINĀŠANA

### 2.1. Lineārās elastības teorijas robežproblēmas matemātiskais modelis vāji saspiežamam materiālam

Elastības teorijas izpētes objekts ir brīvas formas ķermenis, kas ir noslogots ar brīvu spēku sistēmu. Galvenie pieņēmumi ir šādi: ķermeņa deformācija  $\varepsilon$  no pieliktās spēku sistēmas ir neliela ( $\varepsilon \ll 1$ ), saikne starp spriegumiem  $\sigma_{ij}$  un deformācijām  $\varepsilon_{ij}$  var tikt aprakstīta ar lineāro sakarību, kuru parasti sauc par Huka likumu, un ķermeņa materiāls ir viendabīgs un izotrops. Spiedes un bīdes eksperimenti gumijas paraugam [44], [45], [53], [89], [95], [105] apliecina, ka mazām deformācijām (līdz 10% – 15%) piemīt lineārā sakarība starp spriegumiem un deformācijām. Šie pieņēmumi ir pietiekami vispārēji, tāpēc uz tām balstītas iegūtās sakarības un vienlīdzības arī ir vispārīga rakstura, kas tiek pielietots katrā konkrēta gadījumā.

Elastības teorijas konkrēta uzdevuma risinājums tiek novests pie spriegumu un pārvietojumu noteikšanas, kas apmierina pārvietojumu vai sprieguma vienādojumu sistēmu un attiecīgos uzdevuma nosacījumus, t.i., robežnosacījumus [83], [86]. Ar robežnosacījumiem saprot visus datus par spriegumiem un pārvietojumiem uz detaļas virsmas, kas iegūti konstrukcijas analīzes ceļā. Robežnosacījumi var būt noteikti:

- pārvietojumos;
- spriegumos;
- pārvietojumos un spriegumos (jauktie robežnosacījumi).

Gadījumi, kad robežnosacījumi ir noteikti tikai spriegumos vai tikai pārvietojumos, ir sastopami diezgan reti. Pārsvārā gadījumu kādā virsmas daļā ir uzdoti robežnosacījumi pārvietojumos, bet pārējos sprieguma nosacījumi. Ja robežnosacījumi ir noteikti spriegumos, tad, dabiski, arī uzdevumu nākas risināt spriegumos. Attiecīgi uzdevumu ar robežnosacījumiem pārvietojumos ērtāk risināt ar pārvietojumiem. Gadījumā, ja ir ļoti mazi robežnosacījumi, priekšroka tāpat ir jādod arī risinājumam pārvietojumos.

Klasiskā formulējumā elastības teorijas robežproblēmas risinājums pārvietojumos ir ekvivalents vienādojumu sistēmas integrēšanai [45], [52]:

- līdzsvara vienādojumi:

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)u_{j,j,i} + f_i = 0, \quad (2.1)$$

- deformācijas komponentes  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.2)$$

- spriegumu komponentes  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

- spēka robežnosacījumi:

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{uz } F_\sigma, \quad (2.4)$$

- ģeometriskie robežnosacījumi:

$$u_i = u_{oi} \quad \text{uz } F_u, \quad (2.5)$$

kur  $f_i$  – apjoma spēku komponentes;  
 $u_i$  – pārvietojumu komponentes;  
 $G$  – gumijas bīdes modulis;  
 $\sigma_{ij}$  – sprieguma komponentes;  
 $s$  – hidrostatiskā spiediena funkcija;  
 $\delta = \begin{cases} 1, & \text{pie } i = j; \\ 0, & \text{pie } i \neq j \end{cases}$ ;  
 $i, j = 1, 2, 3$  vai  $x, y, z$ ;  
 $\lambda = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu}$  - Lamé koeficients;  
 $\mu$  – Puasona koeficients.

Šeit un turpmāk, pieraksta saīsināšanai indekss, kas atkārtojas, apzīmē summēšanu, bet komats apzīmē diferencēšanu.

Vāji saspiežamiem materiāliem, tas ir pie  $\mu \rightarrow 0,5$ , darbā [57], [86] ir parādīts, ka elastības teorijas robežproblēmas klasiskā modeļa pielietošana var novest pie skaitliskām kļūdām, tā, ka šajā sistēmā rodas nenoteiktības  $\lambda \varepsilon_{ii} \rightarrow 0/0$ , tāpēc, ka Puasona koeficients  $\mu \rightarrow 0,5$ , tilpuma deformācijas  $\varepsilon_{ii} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \rightarrow 0$  un Lamé koeficients  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Darbā [73], [57] ievadot papildus patstāvīgo nezināmo funkciju – hidrostatiska spiede  $s$

$$s = \frac{\sigma_{ii}}{3G} = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{3G}, \quad (2.6)$$

kura sistēmā (2.1) - (2.5) pie jebkurām Puasona koeficienta  $\mu$  tuvām pie 0.5 vērtībām, ļauj izvairīties no robežproblēmas līdzsvara vienādojumos augstāk minētas 0/0 tipa nenoteiktības.

Šādiem uzdevumiem lineāras elastības teorijas robežproblēmas matemātiskais modelis vāji saspiežamam materiālam ir šāds:

- līdzsvara vienādojumi:

$$G \left[ \nabla^2 u_i + \frac{3}{2(1+\mu)} s_i \right] + f_i = 0, \quad (2.7)$$

- telpisku deformāciju attiecība:

$$u_{j,j} = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s, \quad (2.8)$$

- deformācijas komponentes  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.9)$$

- spriegumu komponentes  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = G \left( 2\varepsilon_{ij} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \delta_{ij} \right), \quad (2.10)$$

- spēka robežnosacījumi:

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{uz } F_\sigma, \quad (2.11)$$

- ģeometriskie robežnosacījumi:

$$u_i = u_{oi} \quad \text{uz } F_u, \quad (2.12)$$

Ja elastomēra vāju saspiežamību var neņemt vērā, tad ievieto  $\mu = 0.5$ . Šai gadījumā vienādojumu sistēma (2.7) - (2.12) ar  $\mu = 0.5$  apraksta robežproblēmu nesaspiežamam materiālam [32], [60], [86]. Matemātisku grūtību dēļ vienādojumu sistēmas (2.7) - (2.12) risināšanai ievadot vienkāršojošas hipotēzes, izmanto tuvināto aprēķināšanas metodes. Starp

tiem variāciju metodes ir visefektīvākās. Visbiežāk izmantota gumijas nesaspiežamības hipotēze, kura stipri atvieglo vienādojumu sistēmas (2.7) - (2.10) integrēšanu [60], [86].

## **2.2. Tuvināta aprēķinu metode. Pilnas sistēmas potenciālas enerģijas minimuma princips**

Precīza diferenciālu vienādojumu sistēmu (2.7) - (2.12) risināšana ir iespējama tikai nelielam uzdevumu skaitam, kad dota izstrādājuma forma un robežnosacījumi diezgan vienkārši. Bieži nākas apmierināties ar aptuveniem risinājumiem. Tāpēc plaši izplatītas ir aptuvenās metodes, starp kurām pati efektīvākā ir metode, kas balstīta uz sistēmas pilnas potenciālās enerģijas minimuma principa. Šī metode gumijas izstrādājumiem ir parādīta darbā [86].

Šajā gadījumā pilnā potenciāla enerģija  $J(u_i, s)$  ir:

$$J(u_i, s) = U - A, \quad (2.13)$$

kur  $U$  – deformācijas potenciālā enerģija;

$A$  – ārējo spēku zaudētā enerģija.

$$U = G \int_V \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j} u_{j,i} + u_{i,j} u_{j,i}) + \frac{3\mu}{1+\mu} s u_{i,i} - \frac{9(1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} s^2 \right] dV, \quad (2.14)$$

kur  $i, j = 1, 2, 3$ , vai arī  $x, y, z$ , - koordinātu sistēmas komponentes.

$A$  ir ārējo spēku  $p_i$  un tilpumspēku  $f_i$  darbs:

$$A = \int_V f_i u_i dV + \int_{F_\sigma} p_i u_i dF. \quad (2.15)$$

Aplūkotiem materiāliem pilnās potenciālās enerģija  $J(u_i, s)$  minimuma princips formulēts [86]: potenciālā enerģija  $J(u_i, s)$  atkarīga no pārvietojumiem  $u_i$ , kuri uz detaļas nostiprināšanas virsmas  $F_u$  apmierina robežnosacījumus (2.12), un hidrostatiskā spiediena patvaļīgā funkcija  $s$ , pieņem minimālo vērtību. Atbilstoši šim principam  $u_i$  un  $s$  precīzām vērtībām atbilst:

$$J(u_i, s) = \min \quad \text{vai} \quad \delta J = 0. \quad (2.16)$$

Var pierādīt, ka minimuma noteikumi (2.14) - (2.16) ir robežproblēmas uzdevuma ekvivalents (2.7) – (2.12), ievērojot, ka uz  $F_u$   $\delta u_i = 0$ . Dotajā gadījumā no (2.13) - (2.16) un (2.8) dabūjam:

$$\delta J = \int_V \left\{ -G \left( \nabla^2 u_i + \frac{3}{2(1+\mu)} s_{,i} + f_i \right) \delta u_i + \frac{3\mu G}{1+\mu} \left[ u_{i,i} - \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s \right] \delta s \right\} dV - \int_{F_G} \left[ p_i - G \left( u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \delta_{ij} \right) n_j \right] \delta u_i dF = 0. \quad (2.17)$$

Ņemot vērā, ka variācijas  $\delta u_i$  un  $\delta s$  savā starpā ir neatkarīgi lielumi, tad no (2.17) seko vienādojumu sistēma (2.7), (2.8) un (2.11) aplūkotai robežproblēmai.

Funkcionāļa  $J(u_i, s)$  minimuma īpašība seko no tā otrās variācijas zīmes pie neatkarīgām funkcijām  $u_i$  un  $s$ :

$$\delta_{u_i} J(u_i, s) = 0; \quad \delta_s J(u_i, s) = 0, \quad (2.18)$$

Otro variāciju  $\delta^2 J(u_i, s)$  pieraksta šādā veidā:

$$\delta^2 J(u_i, s) = G \int_V \left[ \frac{1}{2} \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{9(1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} \delta s \delta s \right] dV > 0. \quad (2.19)$$

Tātad funkcionālim  $J(u_i, s)$  ir minimuma īpašības pie neatkarīgām funkcijām  $u_i$  un  $s$ .

Risinājuma metodes algoritms:

-izvēlēties pārvietojumu komponentes  $u_i$  un hidrostatiskā spiediena funkcijas  $s$ :

$$u_i = a_{ji} \varphi_j(\bar{x}), \quad s = b_k \psi_k(\bar{x}), \quad (2.20)$$

kur  $\varphi_j(x)$  - obligāti jāapmierina ģeometriskie robežnosacījumi (2.12)

$\psi_k(x)$  – var izvēlēties patvaļīgi;

$a_{ij}, b_k$  – nezināmās konstantes.

– no sistēmas pilnas potenciālas enerģijas minimuma noteikuma:

$$\frac{\partial J(u_i, s)}{\partial (a_{ij}, b_k)} = 0, \quad (2.21)$$

tiek noteiktas konstantes  $a_{ij}$ ,  $b_k$ .

– pēc formulām (2.9) un (2.10) tiek aprēķināti deformācijas un sprieguma komponentes.

Gumijas tehniskie izstrādājumi, īstenībā ir vāji saspiežami, jo tehniskajām gumijām Puasona koeficienta  $\mu$  vērtība ir tuva 0,5. Lielākajā daļā gadījumu šī nebūtiskā atšķirība nenoved pie būtiskām atšķirībām stingumu vērtībām, kas aprēķinātas nespiežamiem materiāliem ( $\mu = 0,5$ ). Tomēr virknē gadījumu (saspiežot plānslāņa gumiju) saspiežamības neievērošana noved pie būtiskām kļūdām. Tas notiek:

- pētot masīvus gumijas tehniskos izstrādājumus, kuros elastomēra brīvā virsma ir daudz mazāka par nostiprināto virsmu;

- aprēķinot plānslāņa gumijas-metāliskos elementus;

- augsti piepildītiem elastomēriem, kuriem Puasona koeficients būtiski atšķiras no 0.5.

Tomēr daži autori [49], [60], [86], [89] daudziem gumijas tehniskiem izstrādājumiem (kompensatoriem, amortizatoriem, blīvēm), kuru ģeometrija ļauj neievērot gumijas vāju saspiežamību, ir ieguvuši tuvinātos risinājumus, izmantojot nespiežamības hipotēzi. Tas ir sevišķi raksturīgi stinguma raksturojumam „spēks – pārvietojums” Uzdevuma risināšanu nespiežamam materiālam vienkāršo tas, ka uzreiz tiek ņemta vērā elastomēra nespiežamības, t.i. Puasona koeficients  $\mu = 0,5$ . Tad funkcionālis (2.13) – (2.15) izskatīsies šādi:

$$\Pi = G \int_V (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + s \varepsilon_{ii}) dV - \int_{\sigma} P_i u_i dF. \quad (2.22)$$

Izmantojot funkcionāli (2.22) vairākos uzdevumos izvēlēta tuvināta pārvietojuma funkciju  $\tilde{u}_i(\bar{x})$ , kas izpilda nespiežamības nosacījumu:

$$\tilde{u}_{i,i} = \varepsilon_{ii} = 0. \quad (2.23)$$

Tā izpildīšana nav obligāta, tā kā tas ir Eilera vienādojums funkcionālim (2.22). Tas vienkāršo pārvietojumu noteikšanu, bet neļauj noteikt spriegumus, tā kā hidrostatiskā spiediena funkcija „izkrīt” no funkcionāļa (2.22), kurš ievērojot (2.23) ir formā:

$$\Pi = G \int_V \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{\sigma} P_i u_i dF \quad (2.24)$$

Šo formu ērti izmantot gumijas-tehnisko izstrādājuma stinguma raksturlīknes noteikšanai, piemēram, raksturlīknes „spēks - pārvietojums

Ja pārvietojumi bija meklēti, izmantojot funkcionāli (2.24), tad spriegumu noteikšanai ir nepieciešami atrast hidrostatiska spiediena funkciju  $s$ . Līdzīgi darbam [86] var parādīt, ka deformācijas savienojamības nosacījumu izpildīšana, dod hidrostatiska spiediena funkcijai  $s$  vienādojumu:

$$\nabla^2 s = 0. \quad (2.25)$$

Tas ir, hidrostatiskā spiediena funkcija  $s$  ir harmoniska funkcija, kurai jāapmierina robežnosacījumi gumijas slāņa kontūrā. Šos noteikumus noteica no robežnosacījumiem (2.11) un (2.12).

Hidrostatiskā spiediena  $s$  robežnosacījumiem var būt lielas kļūdas, tā kā tie ir noteikti izmantojot pārvietojumu  $u_i$  tuvinātas vērtības un to atvasinājumu vērtības, kuriem kļūdas var būt daudz lielākas nekā paši pārvietojumi  $u_i$ . Tāpēc tuvinātas hidrostatiska spiediena funkcijas vērtības būs atrasti neprecīzi.

Ar pārvietojumu  $u_i$  izvēli var neizpildīt nespiežamības nosacījumu (2.23). Tas ļauj noteikt hidrostatiskā spiediena funkciju  $s$ , un tātad spriegumus.

Tādā gadījumā rodas cita problēma, kas ir saistīta ar funkcijas  $s$  izvēli. Ja neizpilda nespiežamības nosacījumu (2.23), kurš nav obligāts izvēloties pārvietojuma funkciju, tad variāciju uzdevums ir nekorekts, tā kā meklējamās funkcijas  $u_i$  un  $s$  izteiksmē (2.22) nav viennozīmīgas:  $u_i$  – kvadrātiska;  $s$  - lineāra.

Lielai gumijas-tehniska izstrādājumu klasei jau ir iegūtas stinguma raksturlīknes [47],[60],[86],[89] pieņemot, ka ir, iespējams, neieverot elastomēra saspiežamību (tās ir patiesas izstrādājumiem pie noteiktiem ģeometriskiem parametriem). Ja izstrādājuma ģeometriskā forma vai Puasona koeficienta vērtība  $\mu$  gumijai, jau neļauj neievērot elastomēra vāju saspiežamību, tad sakarības „spēks – pārvietojums” noteikšanai jāizmanto funkcionālis (2.13)-(2.15), kurā meklējamās funkcijas  $u_i$  un  $s$  ieiet viennozīmīgi. Tādā gadījumā uzdevums kļūst sarežģītāks.

Var rasties nepieciešamība novērtēt vājas saspiežamības ietekmi uz risinājumu, kurš bija iegūts no nespiežamības nosacījuma. Šai gadījumā, lai nebūtu jāreķina sarežģīts uzdevums ar funkcionāli (2.13) - (2.15), var rekomendēt vājas saspiežamības ievērošanas tuvinātu metodi. Tas ir sevišķi ērti, ja ir jānosaka stinguma raksturlīkne spēks – pārvietojums. Aplūkosim taisnstūra koordinātu sistēmā gumijas tehnisku izstrādājumu ar plakānu gumijas

slāni. Tas ir noslogots ar aksiālu spiedes spēku  $P$  (pa  $z$  asi, perpendikulāri aplūkotam plakanam slānim):

$$\int_F \sigma_{zz} dF = -P, \quad (2.27)$$

kur  $F$  – gumijas slāņa šķērsgriezums.

Tā kā saspiežamam materiālam (2.15) – (2.16):

$$\sigma_{zz} = G \left( 2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \right), \quad (2.28)$$

kur  $\omega$  – pārvietojums paralēli spiedei  $P$ .

tad, no (2.8), (2.27) un (2.28):

$$2 G \int_F \frac{\partial \omega}{\partial z} dF + \frac{3\mu G}{1+\mu} \int_F s dF = -P. \quad (2.29)$$

Tā kā pārvietojumu funkcija  $\omega$  jau ir tuvināti atrasta, tad no (2.29) var atrast hidrostatiskā spiediena funkcijas  $s$  tuvinātu vērtību. Ieliekot  $s$  (2.8) un integrējot pa tilpumu, ieguvām tilpuma deformācijas tuvinātu vērtību, kura rodas vājas saspiežamības dēļ:

$$\Delta V_c = \frac{1-2\mu}{2\mu} \left( \frac{P}{G} h + 2 \int_V \frac{\partial \omega}{\partial z} dV \right), \quad (2.30)$$

kur  $h$  – gumijas slāņa biezums.

Tā kā  $\Delta V_c \approx -\Delta_c F$ , tad no (2.25), ievērojot jau zināmo pārvietojumu  $\omega$ , ieguvām papildus pārvietojuma vērtību  $\Delta_c$ , kura rodas vājas saspiežamības dēļ:

$$\Delta_c = \frac{1-2\mu}{2\mu F} \left( \frac{P}{G} h + 2 \int_V \frac{\partial \omega}{\partial z} dV \right). \quad (2.31)$$

Šajā gadījumā gumijas tehniskā izstrādājuma summārais pārvietojums:

$$\Delta_\Sigma = \Delta + \Delta_c. \quad (2.32)$$

Salīdzinot  $\Delta_c$  ar  $\Delta$ , katrai gumijas tehniskā izstrādājuma ģeometrijai un katrai elastomēra markai, aptuveni var novērtēt, vai ir nepieciešamība precizēt saspiežamības ieguldījumu amortizatora pārvietojuma risinot uzdevumu pēc precīzākas metodes. Vājas saspiežamības ietekme uz stinguma raksturojumu „spēks – pārvietojums” ir aptuvena, jo reālā hidrostatiskā spiediena funkcija gumijas tehniskā izstrādājuma šķērsgrīzumā nav zināma un ir aizvietota ar konstantu lielumu.

Ja kādas metodes palīdzību iegūta funkcija  $s$  analītiskā izteiksme, tad no tilpuma deformācijas vienādojuma (2.8) uzreiz var aprēķinājām papildus pārvietojumu  $\Delta_c$  vājas saspiežamības dēļ:

$$\Delta_c = \frac{3(1-2\mu)}{2F(1+\mu)} \int_V s dV . \quad (2.33)$$

Izmantojot (2.31) un (2.33) jābūt uzmanīgam, tāpēc ka funkcijas  $\omega$  un  $s$  ir atrastas nenaspiežamas gumijas gadījumam. Kad attiecība starp  $\Delta$  un  $\Delta_c$  būs pietiekami liela, tad uzdevums jāreķina izmantojot robežproblēmu (2.7) - (2.12) vai funkcionāli (2.13) - (2.15) saspiežamam materiālam.

### 2.3. Regularizācijas metodes lineāro robežproblēmu risināšanai nenaspiežamam materiālam

Elastomēru materiāli, kuri tiek izmantoti gumijas-tehniskos izstrādājumos, ir vāji saspiežami. Daudzām konstrukciju konfigurācijām elastomēra vāju saspiežamību var neievērot, ja ir ņemta vērā elastomēra nenaspiežamības hipotēze. Tādiem materiāliem elastības teorijas robežproblēma (2.7) - (2.12) ir pierakstīta pārvietojumos pie  $\mu = 0.5$  šādā formā:

$$\begin{aligned} & - \text{līdzsvara vienādojumi: } u_{i,jj} + s_{,i} = 0 \quad \in V , \\ & - \text{nenaspiežamības nosacījumi: } u_{j,j} = 0 \quad \in V \\ & - \text{ģeometriskie robežnosacījumi: } u_i = u_i^0 \in F_u , \\ & - \text{spēka robežnosacījumi: } G[(u_{i,j} + u_{j,i})n_j + s\delta_{ij}n_j] = p_i \quad \in F_\sigma \end{aligned} \quad (2.34)$$

Šeit un turpmāk, pieraksta saīsināšanai indekss, kas atkārtojas, apzīmē summēšanu, bet komats apzīmē diferencēšanu.

Tas ļauj atbrīvoties no skaitļošanas procedūras nestabilitātes, tuvināti risinot elastības teorijas robežproblēmu.

Uzdevuma (2.34) risināšanas tuvinātie paņēmieni balstās vai nu uz analītiskām metodēm (bieži ar variācijas principiem) ar meklējamā risinājuma izvirzīšanu rindās, vai nu uz skaitliskām metodēm uz GEM bāzes, izmantojot dažādu veidu funkcionāļus. Visveiksmīgāk tuvināta analītiska risinājuma meklēšanai tiek izmantots pilnās potenciālās enerģijas minimuma princips:

$$\Pi(u_i, s) = G \iiint_V \left[ \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) + s u_{j,j} \right] dV - \int_{F_\sigma} p_i u_i dF . \quad (2.35)$$

Nosacīti ikvienai metodei risinājumu var parādīt rindu veidā:

$$\begin{aligned} u_i &= a_{in} \varphi_n^i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, \dots, N_i; \quad N_1 + N_2 + N_3 = K \\ s &= c_m \psi_m(\bar{x}), \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (2.36)$$

Izteiksmēm jāizpilda ģeometriskie robežnosacījumi. Ja ar pārvietojuma funkcijas  $u_i$  (2.36) izvēli arī izpildām nespiežamības nosacījumu (kurš nav Eilera vienādojums funkcionālim (2.35), tad funkcionālis  $\Pi(u_i, s)$  izskatās sekojoši:

$$\Pi(u_i) = G \iiint_V \left[ \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_{F_\sigma} p_i u_i dF . \quad (2.37)$$

Tā kā funkcija  $s$  nav iekļauta funkcionālā (2.37), tad normālie spriegumi paliek nezināmi. Var neizpildīt nespiežamības nosacījumu (tāpēc, kā tas nav obligāts). Tad parādās problēma ar koordinātu funkcijas  $u_i$  un  $s$  (2.36) izvēli funkcionālim (2.35). Tas ir saistīts ar to, ka funkcionāļu (2.35) un (2.36) izmantošana noved pie vāji nosacītas iegūtās algebrisku vienādojumu sistēmas ar saistītām konstantēm  $a_{in}$  un  $c_m$ , tā kā funkcijas  $u_i$  un  $s$  iet (2.35) nekorekti:  $u_i$  - kvadrātiski,  $s$  – lineāri. Ieguvām nekorektu variācijas uzdevumu funkcionālim (2.35) [117], kas prasa jaunu specializētu metožu izstrādi tuvinātu risinājumu iegūšanai priekš  $u_i$  un  $s$ .

Kā nepieciešamais saskaitāmo skaits rindās  $K$  un  $M$  ir tuvāks viens otrām, jo vājāks algebrisku sistēmu konstantes noteikšanai sakarīgums un lielāka tuvināta risinājuma iegūšanas procesa, izmantojot (2.35) un (2.36), nestabilitāte. Tas ir raksturīgi ne tikai analītiskām risināšanas metodēm, bet arī skaitliskām risināšanas metodēm, tai skaitā galīgo

elementu metodei. Rezultāts ir atkarīgs no galīgā elementa veida un no funkcijas  $s$  aproksimācijas katrā galīgā elementā. Skaitliskā nestabilitāte var novest pie nozīmīgām kļūdām. Lai no tā izvairītos darbos [86] un [71] ir piedāvāts izmantot galīgo elementu metodi vai uzlikt ierobežojumus skaitļiem  $K$  un  $M$  sadalījumos (2.36), vai arī uzlikt ierobežojumus hidrostatiskā spiediena aproksimējošai funkcijai katrā galīgā elementā.

Nevar izmantot trīsstūrveida galīgo elementu, ar  $s = const$ , vai taisnstūra galīgo elementu, ar  $s \neq const$ . utt., jo iegūstam pārdefinētu algebrisko vienādojumu sistēmu. Taču pat “veiksmīga” risinājuma gadījumā hidrostatiskā spiediena  $s$  funkcija netiek atrasta, jo tā “izkrīt” no funkcionāla (2.35). Šajos gadījumos ieviestie ierobežojumi uz (2.36) vai galīgā elementa formu nav dabiskie robežnosacījumi, bet bez tiem neizdodas iegūt stabilu risinājuma algoritmu. Tas arī attiecas uz analītiskām risināšanas metodēm, kurās izmanto funkcionāli (2.35). Izmantojot funkcionāli (2.35) un izvēloties funkcijas  $u_i$  un  $s$  (2.36) aprēķināšanas procedūra būs stabila, ja:

$$K > M \quad (2.38)$$

kur  $K$  – variējamo nezināmo koeficientu skaits funkcijās  $u_i$  (2.36);

$M$  - variējamo nezināmo koeficientu skaits funkcijās  $s$  (2.36).

No šiem trūkumiem var izvairīties, izmantojot regularizācijas metodi [117], kuras jēga ir tā, ka meklēto risinājumu minimizētu nevis funkcionālis  $\Pi(u_i, s)$  (2.35), kuram uzdevums nav stabils, bet “uzlabotais” funkcionālis  $\Phi^\alpha(u_i, s)$ , kam piemīt stabilizējošas īpašības. Saskaņā ar regularizācijas teoriju [117], funkcionāli  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  var pierakstīt veidā:

$$\Phi^\alpha(u_i, s) = \Pi(u_i, s) + \alpha\Omega(u_i, s), \quad (2.39)$$

kur  $\alpha$ - regularizējošais skaitliskais nevariējamais parametrs;

$\Omega(u_i, s)$  - regularizējošais funkcionālis ar īpašībām:

- precīzs uzdevuma (2.34) risinājums pieder funkcionāla  $\Omega(u_i, s)$  noteikšanas apgabalam;
- noteikšanas apgabalā  $\Omega(u_i, s)$  iegūst lietišķus nenegatīvus lielumus;
- funkcionālis  $\Omega(u_i, s)$  pārvērš  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  par nosacīto  $u_i$  un  $s$  kvadrātisku funkcionāli, kam piemīt minimāluma īpašība.

Pie šiem nosacījumiem var pierādīt [117], ka uzdevuma (2.34) operatoriem piemīt secība  $\{u_i^\alpha, s^\alpha\}$ , kura minimizē funkcionāli  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  un kura pēc enerģijas reducējas uz precīzu risinājumu  $\{u_i^T, s^T\}$  pie  $\alpha \rightarrow 0$ , ja funkcionāli  $\Omega(u_i, s)$  ņemt meklējamo  $u_i$  un  $s$  normas veidā.

Ievērojot vāji saspiežamam materiālam funkcionāļa (2.14) veidu, funkcionāli  $\Omega(u_i, s)$  var pierakstīt veidā:

$$\Omega(u_i, s) = \Omega(s) = \iint_V s^2 dV. \quad (2.40)$$

Nav grūti pierādīt, ka  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  (2.39) ar (2.40) piemīt minimālas īpašības. Ievērojot, ka tuvināts risinājums izriet no funkcionāļa  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  stacionaritātes nosacījuma:

$$\delta \Phi^\alpha(u_i, s) = 0. \quad (2.41)$$

pēc vienkāršām transformācijām, ievērojot (2.40)-(2.41), otrai funkcionāļa  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  variācijai ieguvām:

$$\delta^2 \Phi^\alpha(u_i, s) = G \iint_V \left[ \frac{1}{2} \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha \delta s \delta s \right] dV > 0. \quad (2.42)$$

Tātad funkcionālim  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  ir minimuma īpašības, ja parametrs  $\alpha$  nebūs pozitīvs ( $\alpha < 0$ ). Darbā [117] parādīts, ka parametra  $\alpha$  skaitliskai izvēlei jābūt saskaņotai ar precizitāti  $\gamma$ , kas raksturo:

- 1) Vai zināmo mehānisku raksturojumu uzdošanas precizitāti sistēmā (2.34);
- 2) Vai operatoru pierakstīšanas precizitāti sistēmā (2.34);
- 3) Vai tuvinātā risinājuma skaitliskās realizācijas precizitāti.

No šīs sakarības starp lielumiem  $\alpha$  un  $\gamma$  seko: ja  $\gamma \rightarrow 0$ , tad  $\alpha = \alpha(\gamma) \rightarrow 0$ . Kā likums, konkrētām robežproblēmām precizitāte  $\gamma$  vienmēr ir zināma, bet faktiskā  $\alpha = \alpha(\gamma)$  izvēle ir apgrūtināta. Izrādās, ka pietiek izvēlēties  $\alpha$  no pieļaujamo lielumu skaita vienai no funkcijām  $\alpha = \alpha(\gamma)$ , kurai funkcionālim  $\Phi^\alpha(u_i, s)$  piemīt vajadzīgās īpašības. Var teikt, ka izmantojot stabilizējošo funkcionāli (2.38), tuvinātais risinājums  $\{u_i^\alpha, s^\alpha\}$  būs optimāls pēc enerģētiskās

normas pie uzdotās  $\gamma$  aprēķina precizitātes, ja regularizējošais skaitliskais parametrs  $\alpha$  izvēlēts:

$$\alpha = \frac{\gamma}{2R}, \quad (2.43)$$

kur  $R$  – funkcionāļa  $\Omega(s)$  mažorante.

Aprēķinot gumijas tehnisko izstrādājumus, praktiski vienmēr var veikt rupji mažorantes  $R$  novērtējumu, pieņemot, ka funkcija  $s$  – ir hidrostatiskā spiediena funkcija un izmantojot (2.43) var ņemt vidējo funkcijas  $s$  vērtību. Nav grūti pārliecināties, ka uzdevuma (2.34) skaitliskā risinājuma gadījumā, izmantojot (2.36), (2.37), (2.39), iegūs saistītu lineāro vienādojumu sistēmu ar saistības koeficientu  $L_2 \cong K + M$ . Tai pašā laikā, izmantojot (2.35) un (2.36), iegūs saistītu lineāro vienādojumu sistēmu ar saistības koeficientu  $L_1 = K - M$ . Jo  $L_2$  vienmēr ir pozitīvs (un vienmēr  $L_2 > L_1$ ), tad, izmantojot, piemēram, galīgo elementu metodi ar (2.39) un (2.40), nerodas nekādi ierobežojumi nedz uz galīgo elementu formu, nedz uz aproksimācijas veidu  $u_i$  un  $s$ . Skaitliskā aprēķina process kļūst stabils un sakrīt.

Jāatzīmē, ka uzdevuma (2.34) tuvinātā analītiskā risinājuma gadījumā, izmantojot (2.36), (2.39) un (2.40) iegūstam iespēju brīvi izvēlēties saskaitāmo skaitu meklējamiem  $u_i$  un  $s$ . Tas nav iespējams, izmantojot (2.35) un (2.36), tā kā šī gadījumā skaitliskās procedūras stabilitāte prasa nosacījuma (2.38) izpildīšanu  $K$  skaita nezināmu variējamo koeficientu funkcijās  $u_i$  (2.36) un  $M$  skaita nezināmu variējamo koeficientu funkcijās  $s$  (2.36).

Jāatzīmē, kā analītiskā risinājuma gadījumā parametrs  $\alpha$  spēlē fiktīvā parametra lomu. Tātad galīgās analītiskās izteiksmēs jāievieto  $\alpha = 0$ .

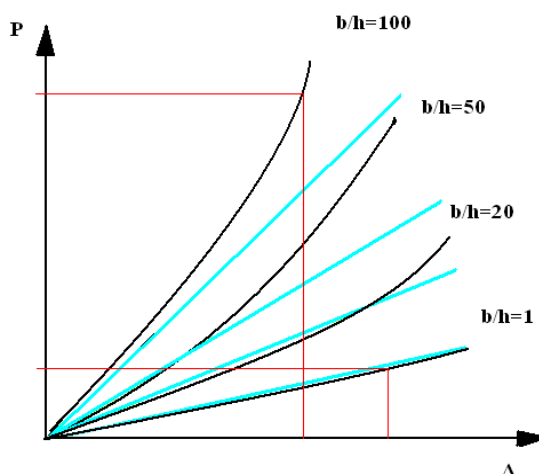
Aplūkotā metodika ļauj izmantot funkcionāli (2.39), izpildīt pilnu gumijas-tehniskā izstrādājuma spriegota stāvokļa analīzi, pieņemot, ka gumija ir nespiežama.

## 2.4. Elastomēra kompensatora stinguma aprēķināšana ņemot vērā fizisko nelinearitāti

### 2.4.1. Plāno elastomēru slāņu fiziskā nelinearitāte pie saspiešanas

Plānslāņu gumijas – metāla elementi rod arvien lielāku pielietojumu dažādos atbildīgos mašīnbūves konstrukciju mezglos. Tādu mezglu darbības augstās ekspluatācijas prasības noved pie nepieciešamības precīzāk aprēķināt plānslāņa gumijas-metāla kompensatorus (amortizatorus).

Daudzi eksperimenti ar gumijas- metāliskiem amortizatoriem ar plāniem elastomēra slāņiem [48], [57], kuriem  $\rho = b_{min}/h \geq 40 \div 50$  (kur  $b$ ,  $h$  – atbilstoši gumijas slāņa platums un biezums), pie asu saspiešanas norāda uz būtisku sakarības „spēks – pārvietojums” nelinearitāti jau pie mazām deformācijām, kuras nepārsniedz 3% - 5%. Sakarības „spēks –pārvietojums” atkarība no ģeometriskā faktora  $\rho = b_{min}/h$  parādīta 2.1. att.



2.1.att. Sakarības „spēks - pārvietojums” kvalitatīvs grafiks,  $\Delta/h \leq 0.05$

Vispārpieņemtās gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķina metodes [60], [86], pieņemot uzdevumu, ka ģeometriskie un fiziski lineāru (zilas līnijas 2.1.), att. neļauj aprakstīt iegūtos saspiešanas eksperimentos raksturlīknes [49], [60] (melns līnijas 2.1. att.).

Lielāka daļa pētnieku izskaidro šo parādību elastomēra fiziskai nelinearitātei. Domājams, pietiekami plānā saspiesta elastomēra slānī rodas liels hidrostatiskais spiediens, kas ietekmē elastomēra mehāniskās īpašības. Tātad, lai ievērotu fizisko nelinearitāti, ir nepieciešams noteikt vispārināto bīdes moduli  $G_s$  un vispārināto telpiskas saspiešanas moduli  $K_s$  no hidrostatiska spiediena vidējās vērtības elastomēra slānī (vai no telpiskas deformācijas  $\epsilon_{ii}$  vidējās vērtības). Darbos [20], [49], [60] piedāvāti daudzu eksperimentu rezultāti plāniem

plakaniem elastomēra slāņiem. Parādīts [49], [57], ka pietiekami labi fizisku nelinearitāti eksperimentos (aksiāla saspiešana) var aprakstīt, ja vispārinātiem moduļiem  $G_s$  un  $K_s$  izmanto lineāru sakarību no  $s$  (vai  $\varepsilon_{ii}$ ):

$$G_s = G (1 + \alpha s), \quad K_s = K (1 + \beta s), \quad s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

vai

$$G_s = G (1 + \gamma \varepsilon_{ii}), \quad K_s = K (1 + \eta \varepsilon_{ii}),$$
(2.44)

kur  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  un  $\eta$  konstantes

Darbos [49], [57] aplūkotas vairākas vispārīgas sakarības fiziskai nelinearitātei elastības likumā ar vispārinātiem moduļiem  $G_s$  un  $K_s$ :

$$\sigma_{ii} = 3 s = K_s(\varepsilon_{ii}, \varepsilon) \varepsilon_{ii} + 2 G_s(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{ii}}{3}),$$

$$\sigma_{ij} = G_s(\varepsilon_{ii}, \varepsilon) \varepsilon_{ij},$$
(2.45)

kur  $\varepsilon_{ii}$  – elastomēra slāņa relatīvā tilpuma izmaiņa;

$\varepsilon$  – mazu deformāciju tenzora otrais invariants (bīdes deformācijas intensitāte).

Praktiskos aprēķinos vispārinātiem moduļiem  $G_s$  un  $K_s$  tāpat var izmantot sakarības [58]:

$$K_s(\varepsilon_{ii}, \varepsilon) = K_{s1}(\varepsilon_{ii}) K_{s2}(\varepsilon), \quad G_s(\varepsilon_{ii}, \varepsilon) = G_{s1}(\varepsilon_{ii}) G_{s2}(\varepsilon)$$
(2.46)

Dažos darbos fiziskā nelinearitāti aprakstīta ar elastīgiem potenciāliem, no kuriem iegūst sakarību spriegums - deformācija. Sarežģītā pieraksta un daudzu nezināmo konstantu dēļ, šo funkcionāli ir ļoti grūti izmantot konkrētu gumijas izstrādājumu aprēķināšanai, ievērojot elastomēra materiāla fizisku nelinearitāti.

Eksperimenti sakarību (2.44) un (2.45) noteikšanai ir sarežģīti. „Vistīrākais” eksperiments ir elastomēra slāņa saspiešana absolūti cietā cilindrā. Šis eksperiments ļauj noteikt vispārinātu telpiskas saspiešanas moduli  $K_s(\varepsilon_{ii})$  (vai  $K_s(s)$ ) ar precizitāti 1%. Lai to izdarītu, no grafika

$$s = \frac{P}{F} = s(\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta}{h}),$$
(2.47)

kur  $P$  – saspiešanas spēks;

$\Delta$ - elastomēra slāņa pārvietojums;  
 $h$  –elastomēra slāņa biezums.

jānosaka vispārinātais telpiskas saspiešanas modulis  $K_s(\epsilon_{ii})$  kā pieskare grafikam  $s(\epsilon_{ii})$ , t.i.

$$K_s(\epsilon_{ii}) = \frac{ds}{d\epsilon_{ii}} \quad (2.48)$$

Praktiski visiem tāda veida eksperimentiem, pirmā tuvinājumā, pietiekami precīzi var izmantot lineāru sakarību (2.44):

$$K_s = K(1 + \beta s) \quad (2.49)$$

Vispārinātā bīdes moduļa noteikšanai ir nepieciešams eksperiments ar plāniem elastomēra slāņiem un bīdē ar aksiālu saspiešanu. Šo eksperimentu „tīrā” veidā ir ļoti grūti realizēt, tā kā nav iespējams „tīri” sadalīt fiziskas un ģeometriskas nelinearitātes ietekmi uz vispārināto bīdes moduli  $G_s$ . Spiedes - bīdes eksperimentu rezultāti ir pretrunīgi un nedod iespēju viennozīmīgi noteikt vispārināto bīdes moduli  $G_s$ .

Aplūkojam gumijas-tehniskos izstrādājumus, kuri sastāv no plāniem elastomēra slāņiem un kuri strādā aksiālā spiedē. Slāņa ģeometrija garantē mazas deformācijas un nodrošina lielu īpatnēju saspiedējspēku (līdz 2000kg/cm<sup>2</sup>). Eksperimentālos darbos [49], [57] parādīts, ka aplūkotiem elastomēra elementiem pie nozīmīgām sloģojuma intensitātēm ir būtiska sakarības „hidrostatiskais spiediens – telpiska deformācija” nelinearitāte jau mazu deformāciju apgabalā. Turklāt bīdes deformācijas atkarība no hidrostatiskā spiediena paliek praktiski lineāra pie tādiem pašiem deformācijas lielumiem. Telpiskās deformācijas reālā atkarība no hidrostatiskā spiediena augšminēto gumijas izstrādājumu stinguma aprēķinos var novest pie būtiskām kļūdām.

No visiem vienādojumiem, kuri apraksta statiskās elastības teorijas robežproblēmu vāji saspiežamam materiālam (2.7) – (2.12) izmainās tikai fiziskie vienādojumi, kuri apraksta sakarību starp sprieguma tenzoru  $\sigma_{ij}$  un deformācijas tenzoru  $\epsilon_{ij}$ .

Šajā gadījumā elastības teorijas robežproblēmas matemātiskajā modelī vāji saspiežamam materiālam atbilstība starp sprieguma komponentēm un deformācijām, jāaizvieto ar eksperimentāli pierādītu tilpuma deformācijas un hidrostatiskā spiediena sakarību. Izmantojot darbu [58] komponentes  $\epsilon_{ij}$  un  $\sigma_{ij}$  pierakstām:

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{ll}\chi(\varepsilon_{ll})\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}), \quad (2.50)$$

kur  $G$  – bīdes modulis;

$K$  - tilpuma modulis ;

$\varepsilon_{ll}$  – tilpuma deformācija;

$\mu$  - Puassona koeficients;

$\delta_{ij}$  – Kronekera simbols;

$i, j, l = x, y, z.$

$\chi(\varepsilon_{ll})$  - tilpuma funkcija

Indeksiem, kuri atkārtojas šeit un turpmāk, veicam summēšanu. Dotajā gadījumā tilpuma deformācijas (2.46) sakarību var pierakstīt veidā:

$$\varepsilon_{ll} = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s\varphi(s), \quad (2.51)$$

kur  $\varphi(s)$  – hidrostatiskā spiediena funkcija.

Robežpārejā uz lineāru uzdevumu sakarībām (2.50) un (2.51) jāsakrīt ar Huka likumu. Tāpēc funkcijām  $\chi(\varepsilon_{ll})$  un  $\varphi(s)$  jāizpilda nosacījumu:

$$\begin{aligned} \lim \chi(\varepsilon_{ll}) &= 1 \quad \text{pie } \varepsilon_{ll} \rightarrow 0 \\ \lim \varphi(s) &= 1 \quad \text{pie } s \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Skaitļojot abas funkcijas ērtāk ir attēlot rindās

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon_{ll}) &= 1 + \chi_k \varepsilon_{ll}^k; \\ \varphi(s) &= 1 + \varphi_k s^k, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.53)$$

Nemot vērā, ka funkcijas  $\chi(\varepsilon_{ll})$  un  $\varphi(s)$  ir savstarpēji atgriezeniskas, tad starp koeficientiem  $\chi_k$  un  $\varphi_k$  eksistē sakarība:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\varphi_1; \\ \chi_2 &= 2\varphi_1^2 - \varphi_2; \\ \chi_3 &= -(5\varphi_1^3 - 5\varphi_1\varphi_2 + \varphi_3); \\ &\dots = \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

Analizēto konstrukciju stinguma raksturlīknes noteikšanai efektīvāk un ērtāk ir izmantot variāciju metodi, izejot no pilnas potenciālās deformācijas enerģijas  $\Pi$  minimuma principa ( $\delta\Pi = 0$ ). Ņemot vērā (2.50 - (2.53), potenciālās deformācijas enerģijas  $\Pi$  izteiksme būs:

$$\Pi = (U_{o\sigma} + U_{\phi}) - A = \int_V \left\{ \frac{1}{2} K \varepsilon_{II}^2 \left[ 1 + 2 \frac{\chi_k}{2+k} \varepsilon_{II}^k \right] + G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{II} \delta_{ij} \right)^2 \right\} dV - \int_{F_\sigma} P_i u_i dF, \quad (2.55)$$

Noskaidrosim vai stacionaritātes noteikums  $\delta\Pi = 0$  ir funkcionāļa  $\Pi$  minimuma noteikums. Lai to izdarītu, ir nepieciešams aplūkot funkcionālim  $\Pi$  otru variāciju. Darbā [86] parādīts, ka funkcionāļa  $\Pi$  otra variācija būs pozitīva, ja izpildās nosacījums:

$$\frac{d(\varepsilon_{II} \chi(\varepsilon_{II}))}{d\varepsilon_{II}} = \chi(\varepsilon_{II}) + \varepsilon_{II} \frac{d\chi(\varepsilon_{II})}{d\varepsilon_{II}} > 0, \quad (2.56)$$

No (2.48) un (2.50) iegūst:

$$\frac{ds}{d\varepsilon_{ii}} = K_s(\varepsilon_{ii}) \quad (2.57)$$

Šai gadījumā nosacījumi (2.56) un (2.57) viennozīmīgi prasa, lai atvasinājums  $\frac{ds}{d\varepsilon_{II}}$  būtu pozitīvs, t.i., vispārinātā telpiskā saspišanas moduļa raksturlīknes slīpums būtu pozitīvs (būtu „cieta” veida). To pierāda visi saspišanas eksperimenti mazu deformācijas apgabalā. Tāpēc šim funkcionālim  $\Pi$  piemīt minimuma īpašības.

#### 2.4.2. Fiziskās nelinearitātes ievērošana zināmiem risinājumiem

Funkcionāļa (2.55) izmantošana gumijas tehnisku izstrādājumu aprēķinos noved pie nelineāras vienādojumu sistēmas, kuras analīze vairākos gadījumos ir iespējama tikai ar skaitlisku metožu (ar datorprogrammas) palīdzību. Nosakot spēka raksturojumus, aptuvena risinājuma iegūšanu var būtiski vienkāršot, ja pieņem, ka fizikāli nelineārs risinājums nesatur neko neparedzētu salīdzinājumā ar fizikāli lineāriem risinājumiem. Šai gadījumā fizikāli nelineāra uzdevuma analītiska risinājuma iegūšanai var izmantot tuvinātu metodi, kura pirmajā etapā ir analogiska lineāra uzdevuma risinājumam.

Apzīmēsim jau zināmu lineāru risinājumu ar indeksu (\*). Pirmajā tuvinājumā pieņemsim, ka meklējamais pārvietojumu vektors “u” fizikāli nelineārā uzdevumā ir proporcionāls lineāra uzdevuma pārvietojumu vektoram  $u^*$

$$u = d_0 u^*, \quad (2.58)$$

kur  $d_0$  – meklējamais proporcionalitātes parametrs, kurš ir atkarīgs no izstrādājuma ģeometriskiem parametriem un elastomēra mehāniskiem moduļiem.

Tā kā uzdevums ir ģeometriski lineārs, tad eksistē (2.58) tipa proporcionalitāte starp deformācijām  $\varepsilon_{ij}$  un meklējamo pārvietojumu  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= d_0 \varepsilon_{ij}^*; \\ \Delta &= d_0 \Delta^*. \end{aligned} \quad (2.59)$$

No (2.58) un (2.59) izriet, ka potenciālā enerģija (2.55) ir atkarīga tikai no parametra  $d_0$ :  $\Pi = \Pi(d_0)$ . Saskaņā ar potenciālās enerģijas  $\Pi$  minimuma ir spēkā vienādojums:

$$\frac{d\Pi(d_0)}{dd_0} = 0. \quad (2.60)$$

Šajā gadījumā uzdevuma risinājumu var iegūt noslēgtā formā. Pārveidosim  $\Pi = U - A$  šādā veidā:

$$\begin{aligned} \Pi &= (U'_{o\delta} + U''_{o\delta} + U_\phi) - A = \\ &= \int_V K \frac{1}{2+k} \chi_k \varepsilon_{ll}^{k+2} dV + \left\{ \int_V \left[ \frac{1}{2} K \varepsilon_{ll}^2 + G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \right)^2 \right] dV - \int_{F_\sigma} P_i u_i dF \right\}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

kur  $U'_{o\delta}$  – tilpuma maiņas potenciālā enerģija, ņemot vērā fizikālo nelinearitāti.

Iegūstot lineāru risinājumu (tā kā  $\varepsilon_{ij}^*$  – lineāra uzdevuma risinājums):

$$\int_V \left[ \frac{1}{2} K \varepsilon_{ii}^{*2} + G \left( \varepsilon_{ij}^* - \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}^* \delta_{ij} \right)^2 \right] dV = \frac{1}{2} \int_{F_\sigma} P_i u_i^* dF = \frac{1}{2} A^*. \quad (2.62)$$

Apzīmējam

$$C_k = \int_V K \frac{\chi_k}{2+k} \varepsilon_{ll}^{*k+2} dV, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

No (2.55) – (2.59), (2.60) – (2.63) izriet

$$\Pi(d_0) = C_k d_0^{k+2} + \frac{1}{2} d_0^2 A^* - d_0 A^*. \quad (2.64)$$

Lai noteiktu  $d_0$  no (2.163) iegūstam vienādojumu:

$$(k+2)d_0^{k+1} C_k + d_0 A^* - A^* = 0. \quad (2.65)$$

Praktiski realizējot (2.54) vairumā gadījumu varēs aprobežoties ar vienu vai diviem koeficientiem.

Izskatīsim gadījumu  $k = 1$ , tā kā tas dod pietiekami labu meklējamā risinājuma tuvinājumu. Apzīmēsim:

$$C_1 = \frac{1}{3} K \chi_1 \int_V \varepsilon_{ll}^{*3} dV. \quad (2.66)$$

Ja plānslāņu gumijas-metāla kompensators ir noslogots ar koncentrētu spiedes spēku  $P$ , tad

$$A^* = P \Delta^* = P^2 k_0^{*-1} G^{-1}, \quad (2.67)$$

kur:  $k_0^*$ - izstrādājuma stingums, kuras analītiskā izteiksme ir zināma no lineārā risinājuma.

Apzīmēsim:

$$B = \frac{1}{6} \cdot \frac{P^2}{C_1 k_0^* G}. \quad (2.68)$$

Tad no (2.65), (2.67) un (2.68) (ņemot vērā ka, vienādojuma (2.65) negatīvai saknei nav fizikālas jēgas)

$$d_0 = B \left( \sqrt{1 + 2B^{-1}} - 1 \right) \quad (2.69)$$

Meklējamās plānslāņu gumijas-metāla kompensatora sakarības „spēks – pārvietojums” spiedē galīgais veids, ja ņem vērā fizikālo nelinearitāti, ir sekojošs:

$$\Delta = d_0 \Delta^* = B \left( \sqrt{1 + 2B^{-1}} - 1 \right) \frac{P}{Gk_0^*}; \quad (2.70)$$

Ir viegli pārbaudīt, ka, ja  $\chi_1 = 0$ , ( $C_1 = 0$ ), tad  $d_0 = 1$ , un no (2.70) izriet lineārais risinājums. Apzīmējam:

$$\varepsilon_{ii}^* = \Delta^* f = \frac{P}{Gk_0^*} f; \quad (2.71)$$

tad no (2.66) un (2.68)

$$C_1 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} \cdot \frac{P^3}{G^3 k_0^{*3}} \chi_1 L;$$

$$L = \int_V f^3 d; \quad (2.72)$$

$$B = \frac{3(1 - 2\mu)G^2 k_0^{*2}}{4(1 + \mu)\chi_1 PL}.$$

Sakarības (2.69)-(2.72) dod meklējamo sakarību „spēks-pārvietojums” plānslāņu gumijas tehniskiem izstrādājumiem, ievērojot fizisku nelinearitāti, kas ir ievērota aksiālas spiedes eksperimentos.

Rēķinot gumijas spiedes amortizatorus ar ļoti plāniem elastomēra slāņiem, sakarības „spēks-pārvietojums” kas ievēro fizisku nelinearitāti, var ievērojami vienkāršot. Pierakstam  $\varepsilon_{ij}$  deformāciju kā summu:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{\varepsilon_{ii}}{3}, \quad (2.73)$$

kur  $\varepsilon_{ij}^0$  - formas izmaiņas deformācija;

$\frac{\varepsilon_{ii}}{3}$  - nespiežama materiāla deformācija.

Sakarība spriegums-deformācija (2.50) un potenciālā enerģija (2.55) iegūst veidu:

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{ll}\chi(\varepsilon_{ll})\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij}^o - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ij})$$

$$\Pi = \int_V \left\{ \frac{1}{2}K\varepsilon_{ll}^2 \left[ 1 + 2\frac{\chi_k}{2+k}\varepsilon_{ll}^k \right] + G\varepsilon_{ij}^{o2} \right\} dV - \int_{F_\sigma} P_i u_i dF,$$
(2.74)

Šāda pieraksta kļūda būs mazāka, ja elastomēra slānis būs plānāks. Kompensatora summāru pārvietojumu var aprēķināt pēc formulas:

$$\Delta = \Delta^o + \Delta_\theta,$$
(2.75)

kur  $\Delta^o$  – pārvietojums formas izmaiņas dēļ nesaspiežamam materiālam;

$\Delta_\theta$  – pārvietojums telpiskas deformācijas dēļ saspiežamam materiālam.

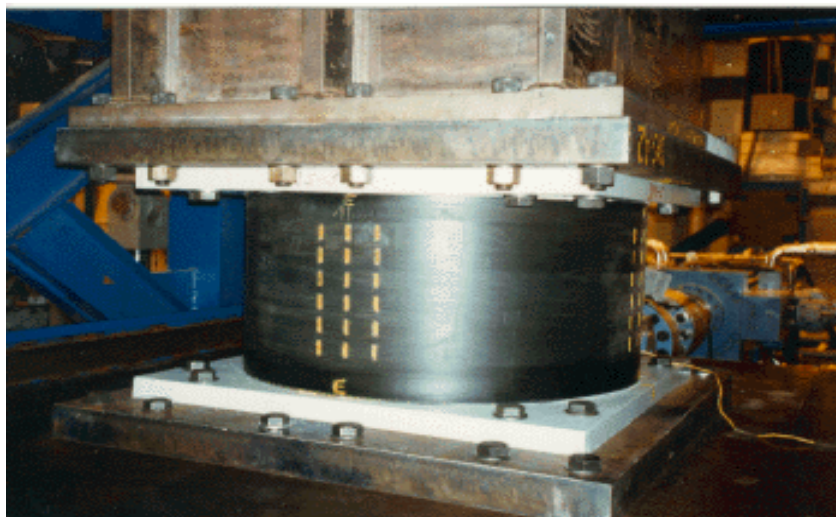
Tātad, kompensatoriem ar ļoti plāniem elastomēra slāņiem aprēķins sastāv no diviem etapiem:

- 1) Uzdevuma risinājums nesaspiežamam materiālam;
- 2) Uzdevuma risināšana, kurš atbilst tikai telpiskai saspiešanai, pieņemot, ka hidrostatiskā spiediena funkcija ir konstanta visā elastomēra tilpumā.

### **2.5. Plānslāņa gumijas kompensatora aprēķins ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību un neelastomēra slāņu deformāciju**

Daudzslāņu plānslāņu gumijas - metāla elementi tiek plaši izmantoti dažādās mašīnbūves jomās ( $\rho = a / h \gg 10$  - ir tipisks ģeometriskais izmērs šādiem izstrādājumiem  $h$  – ir gumijas slāņa platums), un ir daudz strukturālu priekšrocību, jo īpaši tās nodrošina lielāku aksiālo kompresijas stingrību un mazāku bīdes stingrību. Šādā konstrukcijā ir ļoti plāni metāla slāņi, kuri tiek izmantoti kā starpslāņi, pie kuriem tiek piestiprināti ar vulkanizācijas palīdzību gumijas slāņi.

Šādi plānslāņa gumijas-metāla elementi tiek rēķināti izmantojot klasiskos risinājumus [12], [52], [59], [71], [86]. Sakarības „spēks – pārvietojums” aprēķini parādīja, ka ir pietiekoši liela starpība starp aprēķināto vērtību un eksperimentāliem datiem [51], [62]. Analizējot analītiskus un eksperimentālus datus, var secināt, ka jo Puasona koeficients ir tuvāk 0.5 un plānāks ir gumijas slānis, jo lielāka ir starpība. Starpību starp analītiskiem un eksperimentāliem datiem var izskaidrot ar to, ka saspiešanas laika deformējas ne tikai elastomēra slāņi, bet arī neelastomēra slāņi.

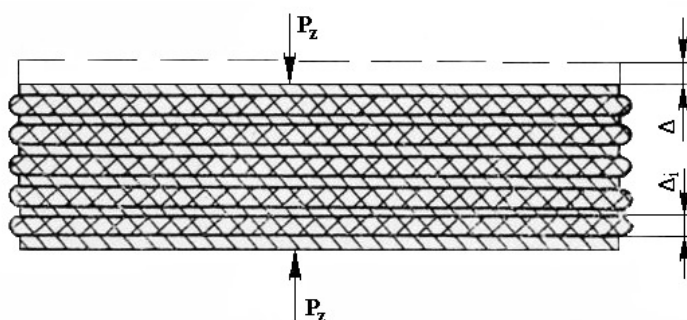


2.2.att. Svina-gumijas atbalsts, ko pielieto būvēs seismiskos rajonos

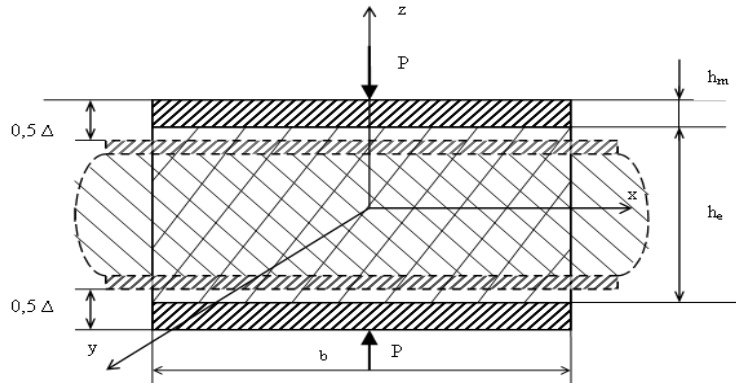
Otrs faktors, kas ietekmē starpību ir tas, ka analītiskos risinājumos neņem vērā gumijas vāju saspiežamību. Gumijas vājas saspiežamības ietekme uz gumijas kompensatora stinguma raksturojumu ir lielākā tad, kad uz gumijas slāni darbojas liels hidrostatiskais spiediens un kad elastomēra slāņa brīvas virsmas platums ir mazs salīdzinājumā ar fiksētās virsmas laukumu. Tāpēc plānslāņa gumijas metāliska kompensatora aprēķinos jāievēro gumijas vāja saspiežamība.

Lai nodrošinātu drošu darbību un veiksmīgi projektēt plānslāņa gumijas-metāla elementus ir nepieciešams iegūt analītisku risinājumu šāda veida elementu aprēķināšanai, kura ņem vērā visus augšminētos faktorus. Viens no svarīgiem šāda veida elementu raksturojumiem ir sakarība „spēku – pārvietojums”. Lai iegūt precīzu analītisku risinājumu, tika piedāvāts analītiskā izteiksmē ievadīt locekli, kurš raksturo neelastomēra slāņa deformāciju un ieverot gumijas vāju saspiežamību.

Aplūkosim plānslāņu gumijas-metāla kompensatoru (2.3.att. a.) aksiālā spiedē.



(a)



(b)

2.3. att. Aprēķinu modelis: (a) –plānslāņu gumijas – metāla kompensators;  
 (b) – plānslāņa gumijas – metāla kompensatora n-tais slānis

Izmantojam variāciju metodi kopā ar potenciālas enerģijas minimuma principu [86] vāji saspiežamam materiālam. Pierakstam potenciālās enerģijas izteiksmi kompensatoram pie mazām deformācijām:

$$J = \sum_{l=1}^{l=n} G \int_V \left[ (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2(\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xy}^2) + \frac{3\mu}{1+\mu} S(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - \frac{9\mu(1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} S^2) \right] \cdot dV - P\Delta, \quad (2.76)$$

kur  $G$  – bīdes modulis katram slānim;

$\mu$  - Puasona koeficients katram slānim;

$P$  – saspiešanas spēks;

$\Delta$  – kompensatora pārvietojums;

$s$  – hidrostatiska spiediena funkcija;

$u, v, w$  – patvaļīgi izvēlēta punkta pārvietojumi katra slāņi  $x, y, z$  virzienos;

$V$  – katra slāņa tilpums.

Summēšana notiek visiem plānslāņa gumijas-metāla kompensatora slāņiem (gumijas un neelastomēra slāņiem).

Deformācijas eij katrā slānī meklējam izmantojot formulas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}; \varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy}; \varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right); \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right); \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right); \quad (2.77)$$

Potenciālo enerģiju viesim elementiem ieguvām summējot formulā (2.76) visus gumijas un neelastomēra slāņus. Apzīmēsim visus fizikāli – mehāniskus un ģeometriskus parametrus kas attiecas uz gumijas slāņiem ar burtu – e, kas attiecas uz neelastomēra slāņiem ar burtu - m. Lai izmantot funkcionāli (2.76), jāpieņem pārvietojumu funkcijas  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$ ,  $w(x,y,z)$  un hidrostatiskā spiediena funkciju  $s(x,y,z)$ . Ir pietiekami apmierināt ģeometriskos robežnosacījumus - gumijas slāņa un neelastomēra slāņa savienošanas nosacījumus (nav pārvietojumu starp tiem). Lai vienkāršotu aprēķinus, pieņemam, ka visi slāņi ir ar izmēriem a un b, gumijas slāņa biezums ir  $h_e$  un neelastomēra slāņa biezums ir  $h_m$ . Tad ģeometriskos robežnosacījumus vāram pierakstīt šādi:

$$\begin{aligned} w_e(x,y,0.5h_e) &= -0.5\Delta; \quad w_e(x,y,-0.5h_e) = 0.5\Delta \\ u_e(x,y, \pm 0.5h_e) &= u_m(x,y, \pm 0.5h_e); \quad v_e(x,y, \pm 0.5h_e) = v_m(x,y, \pm 0.5h_e) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Pārvietojuma funkcijām pieņemam: gumijas slānim plakano šķēlumu hipotēzi, neelastomēra slānim izpildās homogēnas deformācijas nosacījums. Ņemot vērā robežnosacījumus (2.78), pierakstam pārvietojuma funkcijas:

- gumijas slānim:

$$\begin{aligned} u_e &= C_1 x (z^2 - h_e^2/4) + K_1 x, \quad v_e = C_2 y (z^2 - h_e^2/4) + K_2 y, \\ w_e &= -C_3(z^3/3 - zh_e^2/4)/h_e^3 - C_4 z, \quad s_e = C_5(z^2 - h_e^2/4), \end{aligned} \quad (2.79)$$

-neelastomēra slānim:

$$\begin{aligned} u_m &= K_1 x, \\ v_m &= K_2 y, \\ w_m &= s_m = 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

kur  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, K_1, K_2$  – nezināmas konstantes, kuras var atrast no potenciālas enerģijas (2.76) minimuma principa:

$$\frac{\partial J(C_1, C_2, C_3, C_4, K_1, K_2)}{\partial(C_1, C_2, C_3, C_4, K_1, K_2)} = 0 \quad (2.81)$$

Plānslāņa gumijas-metāla kompensatora pārvietojums, izmantojot (2.78) – (2.81), varam atrast pēc formulas:

$$\Delta = -C_3 h_e^3/6 + C_4 h_e \quad (2.82)$$

No vienādojumu sistēmas (2.81) un (2.82) varam iegūt izteiksmi pārvietojumu aprēķināšanai:

$$\Delta = \frac{P h_e n}{2,5 G_e ab} \frac{1 + 1.25 \frac{B_1 B_2}{\chi(B_1 + B_2)}}{1 + \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2 + \frac{1 - 2\mu}{\mu} B_1 B_2}}, \quad (2.83)$$

kur

$$B_1 = 1 + \frac{5 \alpha^2}{12}; \quad B_2 = 1 + \frac{5 \beta^2}{12}$$

$$\alpha = \frac{a}{h_e}, \quad \beta = \frac{b}{h_e}, \quad \chi = \frac{G_m h_m}{G_e h_e}$$

a, b, h<sub>e</sub>, h<sub>m</sub> – ģeometriskie parametri gumijas un neelastomēra slānim;

G<sub>e</sub>, G<sub>m</sub> – bīdes modulis katram slānim;

n – slāņa numurs

Ja gumijas un neelastomēra slāņiem ir dažādi izmērī, gumijas slānis ir „biezs”, tas ļauj mums neievērot gumijas vāju saspiežamību, un ja neelastomēra slāņa ģeometriskie izmēri un fizikāli - mehāniskās īpašības ir (h<sub>e</sub> < h<sub>m</sub>, G<sub>e</sub> << G<sub>m</sub>, t.i. parametrs  $\chi \rightarrow \infty$ ), tad varam neievērot starpslāņa deformāciju. Šai gadījumā var vienkāršot formulu (2.83), un to pierakstīt šādā veidā:

$$\Delta_0 = \frac{P h n}{2,5 G ab} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (2.84)$$

Atrisinājums (2.84) pilnīgi sakrīt ar atrisinājumu, kurš ir pieejams literatūrā [86], un kurš neievēro gumijas vāju saspiežamību un starpslāņa deformāciju.

## 2.6. Variācijas metodes risinot robežproblēmu elastomēra izstrādājumiem ar sarežģītu konstrukcijas formu

Vāji saspiežamu materiālu (2.7) - (2.12) robežproblēmas risinājumu, konkrētāk, nosakot gumijas-tehnisko izstrādājumu stinguma raksturotājus, efektīvāk ir meklēt pārvietojumos ar variācijas metodi, izmantojot deformācijas potenciālās enerģijas minimuma principu  $\Pi(u_i, s)$  (2.13). Tas ir saistīts ar to, ka:

- ir vienkāršāk piemeklēt nepārtrauktas aproksimējošās funkcijas pārvietojumiem  $u_i$ , izpildot obligātos ģeometriskos robežnosacījumus, nekā spriegumu funkcijas, jo prognozēt sagaidāmo deformācijas stāvokli elastomēra slānī ir "vieglāk", nekā nospriegoto stāvokli;

- hidrostatiskā spiediena funkcijai  $s$ , izņemot nepārtrauktības nosacījumu, netiek uzlikti nekādi papildu nosacījumi;

- atrastajam tuvinātajam raksturojumam "spēks-pārvietojums" vienmēr ir pazemināts pārvietojuma lielums. Tas ir papildu "pluss" izmantotajai tuvinātajai aprēķinu metodei.

Detalām ar sarežģītu konfigurāciju vai/un sastāvošiem no labi kontaktējošām daļām, kas izgatavotas no dažādiem materiāliem, kuru deformācija ir jāņem vērā aprēķinu laikā, šīs metodes izmantošana funkcionālim  $\Pi(u_i, s)$  (2.13) kļūst apgrūtināta tādu problēmu dēļ, kas saistītas ar koordinātu funkciju izvēli pārvietojumiem  $u_i$  un hidrostatiskam spiedienam  $s$ , kas ir nepārtraukti visā sarežģītā izstrādājuma tilpumā. Viens no risinājuma paņēmieniem ir aplūkojamā sarežģītā apgabala sadalīšana vienkāršos apakšapgabalos. Taču šādā gadījumā nākas ievērot pārvietojumu  $u_i$ , to atvasinājumu  $u_{i,j}$  un hidrostatiskā spiediena  $s$  nepārtrauktības nosacījumu, pārejot apgabala sadalījuma robežu. Praktiski tas noved pie liela aprēķinu apjoma vai pat pie meklējamo funkciju izvēles neiespējamības. Šādiem uzdevumiem, izmantojot variāciju metodi - deformācijas  $\Pi(u_i, s)$  potenciālās enerģijas minimuma principu, ir jāatrod paņēmieni, kas ļauj vājināt meklējamo funkciju nepārtrauktības prasības uz sadalījuma virsmām.

Vispārīgie tiešo aprēķinu metožu teorētiskie nosacījumi, izmantojot funkcionāļus, kas ļauj vājināt nepārtrauktības prasības vispildīgāk ir aplūkoti V. Pragera darbā [108].

### 2.6.1. Robežproblēma vāji saspiežamam materiālam, izmantojot pārtraukuma funkciju

Visbiežāk robežproblēmu vāji saspiežamam materiālam meklē pārvietojumos, t.i., risina vienādojumu sistēmu:

- līdzsvara vienādojumi:

$$G \left[ \nabla^2 u_i + \frac{3}{2(1+\mu)} s_i \right] + f_i = 0 \quad \text{uz } V \quad (2.76)$$

- telpiskā deformācija:

$$u_{j,j} = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s \quad \text{uz } V \quad (2.77)$$

- deformācijas komponentes  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.78)$$

- spriegumu komponentes  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = G \left[ u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \delta_{ij} \right], \quad (2.79)$$

- spēka robežnosacījumi:

$$G \left[ u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \delta_{ij} \right] n_j = p_i \quad \text{uz } F_\sigma, \quad (2.80)$$

- ģeometriskie robežnosacījumi:

$$u_i = u_{oi} \quad \text{uz } F_u, \quad (2.81)$$

kur  $f_i$  – tilpuma spēku komponentes;  
 $u_i$  – pārvietojumu komponentes;  
 $G$  – gumijas bīdes modulis;  
 $\sigma_{ij}$  – sprieguma komponentes;  
 $u_i$  – pārvietojumu komponentes;  
 $s$  – hidrostatiskā spiediena funkcija;

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{pie } i = j \\ 0, & \text{pie } i \neq j \end{cases};$$

$i, j = 1, 2, 3$  vai  $x, y, z$ ;

$\mu$  – Puasona koeficients.

Sadalīsim izstrādājuma sarežģītu tilpumu u vienkāršos apakšapgabalos:

$$V = \sum_{n=1}^N V_n, \quad (2.82)$$

kur  $V_n$  – apakšapgabali, kas rodas konstrukcijas dalīšanas rezultātā;

$N$  – apakšapgabalu skaits, kas iegūts  $V$  dalīšanas rezultātā .

Virsmas, kura atdala katru apakšapgabalu ir:

$$F_n = F_\sigma^n + F_u^n + \Gamma_n \quad (2.83)$$

kur  $F_\sigma^n$  – slodzes virsma;

$F_u^n$  – nostiprināšanās virsma;

$\Gamma_n$  – saskares (sadališanas) virsma.

Uz saskares virsmas  $\Gamma_n$  ir nepieciešams, lai izpildītos nepārtrauktības nosacījumi pārvietojumiem un slodzēm:

$$u_i^n = u_i^{n+1} \text{ uz } \Gamma_n \quad (2.84)$$

$$G^n \left[ u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu^n}{1+\mu^n} s^n \delta_{ij} \right] m_j^n = -G^{n+1} \left[ u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + \frac{3\mu^{n+1}}{1+\mu^{n+1}} s^{n+1} \delta_{ij} \right] m_j^{n+1} \text{ uz } F, \quad (2.85)$$

kur indekss „n” norāda sadalīto apakš apgabalu tekošo numuru;

$m_j^n$  un  $m_j^{n+1}$  - ārējās kosinusa normāles virziens, attiecīgi  $V_n$  un  $V_{n+1}$  uz  $\Gamma_n$  un  $\Gamma_{n+1}$ .

Ja izmanto tikai ārējo normāli uz  $V_n$ , kura uz  $\Gamma_{n+1}$  priekš  $V_{n+1}$  būs iekšēja, tad:

$$m_j^{n+1} = - m_j^n \quad (2.86)$$

Tad funkciju (2.85) uz  $\Gamma_n$  var pārrakstīt :

$$G^n \left[ u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu^n}{1+\mu^n} s^n \delta_{ij} \right]^n m_j^n = G^{n+1} \left[ u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + \frac{3\mu^{n+1}}{1+\mu^{n+1}} s^{n+1} \delta_{ij} \right]^{n+1} m_j^n \quad (2.87)$$

Virsmas  $\Gamma_n$  var būt:

- mākslīgas, saistībā ar ģeometrisku sadalīšanu V;
- dabiskas, ja mehāniskie vides raksturojumi (bīdes modulis - G, Puasona koeficients -  $\mu$ ), sadalās uz virsmas  $\Gamma_n$ , tas ir, ja V sastāv no dažādiem materiāliem.

Sadalīšanas virsmu ieviešana ļauj paplašināt pieļaujamo salīdzināšanas funkciju klasi uz gabal-gludiem un gabal-nepārtrauktiem ar gabal-gludiem vai gabal-nepārtrauktiem ar patvaļīgajiem [108].

Sadalot apgabalu apakšapgabalos, elastības teorijas vienādojumu sistēmai (2.76) - (2.80) katrā apakšapgabalā ir nepieciešams pievienot pārvietojumu  $u_i^n$  nepārtrauktības nosacījumu (2.84) un spēku nosacījumus (2.87) uz sadalošām virsmām  $\Gamma_n$ .

### 2.6.2. Funkcionālis pārtrauktu pārvietojuma un sprieguma funkciju izmantošanai

V. Pragera [108] aplūkotā metode bez īpašām grūtībām darbojas vājas saspiežamības gadījumos un nespiežamības gadījumos priekš funkcionāliem  $\Pi(u_i, s)$  [86], kas tika iegūti izmantojot pilnas potenciālās enerģijas minimuma principu.

Apzīmējam lēcieni uz  $\Gamma_n$  pārvietojumiem un spēkiem:

$$u_i^n - u_i^{n+1} = \{u_i^n\} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} G^n [u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu^n}{1+\mu^n} s^n \delta_{ij}] m_j^n - G^{n+1} [u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + \frac{3\mu^{n+1}}{1+\mu^{n+1}} s^{n+1} \delta_{ij}] m_j^n = \\ = \left\{ G [u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \delta_{ij}]^n m_j^n \right\} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Katrā no sadalošiem apakšapgabaliem visām meklējamajām funkcijām jābūt nepārtrauktām un diferencējamām. Pieņemam, ka uz sadalošām virsmām  $\Gamma_n$ , dažas slodzes komponentes un pievienotās pārvietojumu komponentes neapmierina nepārtrauktamības nosacījumus. Pie pieņemtajiem sadalījumiem no (2.88) - (2.89):

$$\left\{ G^n [u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \delta_{ij}]^n m^n_j u_i^n \right\} = \left\{ \sigma_{ij}^n m^n_j \right\}' u_i^n + \sigma_{ij}^n m^n_j \left\{ u_i^n \right\}'' , \quad (2.90)$$

Kur svītra { ' } un dubultsvītra { '' } norāda, ka summēšana attiecas tikai uz tām spēku  $\sigma_{ij}^n m^n_j$  un pārvietojumu  $u_i^n$  komponentēm, kuras neapmierina nepārtrauktamības nosacījumus uz  $\Gamma_n$ .

Izmantojot V. Pragera [108] procedūru, deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma principam uz funkcionāļa  $\Pi(u_i, s)$  (2.13) bāzes, variējot tikai pārvietojumus  $u_i$  un hidrostatiskā spiediena funkcijas  $s$ , varam iegūt vairākus funkcionāļus, kurus var izmantot ar pārtrauktām funkcijām pārvietojumiem un spēkiem, ja pētāmais tilpums tiek aplūkots kā vienkāršāku tilpumu summa.

### Variants Nr.1

Pieņemsim, ka:

- pārvietojumu  $u_i$  funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$  un izpilda nepārtrauktības nosacījumus  $u_i^n = u_i^{n+1}$  (2.84) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  un izpilda obligātos ģeometriskos robežnosacījumus uz virsmām  $F_u^n$ ;

-hidrostatiskā spiediena funkcijas  $s$  ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$ .

Tad funkcionālim

$$\Pi_1(u_i, s) = \sum_{n=1}^N \Pi^n(u_i^n, s^n), \quad (2.91)$$

kur  $\Pi^n(u_i^n, s^n)$  - vāji saspiežama materiāla funkcionālis(2.13):

$$\begin{aligned} \Pi^n(u_i^n, s^n) = G^n \int_V \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j}^n u_{j,i}^n + u_{i,j}^n u_{j,i}^n) + \frac{3\mu^n}{1+\mu^n} s^n u_{i,i}^n - \frac{9(1-2\mu^n)}{4(1+\mu^n)^2} s^{n2} \right] dV_n - \\ - \int_{V_n} f_i u_i^n dV_n + \int_{F_\sigma} p_j u_j^n dF_u \end{aligned} \quad (2.92)$$

stacinaoritātes nosacījumu var pierakstīt šādā veidā:

$$\begin{aligned}
& \delta \Pi_1(u_i, s) = \\
& = \sum_1^N \int_V \left\{ -G \left( \nabla^2 u_i^n + \frac{3}{2(1+\mu)} s_i + f_i \right) \delta u_i^n + \frac{3\mu G}{1+\mu} \left[ u_{i,i}^n - \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s^n \right] \delta s^n \right\} dV_n - \\
& \quad - \int_{F_G} \left[ p_i - G \left( u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij} \right) n_j^n \right] \delta u_i^n dF + \\
& \quad + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \delta u_i^n - G(u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + \frac{3\mu}{1+\mu} s^{n+1} \delta_{ij}) m_j \delta u_i^n \right] d\Gamma_n = 0
\end{aligned} \tag{2.93}$$

No vienādojuma (2.93), ņemot vērā izpildītos nosacījumus, funkcijām  $u_i$  un  $s$  izriet vienādojumi (2.76), (2.77) un (2.80) un nepārtrauktības nosacījums spēkiem (2.87) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ . Tādēļ, izmantojot funkcionāli  $\Pi_1(u_i, s)$  (2.91), izvēloties funkcijas  $u_i$  un  $s$ , nav nepieciešams, lai izpildītos spēku nepārtrauktības nosacījums (2.87) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ , kuras kļūst par dabiskiem robežnosacījumiem uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ . Pietiek, ja tiek izpildīti nepārtrauktības nosacījumi pārvietojumiem. Hidrostatiskā spiediena funkciju katrā apakšapgabalā var izvēlēties neatkarīgi.

### Variants Nr.2

Pieņemsim, ka:

- pārvietojumu funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$ , un izpilda obligātus ģeometriskos robežnosacījumus uz virsmas  $F_u^n$ , bet neizpilda nepārtrauktības nosacījumu pārvietojumiem (2.84) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ ;

-hidrostatiskā spiediena funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$  ;

- saskaņā ar (2.87), funkcijas  $u_i$  un  $s$  izpilda nepārtrauktības nosacījumu uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ .

Tad funkcionālim

$$\Pi_2(u_i, s) = \sum_{n=1}^N \Pi^n(u_i^n, s^n) + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n (u_i^n - u_i^{n+1}) \right] d\Gamma_n \tag{2.94}$$

kur  $\Pi^n(u_i^n, s^n)$  - funkcionālis (2.92),

stacionaritātes nosacījums tiek pierakstīts šādā veidā:

$$\begin{aligned}
& \delta \Pi_2(u_i, s) = \\
& \sum_{n=1}^N \int_V \left\{ -G \left( \nabla^2 u_i^n + \frac{3}{2(1+\mu)} s^{n,i} + f_i \right) \delta u_i^n + \frac{3\mu}{1+\mu} G \left[ u_{i,i}^n - \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s^n \right] \delta s^n \right\} dV_n - \\
& - \int_{F_G} \left[ p_i - G \left( u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij} \right) n_j^n \right] \delta u_i^n dF_n + \\
& + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \delta(u_i^n - u_i^{n+1}) \right] d\Gamma_n = 0 \quad (2.95)
\end{aligned}$$

No vienādojuma (2.95), ņemot vērā izpildītos nosacījumus, funkcijām  $u_i$  un  $s$  izriet vienādojumi (2.76), (2.77) un (2.80) un nepārtrauktības nosacījums pārvietojumiem (2.84) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ . Tādēļ, izmantojot funkcionāli  $\Pi_1(u_i, s)$  (2.94), izvēloties funkcijas  $u_i$  un  $s$ , nav nepieciešams, lai izpildītos pārvietojumu nepārtrauktības nosacījums (2.84) uz sadalījuma virsmām, kuras kļūst par dabiskiem robežnosacījumiem uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ . Pietiek ar funkciju  $u_i$  un  $s$  izvēli izpildīt spēku nepārtrauktības nosacījumu (2.87). Hidrostatiskā spiediena funkciju katram apakšapgabalam var izvēlēties daļēji neatkarīgi, ņemot vērā, ka kopā ar pārvietojumu funkcijām izpilda arī spēku nepārtrauktības nosacījumus (2.87).

### Variants Nr.3

Pieņemsim, ka:

- pārvietojumu funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$ , un izpilda obligātus ģeometriskos robežnosacījumus uz virsmas  $F_u^n$  un uz dažām sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  izpilda pārvietojuma nepārtrauktības nosacījumus  $u_i^n = u_i^{n+1}$  (2.84),

-hidrostatiskā spiediena funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$  ;

-funkcijas  $u_i$  un  $s$  izpilda nepārtrauktības nosacījumus spēkiem (2.87) uz tām sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ , uz kurām nav izpildītas pārvietojumu nepārtrauktības nosacījumi (2.84).

Tad funkcionālim

$$\begin{aligned}
\Pi_3(u_i, s) = & \sum_{n=1}^N \Pi^n(u_i^n, s^n) + 0,5 \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ \left\langle G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \right\rangle' u_i^n - \right. \\
& \left. - G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \langle u_i^n \rangle^n \right] d\Gamma_n, \quad (2.96)
\end{aligned}$$

kur  $\Pi^n(u_i^n, s^n)$  - funkcionālis (2.92)

stacinaoritātes nosacījums pierakstās veidā:

$$\begin{aligned}
& \delta \Pi_3(u_i, s) = \\
& \sum_1^N \int_V \left\{ -G \left( \nabla^2 u_i^n + \frac{3}{2(1+\mu)} s^{n,i} + f_i \right) \delta u_i^n + \frac{3\mu}{1+\mu} G \left[ u_{i,i}^n - \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s^n \right] \delta s^n \right\} dV_n - \\
& - \int_{F_G} \left[ p_i - G \left( u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij} \right) n_j^n \right] \delta u_i^n dF_n + \\
& + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ \langle G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \rangle' \delta u_i^n \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ \langle (u_i^n - u_i^{n+1}) \rangle'' \delta (G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n) \right] d\Gamma_n = 0 \tag{2.97}
\end{aligned}$$

Labvēlīgu apstākļu gadījumā funkcijām  $u_i$  un  $s$ , no (2.96) izriet vienādojumi (2.76), (2.77) un (2.80) un nepārtrauktības nosacījums pārvietojumiem (2.84) uz daļas sadalījuma  $\Gamma_n$  virsmas, uz kurām izpildīti spēku nepārtrauktības nosacījumi (2.87) un spēku nepārtrauktības nosacījumi (2.87) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ , uz kurām izpildīti pārvietojumu nepārtrauktības nosacījumi (2.84). Tādēļ, izmantojot funkcionāli  $\Pi_3(u_i, s)$  (2.96), var, izvēloties funkcijas  $u_i$  un  $s$ , uz vienām sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  izpildīt nepārtrauktības nosacījumus pārvietojumiem (2.84), bet uz citām (atlikušām) sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  izpildīt nepārtrauktības nosacījumu spēkiem (2.85).

#### Variants Nr.4

Pieņemsim, ka:

- pārvietojumu funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$ , un izpilda obligātus ģeometriskos robežnosacījumus uz virsmas  $F_{un}$  un neizpilda nepārtrauktības nosacījumus pārvietojumiem  $u_i^n = u_i^{n+1}$  (2.84) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  ;

-hidrostatiskā spiediena funkcijas ir nepārtrauktas katrā sadalījuma apakšapgabalā  $V_n$  ;

- funkcijas  $u_i$  un  $s$  neizpilda nepārtrauktības nosacījumu spēkiem (2.87) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ .

Tad funkcionālim

$$\begin{aligned} \Pi_4(u_i, s) = & \sum_{n=1}^N \Pi^n(u_i^n, s^n) - \\ & 0.5 \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ \left( G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \right) + \left( G(u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + \frac{3\mu}{1+\mu} s^{n+1} \delta_{ij}) m_j^n \right) \right] - \\ & (u_i^n - u_i^{n+1}) d\Gamma_n \end{aligned} \quad (2.98)$$

kur  $\Pi^n(u_i^n, s^n)$  - funkcionālis (2.92)

stacionaritātes nosacījums pierakstās veidā:

$$\begin{aligned} \Pi_4(u_i, s) = & \sum_1^N \int_V \left\{ -G \left( \nabla^2 u_i^n + \frac{3}{2(1+\mu)} s^{n,i} + f_i \right) \delta u_i^n + \frac{3\mu}{1+\mu} G \left[ u_{i,i}^n - \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s^n \right] \delta s^n \right\} dV_n - \\ & - \int_{F_G} \left[ p_i - G \left( u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij} \right) n_j^n \right] \delta u_i^n dF_n + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ \left( G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n - G(u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + \frac{3\mu}{1+\mu} s^{n+1} \delta_{ij}) m_j^n \right) \delta(u_i^n - u_i^{n+1}) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Gamma_n} \left[ \langle (u_i^n - u_i^{n+1}) \rangle^n \delta \left( G(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + \frac{3\mu}{1+\mu} s^n \delta_{ij}) m_j^n \right) \right] d\Gamma_n = 0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

Pieņemtos nosacījumos funkcijām  $u_i$  un  $s$ , no stacionāruma nosacījuma (2.98) funkcionālim  $\Pi_4^n(u_i^n, s^n)$  izriet vienādojumi (2.76), (2.77) un (2.80), nepārtrauktības nosacījums pārvietojumiem (2.84) un nepārtrauktības nosacījumi spēkiem (2.87) uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$ . Tādēļ, izmantojot funkcionāli  $\Pi_4(u_i, s)$  (2.98), var, izvēloties funkcijas  $u_i$  un  $s$ , uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  nepildīt nedz nepārtrauktības nosacījumus pārvietojumiem (2.84), nedz nepārtrauktības nosacījumus spēkiem (2.84), jo tie ir dabiski funkcionālim  $\Pi_4(u_i, s)$  (2.98).

Ideja sadalīt apgabalu  $V$  apakšapgabalos un tai pašā laikā nepildīt vai daļēji izpildīt pārvietojumu un spēku nepārtrauktības nosacījumus uz sadalījuma virsmām  $\Gamma_n$  ļauj izveidot vispārīgas metodes sarežģītu izstrādājumu aprēķināšanai. Šīm metodēm atkrīt nepieciešamība izmantot sarežģītas funkcijas, bet risinājuma precizitāte tiek panākta, ieviešot pietiekamu sadalījuma apakšapgabalu skaitu.

## 2.7. Gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķins vidējo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību, izmantojot Delta-metodi

Diezgan bieži gumijas-tehniskie izstrādājumi, konkrētāk, dažādas konfigurācijas amortizatori tiek lietoti ne tikai mazu, bet arī vidēju deformāciju (no 40% - 50%) jomā. Šajā nodaļā piedāvāta gumijas - tehnisko izstrādājumu tuvināta aprēķina metode vidēju deformāciju gadījumā nespiežamam elastomēra materiālam, kas ieguvusi nosaukumu – delta metode. Šī metode ļauj gūt risinājumu uzdevumiem vidēju deformāciju gadījumā, balstoties uz lineārās elastības teorijas rezultātiem nespiežamam materiālam.

Daudzās publikācijās [44], [45], [60], [89], [105], [107] kas balstītas uz plaša eksperimentālā materiāla analīzi, kas saistīts ar elastomēru viendabīgu gala deformāciju pētījumiem, noteikta praktiskiem pielietojumiem un analītiskiem aprēķiniem svarīga elastomēru uzvedības īpatnība. Šāda sloģojuma gadījumā elastomēriem novērojams pagarinājumu kārtības apgabals  $1 \leq \lambda = l \pm \Delta / h \leq \lambda_m$  (kur:  $\Delta$  un  $h$ , atbilstoši, parauga pārvietošana un ģeometriskais parametrs ārējā spēka darbības virzienā; «+» - izstiepšana, «-» - saspiešana), kur ir lineāra sakarība starp spriegumiem  $\sigma$  un pagarinājumu kārtībām  $\lambda$ .  $\lambda_m$  robežvērtības, kurām pastāv noteiktā lineārā atkarība  $\sigma(\lambda)$ , dažādām elastomēru markām un elastomēru deformāciju veidiem atšķiras. Šādu atkarību pastāvēšanas apgabala  $\lambda_m$  robežvērtības - vidējo deformāciju apgabals, kuru ierobežo lielumi:  $\lambda_m \leq 2$  (deformācijas līdz 100%) izstiepšanās gadījumā un  $\lambda_m \leq 0,6-0,5$  (deformācijas 40%-50%) saspiešanas gadījumā.

Eksperimentāli novērojamā vidējo viendabīgo deformāciju jomā lineārā atbilstība starp spriegumiem un pagarinājuma kārtībām ļauj izdarīt pieņēmumu par iepriekš noslogota elastomēra ķermeņa lineāro elastīgumu neatkarīgi no noslogojuma līmeņa, kas pieņemts par sākotnējo: vienādi spriegumu palielinājumi elastomēra ķermenī radīs vienādus palielinājumus tā deformācijā. Tas ļaus veikt noteiktas klases gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķinus vidēju deformāciju jomā ar delta - metodes palīdzību [72]. Šai metodei, līdzās tās nosacītajai vienkāršībai, piemīt svarīga priekšrocība - par sākotnējo risinājumu var ņemt jau iegūto, pie tam ar jebkādu metodi, risinājumu mazo deformāciju jomā. Saskaņā ar deformācijas pārklāšanās principu, elastomēriem mazo deformāciju apgabals,  $\varepsilon \leq 10\%-15\%$ , ir diezgan liels. Gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķinus vidējo deformāciju jomā, iegūstot atkarības "spēks-pārvietojums", ir ērtāk veikt pārvietojumos.

Vispārīgā gadījumā, gumijas - tehniskajam izstrādājumam pirms ekspluatācijas var būt un var nebūt iepriekšējas deformācijas. Pieņemsim par izejas stāvokli elastomēra stāvokli ar

iepriekšējām deformācijām, ar sākotnējiem pārvietojumiem  $u_i^0$ , hidrostatisko spiedienu  $s^0$ , ar sākotnējām deformācijām  $\varepsilon_{ij}^0$  un spriegumiem  $\sigma_{ij}^0$ . Pieņemsim, ka katra nākamā (k-tā) noslodzes pakāpe tiek aprakstīta ar diezgan mazu ārējā spēka pieauguma lielumu ( $\delta P_k$ ). Iepriekš deformēta elastomēra tālākās deformācijās katrā noslodzes etapā ar spēku  $\delta P_k$  tajā radīsies papildu mazi pārvietojumu  $\delta u_i^k$  un hidrostatiskā spiediena  $\delta s_k$  palielinājumi, tātad arī mazi papildus deformāciju  $\delta \varepsilon_{ij}^k$  un spriegumu  $\delta \sigma_{ij}^k$  palielinājumi.

Elastomēra slāņa kopējo spriegoti - deformēto stāvokli pēc pēdējā (n-tā) noslodzes posma nosaka brīvās iepriekšējās deformācijas un mazā papildus deformācija no katra noslodzes soļa summa:

$$u_{i\Sigma} = u^0 + \sum_{k=1}^n \delta u_i^k \quad (2.100)$$

$$s_\Sigma = s^0 + \sum_{k=1}^n \delta s^k$$

$$\varepsilon_{ij\Sigma} = \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ij}^k, \quad (2.101)$$

$$\sigma_{ij\Sigma} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{k=1}^n \sigma_{ij}^k$$

Sākotnējo deformāciju  $\varepsilon_{ij}^0$  mazuma pieņēmumā attiecības (2.100) un (2.101) var tikt aplūkoti kā sekas elastības teorijā zināmajam mazo deformāciju pārklāšanās principam [71], [72]. Šajā gadījumā, izmantojot risinājumus mazām deformācijām, uz to bāzes, var iegūt nelineāro uzdevumu risinājumu (vidējo deformāciju apgabalā), secīgi summējot pēc formulām (2.100) un (2.101) atbilstošus lineāro uzdevumu risinājumu pieaugumus meklējamām funkcijām. Uz šī pamata darbos [71], [72] piedāvāta delta metode gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķinam (pieņēmumā par elastomēru nesaspiežamību), kas darbojas vidēju deformāciju gadījumā. Piedāvāto gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķina metodi var apkopot, lai ņemtu vērā vāju elastomēru saspiežamību.

Tā kā elastomēru mazo deformāciju apgabals ir diezgan liels [44], [86] ( $\varepsilon \leq 10\%-15\%$ ), risinot uzdevumus vidēju deformāciju gadījumā, jāņem vērā ģeometriskā nelinearitāte - deformējamo izstrādājumu virsmas laukumu izmaiņas, aprēķinot uz tiem darbojošos spēkus. Delta metodē izmanto secīgu mazu deformāciju uzklāšanu mazām deformācijām, vienlaicīgi ņemot vērā slodžu secību un to radītās izstrādājuma deformētās konfigurācijas izmaiņas.

Tādēļ, nosakot deformāciju  $\delta \varepsilon_{ij}^k$  un spriegumu  $\delta \sigma_{ij}^k$  palielinājumu katrā iepriekš deformēta elastomēra noslodzes posmā, var tikt izmantotas lineāras fiziskās sakarības (2.7) –(2.12):

$$\delta \sigma_{ij}^k = G \left( 2 \delta \varepsilon_{ij}^k + \frac{3}{2(1+\mu)} \delta s^k \delta_{ij} \right) \quad (2.102)$$

$$\delta \varepsilon_{ii}^k = \delta u_{i,i}^k = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \delta s^k \quad (2.103)$$

Izteiksmēs (2.102) lielums  $\delta s^k$  nosaka hidrostatiskā spiediena funkcijas pieaugumu k-tā noslodzes posmā vāji saspiežamai videi.

Šāds aprēķinu variants vidēju deformāciju gadījumā ir patiess tad, ja katrā noslodzes posmā fiziskās attiecības nav īpašas atkarības no iepriekšējo noslodžu līmeņa, kuras raksturo sākotnējās (iepriekšējās) slodzes  $\delta \sigma_{ij}^o$  (vai pārvietojumi  $\delta u_i^o$ ), kas ir obligāts nosacījums, lai būtu iespējams izmantot attiecības (2.102) starp spriegumu un deformāciju palielinājumiem.

Veicot spriegumu palielinājumu aprēķinus pēc formulām (2.102) un pēc tam aprēķinot pēc tām spēkus, kas pielikti deformējamam gumijas tehniskajam izstrādājumam, jāzina vien iepriekš nospriegotā ķermeņa ģeometriskā konfigurācija. Šis delta - metodes variants ir vienkāršs realizācijas ziņā, un to var izmantot, ja var neņemt vērā iepriekšējās noslodzes vēsturi, kā tas arī ir lielai gumijas tehnisko izstrādājumu grupai. Aprēķina posmi vispārīgā gadījumā pēc delta - metodes:

- pieņemsim, ka iepriekšējā noslogojuma nav, vai tas neietekmē izstrādājuma konfigurācijas izmaiņas šādos tā noslogojuma gadījumos:

- sadalām visu izstrādājuma uzdoto noslogojumu diapazonu  $n$  soļos;

- soļa lielumu izvēlētajā noslogojumu secībā (par pārvietojumiem vai sloģojumiem) izvēlamies tik mazu, lai varētu katrā sloģojuma posmā, ņemot vērā izstrādājuma konfigurāciju, uzskatīt elastomēra deformācijas par mazām.

Pirmajā solī ( $k = 1$ ) tiek risināts uzdevums par iepriekš nedeformēta (nenoslogota) izstrādājuma mazām deformācijām, un tiek noteikta tā deformētā konfigurācija. Katrā nākamajā solī ( $1 < k \leq n$ ) tiek risināti arī lineārie uzdevumi par mazām deformācijām ar ģeometrisku konfigurāciju, kuru nosaka iepriekšējā noslogošanas posmā. Aprēķins beidzas, kad noslodžu (pārvietojuma un noslodžu) secība sasniedz fiksētu galīgo lielumu. Šis algoritms prasa katrā posmā secīgu gumijas tehniskā izstrādājuma konfigurācijas pārrēķināšanu, kas būtiski apgrūtina risinājuma iegūšanu analītiskā veidā. Tomēr daudziem gumijas tehniskajiem izstrādājumiem izrādās iespējama pāreja no rezultātu summēšanas pa visiem noslogošanas

posmiem uz integrēšanu, iegūstot analītisku izteiksmi stinguma raksturojumam "spēks - pārvietojums". Konkrētāk, tas ir patiens vairumam kompensatoru, iegūstot atkarību „spēks–pārvietojums”  $P(\Delta)$ . K-tajam noslodzes posmam jāiegūst rekurenta atkarība „spēks – pārvietojums”:

$$P_k = \delta \varphi_k(\beta, \alpha_k), \quad \delta = \frac{\Delta}{n}, \quad P_k = \frac{P}{n}, \quad (2.104)$$

kur  $n$  - aprēķina soļu skaits;

$\varphi_k$  – funkcija, kurā ietilpst izstrādājuma ģeometriskie parametri  $\beta$ , kuri nemainās visos noslogojuma soļos, un ģeometriskie parametri  $\alpha_k$ , kas mainās katrā noslogojuma solī.

Parametri  $\alpha_k$  un funkcijas  $\varphi_k(\beta, \alpha_k)$  ir atrisinājums katrā etapā. Ja atkarības (2.104) ļauj summēšanu aizstāt ar integrēšanu, tad no

$$P = \sum_{k=1}^n P_k = \int_0^{\Delta} dP = \int_0^{\Delta} \bar{\varphi}(\beta, \bar{\alpha}) d\delta \quad (2.105)$$

iegūstam analītisku formulu „spēks– pārvietojums” vidēju amortizatora deformāciju gadījumā.

Tāpat kā mazo deformāciju gadījumā, tā arī vidēju deformāciju gadījumā, pietiekami plāniem elastomēru slāņiem (vai masīvām gumijas tehniskajām detaļām ar relatīvi nelielām elastomēra masīva brīvām sānu virsmām) jāņem vērā elastomēra vājā saspiežamība. Lai iegūtu risinājumu mazām deformācijām katrā noslodzes ar mazām slodzēm posmā, ir ērti izmantot Ritca metodi ar funkcionāli (2.22), kuru pierakstīsim šādi:

$$U = \int_V (J_1(u_i) + J_2(u_{i,i}, s)) dV - \int_{F_\sigma} p_i u_i dF \quad (2.106)$$

$$J_1(u_i) = G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.107)$$

$$J_2(u_{i,i}) = G \left[ \frac{3\mu}{1+\mu} s \varepsilon_{ii} - \frac{9(1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} s^2 \right] \quad (2.108)$$

kur  $s$  - hidrostatiska spiediena funkcija;

$G$  - bīdes modulis;

$\mu$  - Puasona koeficients;

- $\varepsilon_{ij}$  - deformācijas;
- $p_i$  – uzdoto ārējo spēku intensitāte;
- $u_i$  - pārvietojumu funkcija;
- $F_\sigma$  - ķermeņa virsma, kurā darbojas ārējie spēki;
- $V$  - ķermeņa tilpums.

Delta - metodē katrā  $k$  – ja solī funkcionālā (2.106) jāintegrē lokālā koordinātu sistēmā, pēc deformējamās konfigurācijas veic ķermeņa formas pārrēķinu ( $k - 1$ ) etapa. Tas noved pie sarežģītiem aprēķiniem, kuri dažreiz neļauj iegūt galīgu atrisinājumu analītiskā formā. Būtu labi, ja mēs varētu integrēt pēc parastas, nedeformētas ķermeņa konfigurācijas, kura ir pirmajā solī. Aplūkosim nosacījumus, kad mēs to varam darīt. Izvēlamies par atskaites sākumu ķermeņa nedeformētu konfigurāciju, pirmajā solī ( $k = 1$ ), kura ir aprakstīta ar koordinātes sistēmu  $x_{k=1q}$  ( $q = 1, 2, 3$  – koordināšu sistēmas indeksi).  $k$  – ja etapā deformēta ķermeņa konfigurācija tika aprakstīta ar lokālu koordinātes sistēmu:

$$x_{kq} = x_{k=1q} + \sum_{k=1}^{k-1} u_{qk} \quad (2.109)$$

Saskaņā ar mainīgo apmaiņu kārtas integrāļos:

$$\int_{V_{k-1}} [J_1(u_{ik}) + J_2(u_{i,ik}, s_k)] dV_k = \int_{V_1} [J_1(u_{ik}) + J_2(u_{i,ik}, s_k)] D(X_{1q}) dV, \quad (2.110)$$

kur  $D(X_{1q}) = D(x_{k=1q} + \sum_{k=1}^{k-1} u_{qk}) / D(x_{k=1q})$  – jakobians [13] funkcijai (2.109), kurš ģeometriski raksturo tilpuma maiņu ķermenī transformēšanas laikā. Nesaspiežamam materiālam [13] šis jakobians ir vienāds ar vieninieku. Tādēļ nesaspiežamam materiālam, ja pārvietojumu funkcijas  $u_i$  izvēles laikā izpildās nesaspiežamības nosacījums  $\varepsilon_{ii} = u_{i,i} = 0$ , tad Delta-metodē  $k$ -tajā noslogojuma posmā funkcionāļa (2.106) vietā iegūstam funkcionāli

$$U_I = \int_{V_1} J_1(u_i^k) dV_1 - \int_{F_\sigma} p_{ik} u_{ik} dF \quad (2.111)$$

un aizstājot, atbilstoši (2.104) summēšanu ar integrēšanu, integrēšana jāveic pa sākotnēji nedeformētu, nenoslogotu amortizatora virsmu, kas būtiski vienkāršo visus izklāstus, jo ļauj nepārrēķināt elastomēra slāņa nenoslogotas virsmas konfigurāciju katrā aprēķinu posmā. Jāņem vērā tikai kompensatora konfigurācijas izmaiņas ārējā spēka darbības virzienā.

Aprēķinot gumijas tehnisko izstrādājumu stinguma raksturojumus, tips "spēks – pārvietojums" pēc Ritca metodes, ņemot vērā vājo elastomēra saspiežamību, jāizmanto funkcionāli (2.106). Ja jau ir risinājums nesaspiežamam materiālam, kas iegūts ar jebkādu metodi, tad novērtēt elastomēra vājas saspiežamības efektu uz kompensatora raksturojumu "spēks - pārvietojums" var ar šādiem diviem tuvinātiem paņēmieniem. Konkretizācijai, aplūkosim kompensatora asu saspiešanu ar spēku P, kas darbojas paralēli asij z.

Pirmā variantā [11], [86] ja ir atrasts atrisinājums un pārvietojums  $\Delta_o^k$  bez elastomēra slāņa vājas saspiežamības ievērošanas, tad no fiziskām sakarībām starp deformācijām un spriegumiem telpiskai deformācijai elastomēra vājas saspiežamības dēļ, ņemot vērā (2.8) un (2.9), ieguvām sakarību:

$$\int_{V_1} u_{i,i}^k V_1 = -\frac{1-2\mu}{\mu} \int_0^h \left( \frac{P}{2G} + \int_{F_\sigma} \frac{\partial u_z^k}{\partial z} dF_\sigma \right) dz, \quad (2.112)$$

kur  $F_\sigma^k$  - ķermeņa laukums, uz kuru pielikts ārējais slodījums;

$h^k$  - elastomēra slāņa biezums;

$u_z^k$  - pārvietojuma funkcija pa z asi ( saspiešanas spēka virzienā), neņemot vērā elastomēra slāņa vāju saspiežamību.

Elastomēra slāņa tilpuma izmaiņai  $\Delta V_k^*$  varam pierakstīt:

$$\int_{V_1} u_{i,i}^k dV_1 \approx \Delta V_k^* = -\Delta_k^* \chi_k F_k, \quad (2.113)$$

kur  $\Delta_k^*$  - kompensatora deformācija, kurš ievēro elastomēra slāņa telpisko deformāciju, ņemot vērā elastomēra vāju saspiežamību;

$\chi_k$  - koeficients, kas ir atkarīgs no elastomēra slāņa ģeometrijas;

$F_k$  - elastomēra slāņa šķērsriezuma laukums.

No (2.112) un (2.113) to varam aprēķināt pēc formulas:

$$\Delta_k^* = \frac{1-2\mu}{\mu F_k} \int_0^h \left( \frac{P}{2G} + \int_P \frac{\partial u_z}{\partial z} dF \right) dz \quad (2.114)$$

Otrā variantā, izmantojam risinājumu nesaspiežamam elastomēram. Tad no vienādojuma (2.112) varam atrast izteiksmi pārvietojumam  $\Delta_k^*$ , kurā tiek ņemta vērā vāja elastomēra saspiežamība:

$$\Delta_k^* = -\frac{3(1-2\mu)}{2F(1+\mu)} \int_{V_{k=1}} s_k dV_{k=1} \quad (2.115)$$

Izteiksmē (2.115) ietilpst hidrostatiskā spiediena  $s$  funkcija, kura paliek nezināma, jo tā neietilpst funkcionālī (2.111), ja pārvietojumu funkcija izpildīta nesaspiežamības nosacījumā. Šajā gadījumā, ņemot vērā, ka elastomēra vājās saspiežamības ievērojamā ietekme uz kompensatora deformāciju būs jūtama tikai plānos elastomēru slāņos, tuvināti funkciju  $s$  var iegūt no līdzsvara nosacījuma elastomēra slāņa šķērsgriezumam, kurā ir pielikts spēks.

Ja ņemta vērā vājās saspiežamības ietekme, tad delta metodē  $k$ -tajam noslogojuma solim amortizatora nosēde tiek noteikta pēc formulas:

$$\Delta_{k\Sigma} = \Delta_k + \Delta_k^* \quad (2.116)$$

Summārais atrisinājums visiem soļiem ( $k = 1, \dots, n$ ), aizvietojam summēšanu ar integrēšanu  $n \rightarrow \infty$ , (ja formulu (2.116) var pierakstīt rekurentā formā), ieguvām meklējamo sakarību „spēks -pārvietojums” kompensatoram pie vidēja lieluma deformācijām.

Analizējot secīgo aprēķinu izveides metodiku  $k$ -tajā noslodzes posmā, jānosaka elastomēra slāņa apjoms  $V_{k-1}$  no risinājuma  $(k-1)$ -tajā noslodzes posmā. Pat vienkāršām tuvinātām izteiksmēm funkcijām  $u_i^k$  un  $s^k$  šie aprēķini izrādās diezgan smagnēji, kas apgrūtina galīgo formulu izmantošanu inženieru praksē. Delta - metodes analīze parāda, ka lielai kompensatoru konfigurāciju grupai, ja risinājumu meklējam ar Ritca metodi, pirmajā tuvinājumā var neņemt vērā elastomēru slāņu brīvo virsmu formas izmaiņas, tas ir pieņemt, ka katrā noslodzes posmā jāņem vērā tikai elastomēra slāņa biezuma izmaiņas, un var neņemt vērā elastomēra slāņa šķērsizmēru izmaiņas uz tā sānu virsmas konfigurācijas izmaiņu rēķina. Tas ievērojami vienkāršo rekurentu formulu ieguvu brīvajam  $k$ -tajam noslodzes posmam un būtiski vienkāršo aprēķinu procedūru, aizstājot summēšanu ar integrēšanu. Šādas vienkāršošanas efektivitāte ir īpaši jūtama, aprēķinot kompensatoriem atkarību "spēks - pārvietojums". Ir zināms, ka, ja analītiskās izteiksmes "spēks-pārvietojums" iegūstam no deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma principa, tad tuvinātajam risinājumam ir paaugstinājums spēka ziņā. Var sagaidīt, ka vienkāršojums novedīs pie kompensatora

raksturojuma "spēks - pārvietojums" precizējuma. Šajā gadījumā šīs kļūdas katrā noslogojumam posmā summēsies. Neņemot vērā deformācijas enerģiju, kas tiek patērēta elastomēra slāņa brīvo virsmu deformācijai, iegūsim pazeminātu spēka lielumu, kas nepieciešams tādas pašas kompensatora pārvietojuma iegūšanai. Tā kā abām kļūdām (no Ritca metodes, un no vienkāršošanas delta metodē) ir pretējas zīmes, tad var sagaidīt, ka galīgais risinājums atkarībai "spēks - pārvietojums" uzlabojas.

Pie elastomēra nekustīga stiprinājuma nosacījuma pie kompensatora atbalsta vietām, vispārīgā gadījumā, pārvietojumu funkcijai mazu deformāciju gadījumā, tiek izmantota plakano šķēlumu hipotēze. Tas ļauj katrā k-tajā kompensatora noslogojuma posmā (neizjaucot kopīgumu, skaidrībai aplūkosim vienlaidus cilindrisku kompensatoru, kas noslogots ar ass saspiešanas spēku) pārvietojumu funkcijas, atbilstoši, pa asīm r un z izvēlēties kā:

$$\begin{aligned}
 u_r^k &= B_k r_k \left( 1 - \frac{z_k^2}{h_k^2} \right) \\
 u_z^k &= C_k \left( z_k - \frac{z_k^3}{3h_k^2} \right) \\
 \delta_1 &= \delta_2 = \dots \delta_k = \dots \delta_n = \delta = \frac{\Delta}{n} \\
 h_k &= h \left[ 1 - (k-1) \frac{\delta}{h} \right] \\
 n \cdot \frac{\delta}{h} &= \frac{\Delta}{h}, \\
 k &= 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

kur  $B_k, C_k$  – nezināmas konstantes;

$h$  - ārējā elastomēra slāņa biezums.

Elastomēra slāņa sānu nenoslogotās virsmas profilu k-tajā saspiešanas posmā, nodrošinot nosēdi  $\delta_k = \delta = \Delta/n$ , pietiekami precīzi var pierakstīt parabolas (kas nav obligāti) veidā:

$$\begin{aligned}
 r_k &= B_k z_k^2 + C_k, \quad r_{k=1} = R \\
 B_k &= (R - C_k) h_k^{-2} \\
 C_k &= R \left( 1 + \frac{\max u_r^{k-1}}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

kur  $R$  - nenoslogota elastomēra slāņa rādiuss;

$B_k, C_k$  – konstantes:

kuras katrā  $k$ -tajā saspiešanas posmā tiek noteiktas no ģeometriskiem robežnosacījumiem pārvietojumam  $u_r$  radiālā virzienā, ņemot vērā elastomēra slāņa gala šķēlumu stiprinājumu nekustīgumu pie metāla:

$$u_r^k \left( r_k, z_k = \pm \frac{h_k}{2} \right) = 0 \quad (2.119)$$

No funkciju (2.117) – (2.118) izskata izriet, ka rekurentajā formulā atkarībai "spēks-pārvietojums" ietilps lielumi  $\delta/h$ ,  $(\delta/h)^2$ ,  $(\delta/h)^3$ ,  $(\delta/h)^4$  utt. Tā kā pie  $n \rightarrow \infty$  lielums  $\delta = \Delta/n \rightarrow 0$  (t.i. ir bez ierobežojuma mazi lielumi), tad, veicot galīgo pāreju no summēšanas uz integrēšanu, ar precizitāti līdz bezgala maziem augstākas kārtas locekļiem, var ņemt vērā tikai saskaitāmos ar reizinātāju  $\delta/h$  pirmajā pakāpē, bet pārējos saskaitāmos ar reizinājumiem  $\delta/h$  pakāpē, kas lielāka par vieninieku, var neņemt vērā kā lielumus, kas ir augstākas kārtas. Tas ļauj, izmantojot delta metodi, neņemt vērā amortizatora elastomēra slāņa brīvās virsmas ģeometrijas izmaiņas, aprēķinot raksturojumu "spēks - pārvietojums". Tas izriet arī no tā, ka katrā  $k$ -tajā pakāpē kompensatora raksturojuma "spēks- pārvietojums" noslogojumi ir lineāri, kuriem:

- 1) elastomēra slāņa brīvās virsmas profilam nav izliekumu;
- 2) elastomēra slāņa stiprinājuma laukums pie atbalsta slāņiem nemainās;
- 3) elastomēra slāņa biezums katrā noslodzes  $k$ -tajā posmā mainās saskaņā ar:

$$h_k = h \left[ 1 - (k-1) \frac{\delta}{h} \right], \quad \delta_k = \delta = \frac{\Delta}{h} \quad (2.120)$$
$$n \frac{\delta}{h} = \frac{\Delta}{h}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ir acīmredzams, ka piedāvātā deltas metodes procedūra ļauj atrast nelineārus raksturojumus „spēks-pārvietojums” pēc lineāriem risinājumiem mazām deformācijām, kas iegūtas ar jebkādu tuvinātu paņēmieni. Formāli delta metodes procedūru var izmantot ne tikai kompensatoriem ar parastu, bet arī ar sarežģītu konfigurāciju.

Apkopojot aplūkoto delta metodi, atkarības "spēks-pārvietojums" aprēķināšanai kompensatoram vidējo deformāciju apgabalā var efektīvi izmantot pietiekami vienkāršu metodiku:

- mazām deformācijām atrodam (vai izmantojam jau esošo lineāro risinājumu) lineāro atkarību "spēks - pārvietojums":

$$P_{k=1} = \Delta^{k=1}(a, b, h), \quad (2.121)$$

kur  $a, b, h$  – aplūkojamā gumijas tehniskā izstrādājuma ģeometriskos parametru kopums.

kuru aplūkojam kā risinājumu noslogojuma pirmajam posmam ( $k=1$ ) delta metodei vidēju deformāciju apgabalā;

-  $k$ -tajam noslogojuma posmam, izmantojot formulu (2.121) mazam slodzes  $P_k$  pieaugumam (kas nodrošina mazas deformācijas). Saskaņā ar delta metodi, izveidosim rekurento atkarību "spēks-pārvietojums":

$$P_k = \Delta^k(a, b, h^k) \quad (2.122)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

kur  $a, b$  – ģeometriskos parametru kopums, kuri paliek pastāvīgi katrā noslodzes  $k$ -tajā posmā;

$h^k$  – saskaņā ar (2.120), elastomēra slāņa mainīgais ģeometriskais lielums  $k$ -tajā noslodzes posmā (parasti tas ir elastomēra slāņa brīvās virsmas izmērs).

- galīgā pāreja, pārejot no summēšanas uz integrēšanu:

$$P = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P_k = \int_1^{\lambda} \Delta(a, b, h, \eta) d\eta \quad (2.123)$$

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta}{h}$$

$$\lambda \leq \eta \leq 1, \quad \eta = 1 - (k-1) \frac{\delta}{h}$$

kompensatoram tiek atrasta analītiska atkarība "spēks - pārvietojums" vidējo deformāciju apgabalā.

## 2.8. Tuvināto atkarību „spēks- pārvietojums” kļūdu novērtējums, izmantojot variācijas metodes

Visi analītiski aprēķini gumijas izstrādājumiem ir veikti ar tuvinātām metodēm. Neeksistē precīzu analītisku metožu gumijas izstrādājumu aprēķiniem. Izmantojot tuvinātas metodes ir ļoti svarīgi zināt ar kādu kļūdu ir atrasts risinājums, un īsts risinājums ir lielāks vai mazāks par iegūto.

Praktiski nav metožu, kas ļautu novērtēt iegūto tuvināto analītisko risinājumu precizitāti elastomēru konstrukcijām. Šajā virzienā jāatzīmē S.Dimnikova darbs [72], kurā amortizatoru (tips "spēks- pārvietojums") tuvināto risinājumu "dakšas" iegūšanai līdzās deformācijas pilnās potenciālās enerģijas principam, tiek piedāvāts izmantot deformācijas papildu potenciālās enerģijas principu. Deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma princips sava nosacītā pārvietojumu koordinātu funkciju izvēles vienkāršuma dēļ guva plašu pielietojumu, īpaši elastomēru izstrādājumu stinguma raksturojumu atrašanai. Šī metode nosaka pārvietojumu ar "iztrūkumu" (nosacīti precīza risinājuma pārvietojuma pazemināts lielums). Deformācijas papildu potenciālās enerģijas minimuma princips tiem pašiem raksturojumiem nosaka pārvietojumu ar "atlikumu" (nosacīti precīza risinājuma pārvietojuma paaugstināts lielums). Šī metode nav radusi pielietojumu elastomēru izstrādājumu aprēķināšanā problēmu dēļ, kas saistītas ar koordināšu funkciju izvēli spriegumiem, kam obligāti ir jāapmierina līdzsvara vienādojumi un spēka robežnosacījumi, un, izmantojot mazu skaitu koordināšu funkciju, tuvināti jāatbilst reāli iespējamam spriegumu sadalījumam elastomēra slānī. Pēdējā nosacījuma izpilde ir īpaši problemātiska, izmantojot koordināšu funkciju minimālu skaitu.

Risinājumu novērtēšanas metodēm [99] ir tāds trūkums, ka to izmantošanas gadījumā nākas atkal risināt to pašu uzdevumu, bet ar citām metodēm, kas sniedz „dakšu” pēc esošā risinājuma saskaņā ar Ritca metodi. Tādu atkarību iegūšana pat vienkāršas formas ķermeņiem ir diezgan darbietilpīga procedūra aprēķinu ziņā, tā var izrādīties pilnīgi neiespējama ģeometriski sarežģītiem ķermeņiem, jo ir grūtības aproksimējošo funkciju piemeklēšanā.

Šajā nodaļā aplūkotas metodes, kuras ļauj, nepārkāpjot Ritca metodes robežas (izmantojot jau zināmus risinājumus, kuri iegūti izmantojot deformācijas pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu), novērtēt tuvinātā risinājuma kļūdu, kas iegūts ar Ritca metodes palīdzību. Aplūkotās pieejas divpusējā tuvinājuma iegūšanai ir īpaši efektīvas, novērtējot integrālos raksturojumus kā „spēks- pārvietojums”.

### 2.8.1. Metodes, kas balstās uz funkcionāla divpusējo novērtēšanu

„Dakšas” iegūšana notiek, izmantojot potenciālās enerģijas divpusējā novērtējuma idejas. Var izmantot M.Slobodjanska metodi elastības teorijas robežproblēmu risināšanai, kuras būtība ir variāciju uzdevumu risināšana, izmantojot kvadrātiskus funkcionāļus. Tiek izmantots funkcionāļu novērtēšanas paņēmiens, kuru piedāvāja [114] vienam konkrētam kvadrātiskā funkcionāla gadījumam, kas ir, kā zināms Fridriha vispārinājums. Šis paņēmiens tiek pārņemts un vispārināts jauktajiem lineāriem elastības teorijas uzdevumiem.

Metodes būtība ir sekojoša: Pieņemsim, ka ir kāds gumijas kompensators, kurš ir noslogots ar spēku  $P$ , un kompensatoram ir pārvietojums  $\Delta = \Delta^*(P)$ . Izmantojot potenciālās enerģijas minimuma principu, tika iegūts pārvietojums lielums ar iztrūkumu:

$$\Delta^*(P) \leq \Delta_p(P), \quad (2.124)$$

kur  $\Delta^*$ - pārvietojums, kura tiek aprēķināta izmantojot Ritca metodi;

$\Delta_p$  – īsts pārvietojums vērtība, precīzs risinājums.

Pieņemsim, ka mums izdevās izveidot funkcionāli  $J_1(u_1, u)$  tā, ka tam piemīt minimālās īpašības un

$$J_1(u_1, u) \leq J(u), \quad (2.125)$$

kur  $J(u)$  – izteiksme potenciālajai enerģijai.

Ar zināmo precīzo risinājumu bez grūtībām  $J(u)$  var pierakstīt ar  $\Delta$  un  $P$ , t.i.  $J = J(\Delta, P)$ , kas sasniedz savu minimumu, kad  $\Delta = \Delta_p(P)$ . Ja  $J_1(u_1, u)$  arī izteiksim ar  $\Delta$  un  $P$ , tad saskaņā ar (2.125),

$$J_1(\Delta, P) \leq J(\Delta, P) \quad (2.126)$$

ar jebkādu  $\Delta$  lielumu. Ņemot vērā funkcionāļu  $J_1$  un  $J$  kvadrātiskumu, „dakšu”  $\Delta_T(P)$  precīzam lielumam var atrast no (2.124) un (2.126), nezinot izteiksmi  $J(\Delta, P)$ . „Dakšu” sniedz vienādojuma saknes

$$J[\Delta^*(P)] = J_1(\Delta, P) \quad (2.127)$$

Apzīmēsim šīs saknes ar  $\Delta_1$  un  $\Delta_2$ . Tad

$$\Delta_1 < \Delta^*(P) \leq \Delta_p(P) < \Delta_2 \quad (2.128)$$

Tā kā  $J_1(\Delta, P)$  un  $J(\Delta, P)$  kvadrātiskās funkcijas attiecībā uz  $\Delta$ , tad no (2.126) un (2.127) izriet šaurāka „dakša”

$$\Delta^* \leq \Delta_p \leq \frac{\Delta^* + \Delta_2}{2}. \quad (2.129)$$

Aplūkosim kvadrātisko funkciju  $U(u_i)$ , kas apmierina nepieciešamos nepārtrauktības un diferenciāluma nosacījumus. Turklāt pieņemsim

$$U_{,u_i u_i} \geq 0, \quad U_{,u_i, j u_i, j} \geq 0. \quad (2.130)$$

Lai samazinātu turpmākos aprēķinus, pieņemsim, ka  $U(u_i)$  ietilpst  $u_i$  un visi tikai pirmās kārtas parciālie atvasinājumi  $u_{ij}$ .

Ievietosim  $U(u_i)$  Teilora rindā līdz pagaidām patvaļīgam funkcijām  $u_{1i}$

$$\begin{aligned} U(u_i) = & U(u_{1i}) + (u_i - u_{1i})L_i U(u_{1i}) + \left[ (u_i - u_{1i})B_j U(u_{1i}) \right]_j + \\ & + \frac{1}{2}(u_i - u_{1i})^2 U_{,u_i u_i} + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{1i,j})U_{,u_i, j u_i, j}, \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\text{kur operatori: } L_i = \frac{\partial}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial j} \frac{\partial}{\partial u_{i,j}}; \quad B_j = \frac{\partial}{\partial u_{i,j}}.$$

Izpildot (2.130) no (2.131) iegūstam nevienādību

$$U(u_i) - \left\{ U(u_{1i}) + (u_i - u_{1i})L_i U(u_{1i}) + \left[ (u_i - u_{1i})B_j U(u_{1i}) \right]_j \right\} \geq 0 \quad (2.132)$$

Nevienādība (2.132) ir patiesa jebkādām funkcijām  $u_i$  un  $u_{1i}$ : kas apmierina nepieciešamos nepārtrauktības un diferenciējamības nosacījumus, Integrējot (2.132) pēc tilpuma  $V$ , iegūstam

$$\int_V U(u_i) dV - \left\{ \int_V [U(u_{1i}) + (u_i - u_{1i}) L_i U(u_{1i})] dV + \int_F (u_i - u_{1i}) B_j U(u_{1i}) n_j dF \right\} \geq 0 \quad (2.133)$$

Ja funkcionālim (2.133) izvirzīt atbilstošu variācijas uzdevumu par minimuma meklēšanu (2.133), tad ir acīmredzams, ka šis minimums ir vienāds ar nulli. Šīs piezīmes izmantosim, ieviešot palīgfunkcionāli  $J_1(u_i, u_{1i})$ .

### 2.8.2. Palīgfunkcionāļa izveide un vienkāršojošie pārveidojumi

Pieņemsim, ka tuvinātais risinājums ar iztrūkumu uz pārvietojumiem tika noteikts ar potenciālās enerģijas minimuma principa palīdzību, kura shematiskā veidā var tikt izteikta ar funkcionāli:

$$J = \int_V U(u_i) dV + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF \quad (2.134)$$

kur  $U(u_i)$  – potenciālā enerģija;

$\Phi(u_i)$  - ārējo spēku darbs;

$u_i$  – pārvietojuma vektora sastāvdaļas, kas apmierina nepieciešamos nepārtrauktības un diferencējamības nosacījumus un dažas robežnosacījumu grupas.

Ja  $u_i^0$  - aplūkojamās robežproblēmas precīzs atrisinājums, tad

$$\min J(u_i) \geq \min J(u_i^0) = d \quad (2.135)$$

Ieviesīsim jaunu kvadrātisko funkciju  $U_1(u_i)$  un pagaidām patvaļīgas funkcijas  $u_{1i}$ . Pieprasīsim, lai

$$U_{1,u_i u_i} \geq 0, \quad U_{1,u_{i,j} u_{i,j}} \geq 0 \quad (2.136)$$

Arī Eilera vienādojumi priekš  $U_1(u_i)$  viegli integrēs, bet  $u_{1i}$  apmierinātu nepieciešamos nepārtrauktības un diferencējamības nosacījumus. Ņemot vērā (2.132) un (2.136) var pierakstīt

$$U_1(u_i) - \left\{ U_1(u_{1i}) + (u_i - u_{1i})L_i U_1(u_{1i}) + \left[ (u_i - u_{1i})B_j U_1(u_{1i}) \right]_j \right\} \geq 0 \quad (2.137)$$

Funkcija

$$U_2(u_i) = U(u_i) - U_1(u_i) \quad (2.138)$$

būs kvadrātiska. Nevienādība (2.137) nemainīsies, ja pievienosim abiem kreisās puses saskaitāmiem funkciju (2.138). Iegūsim:

$$U(u_i) - \left\{ U_1(u_{1i}) + U_2(u_i) + (u_i - u_{1i})L_i U_1(u_{1i}) + \left[ (u_i - u_{1i})B_j U_1(u_{1i}) \right]_j \right\} \geq 0 \quad (2.139)$$

Integrēsim nevienādību (2.139) pēc pētāmā apgabala  $V$  un pievienojam abām daļām tāda veida integrāli

$$\int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF \quad (2.140)$$

Tad

$$\int_V U(u_i) dV + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF - \left\{ \int_V [U_1(u_{1i}) + U_2(u_i) + (u_i - u_{1i})L_i U_1(u_{1i})] dV + \int_F (u_i - u_{1i})B_j U_1(u_{1i}) n_j dF + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF \right\} \geq 0 \quad (2.141)$$

Vai

$$J(u_i) - J_1(u_{1i}) \geq 0 \quad (2.142)$$

Kur funkcionālis  $J_1(u_{1i})$

$$J_1(u_{1i}) = \int_V [U_1(u_{1i}) + U_2(u_i) + (u_i - u_{1i})L_i U_1(u_{1i})] dV + \int_F (u_i - u_{1i})B_j U_1(u_{1i}) n_j dF + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF \quad (2.143)$$

No (2.135) un (2.142) izriet, ka funkcionāļa (2.143) minimums nebūs lielāks par  $J(u_i^o) = d$ . Tādēļ, lai novērtētu funkcionāļa minimumu, no augšas, izvēloties funkcijas  $u_i$ , jāaprēķina, ņemot vērā (2.134) minimālais lielums. Lai novērtētu no apakšas, jāaprēķina lielums (2.143), kurā ietilpst pagaidām neuzdotā funkciju sistēma  $u_{1i}$ . Pilnīgi dabiski, ka  $u_{1i}$  ir vēlams izvēlēties tā, lai nevienādība (2.142) būtu ar minimālo lielumu izvēlētās funkciju sistēmas  $u_i$  gadījumā, bet Eilera vienādību sistēma priekš  $J_1(u_{1i})$  būtu ekvivalenta aplūkojamai robežproblēmai:

$$L_i U(u_i) = 0 \quad \text{tilpumā } V \quad (2.144)$$

$$B_j U(u_i) n_j + \Phi(u_i),_{u_i} = 0 \quad \text{uz } F_\sigma \quad (2.145)$$

$$u_i = u_{0i} \quad \text{uz } F_u \quad (2.146)$$

Minimuma nosacījums (2.142), jo  $\delta J(u_i) = 0$  iegūs sekojošu izskatu:

$$\delta J_1(u_{1i}) = 0 \quad (2.147)$$

Vai

$$\begin{aligned} & \int_V \{ [L_i U_2(u_i) + L_i U_1(u_{1i})] \delta u_i + (u_i - u_{1i}) \delta L_i U_1(u_{1i}) \} dV + \\ & \quad + \int_F (u_i - u_{1i}) \delta B_j U_1(u_{1i}) n_j dF + \\ & \quad + \int_{F_\sigma} [B_j U_2(u_i) n_j + B_j U_1(u_{1i}) n_j + \Phi(u_i),_{u_i}] \delta u_i dF = 0 \end{aligned} \quad (2.148)$$

Nepieciešamie funkcionāļa  $J_1(u_{1i})$  minimuma nosacījumi ir vienādojumi

$$L_i U_1(u_{1i}) = -L_i U_2(u_i) \quad \text{tilpumā } V \quad (2.149)$$

$$B_j U_1(u_{1i}) n_j = -B_j U_2(u_i) n_j - \Phi(u_i),_{u_i} \quad \text{uz } F_\sigma \quad (2.150)$$

Kuru atrisināšana nesagādā grūtības, jo  $U_1(u_i)$  izvēlēts tā, lai (2.149) būtu viegli integrējams. Izpildot (2.149) un (2.150) no (2.148) iegūstam kā Eilera vienādojumus

$$u_i - u_{1i} = 0 \quad \text{tilpumā } V \quad \text{un uz } F = F_u + F_\sigma \quad (2.151)$$

Kas saskaņā ar (2.149) un (2.150) ekvivalents robežproblēmai (2.144) – (2.146).

Piemērojot izvēlētos  $u_i$  un atrastos no (2.149), (2.150)  $u_{1i}$  (2.143) iegūsim tuvinājumu ar iztrūkumu uz funkcionāla minimumu. Tos pašus, bet vispārīgākus, rezultātus var iegūt, ja izmanto Lagranža nenoteikto reizinātāju metodi un piedāvāto variācijas uzdevumu teoriju [83]. Pievienojot sistēmai (2.144) – (2.136) papildu vienādojumu

$$u_i - u_{1i} = 0 \quad \text{tilpumā } V \text{ un uz } F_\sigma \quad (2.152)$$

Un sadalot  $U(u_i)$  par  $U_1(u_i)$  un  $U_2(u_i)$  tā, lai  $L_i U_1(u_i)$  un  $L_i U_2(u_i)$  būtu pozitīvi noteikti operatori, atradīsim brīvo funkcionāla minimumu

$$\begin{aligned} J_1(u_i, u_{1i}) = & \int_V [U_1(u_{1i}) + U_2(u_i) + \eta_i(u_i - u_{1i})] dV + \\ & + \int_F \alpha_i(u_i - u_{1i}) dF + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF, \end{aligned} \quad (2.153)$$

kur  $\eta_i(\bar{x})$  un  $\alpha_i(\bar{x})$  - Lagranža reizinātāji;

$u_i$  - funkcija no funkcionāla noteikšanas apgabala (2.134).

Nepieciešams funkcionāla minimuma  $J_1(u_i, u_{1i})$  nosacījumus ir attiecības

$$\begin{aligned} L_i U_1(u_{1i}) - \eta_i &= 0 \\ L_i U_2(u_i) + \eta_i &= 0 \end{aligned} \quad \text{tilpumā } V \quad (2.154)$$

$$B_j U_1(u_{1i}) n_j - \alpha_i = 0 \quad \text{uz } F \quad (2.155)$$

$$B_j U_2(u_i) n_j + \alpha_i + \Phi_{,u_i} = 0 \quad \text{uz } F_\sigma \quad (2.156)$$

Ja  $L_i U_1(u_{1i})$  viegli integrējas, tad sistēmas (2.154) - (2.156) risinājums nerada grūtības un (2.153) sakrīt ar (2.13). Ar šādu pieeju nav grūtu parādīt, ka minimums priekš (2.134) ir maksimums priekš (2.143). Pieliksim

$$\begin{aligned} \lambda_i &= u_i - u_i^o \\ \lambda_{1i} &= u_{1i} - u_i^o, \end{aligned} \quad (2.157)$$

kur  $u_i^o$  - precīzais risinājums.

Tad

$$\begin{aligned}
 L_i U(u_i^o) &\equiv 0 \text{ tilpumā } V \\
 B_j U(u_i^o) + \Phi_{,u_i} &\equiv 0 \text{ uz } F_\sigma \\
 \lambda_i &\equiv 0 \text{ uz } F_u \\
 L_i U_1(\lambda_{1i}) + L_i U_2(\lambda_i) &\equiv 0 \text{ tilpumā } V \\
 B_j U_1(\lambda_{1i}) + B_j U_2(\lambda_i) n_j + \Phi_{,u_i} &\equiv 0 \text{ uz } F_\sigma
 \end{aligned} \tag{2.158}$$

Izmantojot (2.158) un zināmās Betti attiecības [83], no (2.143) iegūsim:

$$\begin{aligned}
 J_1(u_i, u_{1i}) &= \int_V [U_1(u_i^o) + U_2(u_i^o)] dV + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i^o) dF - \\
 &= \int_V [U_1(\lambda_{1i}) + U_2(\lambda_i)] dV = J(u_i^o) - \int_V [U_1(\lambda_{1i}) + U_2(\lambda_i)] dV
 \end{aligned} \tag{2.159}$$

Funkcijas  $U_1(\lambda_{1i})$  un  $U_2(\lambda_i)$  ir kvadrātiskas, tādēļ

$$J_1(u_i, u_{1i}) \leq J(u_i^o) = d \tag{2.160}$$

Vienādības zīme iespējama tikai tad, kad  $\lambda_{1i} = \lambda_i \equiv 0$ , t.i. ja  $u_{1i} \equiv u_i^o$ ,  $u_i \equiv u_i^o$ . Tātad, izvēloties  $u_i$ , ņemot vērā ģeometriskās robežas kā

$$u_i = a_{ik} \varphi_k^i(\bar{x}) \tag{2.161}$$

No funkcionāļa  $J(u_i)$  (2.134) minimuma nosacījuma atradīsim risinājumu ar iztrūkumu. No (2.143), (2.149), (2.150) un (2.152) iegūsim:

$$J_1(u_i, u_{1i}) = J_1(a_{ik}) \tag{2.162}$$

Risinot priekš (2.162) uzdevumu par maksimumu, varēsime atrast tuvināto funkcionāļa (2.134) lielumu ar iztrūkumu, un izmantot to, lai iegūtu tuvināto risinājumu  $u_i$  ar pārpalikumu.

Pārveidojam funkcionāli  $J_1(u_i, u_{1i})$  par kompaktāku izteiksmi. Tā kā  $U_1(u_{1i})$  parasti ir diezgan vienkārša kvadrātiska funkcija, tad jebkādām funkcijām  $\alpha_i(\bar{x})$  un  $\beta_i(\bar{x})$  un jebkādiem skaitļiem  $a$  un  $b$  iegūsim:

$$\int_V U_1(a\alpha_i + b\beta_i) dV = k_1 a^2 + k_2 ab + k_3 b^2 \quad (2.163)$$

Kur koeficienti  $k_1, k_2, k_3$  ir atkarīgi tikai no  $\alpha_i(\bar{x})$  un  $\beta_i(\bar{x})$  veida. Diferencējot (2.163) pēc  $b$ , integrējot pa daļām, un pieņemot, ka  $b = 0, a = 1$ , iegūsim:

$$\int_V L_i U_i(\alpha_i) \beta_i dV + \int_F B_j U_1(\alpha_i) n_j \beta_i dF = k_2 \quad (2.164)$$

Pēc tam pieņemot no sākuma, ka  $a = 1, b = 0$  un  $a = 0, b = 1$ , no (2.163) atbilstoši iegūstam

$$\begin{aligned} \int_V U_1(\alpha_i) dV &= k_1 \\ \int_V U_1(\beta_i) dV &= k_3 \end{aligned} \quad (2.165)$$

Tad, pieņemot, ka  $a = b = 1$ , bet  $\alpha_i = u_{1i}$  un  $\beta_i = u_i - u_{1i}$ , no (2.163) iegūstam

$$\begin{aligned} \int_V U_1(u_i) dV &= \int_V U_1(u_{1i}) dV + \int_V U_1(u_i - u_{1i}) dV + \\ &+ \int_V L_i U_1(u_{1i})(u_i - u_{1i}) dV + \int_F B_j U_1(u_{1i}) n_j (u_i - u_{1i}) dF \end{aligned} \quad (2.166)$$

Funkcionālim  $J_1(u_i, u_{1i})$  no (2.143) un (2.66) iegūstam:

$$J_1(u_i, u_{1i}) = \int_V [U_1(u_i) + U_2(u_i) - U_1(u_i - u_{1i})] dV + \int_{F_\sigma} \Phi(u_i) dF \quad (2.167)$$

vai

$$J_1(u_i, u_{1i}) = J(u_i) - \int_V U_1(u_i - u_{1i}) dV \quad (2.168)$$

Izmantošana aprēķinos (2.168) vietā (2.143) ir ērtāka, jo izteiksme  $J(u_i)$  parasti jau mēdz būt zināma.

### 2.8.3. Ritca metodes precizitātes novērtējums, ja ir dažāds saskaitāmo skaits tuvinātajā risinājumā

Praktiskiem mērķiem tuvinātajā risinājumā, kas tiek iegūts, ar Ritca metodes palīdzību rindu veidā atstāj tikai ierobežotu skaitu saskaitāmo. Rodas problēma, cik tālu mēs šajā gadījumā atradīsimies no labākā risinājuma saskaņā ar Ritcu. Ja saskaitāmo izteiksmes sanāk sarežģītas un pie tam rindām nav pietiekamas konverģence, tad novērtēt atmetamos saskaitāmos bez apjomīgiem aprēķiniem neizdodas.

Piedāvāta Ritca metodes precizitātes novērtēšanas metode, ja ir dažāds saskaitāmo skaits, kuri tiek atstāti tuvinātajā risinājumā, izmantojot idejas, kas tika attīstītas G.Š.Podoļska darbā [103] Galerkina metodes novērtēšanai.

Aplūkosim statistiskās elastības teorijas robežproblēmu

$$Au_i = f_i \text{ tilpumā } V, \quad (2.169)$$

$$Bu_i = P_i \text{ uz } F_\sigma, \quad (2.170)$$

$$u_i = u_{0i} \text{ uz } F_u, \quad (2.171)$$

kur  $A$  un  $B$  – lineāri simetriskie pozitīvi noteiktie operatori;  
 $f_i, P_i$  – uzdotās funkcijas;  
 $u_i$  – meklējamās funkcijas.

Parasti risinājums saskaņā ar Ritcu tiek meklēts kā

$$u_i' = a_{in} \varphi_n^i(\bar{x}), \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.172)$$

kur  $a_{in}$  - variējamās konstantes;  
 $\varphi_n^i(\bar{x})$  - koordinātu funkcijas, kuras apmierina galvenos robežnosacījumus.

Pie  $n = \infty$  (2.172) tiek sasniegts vislabākais risinājums saskaņā ar Ritcu, pie  $n = N < \infty$  risinājums būs sliktāks.

Tuvinājumu forma (2.172) saskaņā ar Rītcu nav vienīgā. Pievienosim (2.172) brīvas lineāri neatkarīgas ar  $\varphi_n^i(\bar{x})$  funkcijas  $u_i^*$

$$u_i = a_{in} \varphi_n^i(\bar{x}) + k u_i^* \quad (2.173)$$

kur  $k$  – brīvs nevariējams reizinātājs.

Pielietojot potenciālās enerģijas minimuma principu ar Rītcu metodi sistēmas risinājuma izveidei (2.169) – (2.172) mēs reducējam uzdevumu uz funkciju  $u_i$  meklēšanu, kuras realizē funkcionāļa minimumu.

$$J(u_i) = \int_V \frac{1}{2} u_i A u_i - f_i u_i dV - \int_{F_\sigma} (P_i - \frac{1}{2} B u_i) dF + \int_{F_u} \frac{1}{2} B u_i u_{0i} dF \quad (2.174)$$

Ņemot vērā (2.173) un (2.174) variējamām konstantēm  $a_{in}$  iegūsim lineāro algebrisko vienādojumu sistēmu

$$a_{in} \left[ \int_V \varphi_m^i A \varphi_m^i dV + \int_{F_\sigma} \varphi_m^i B \varphi_m^i dF \right] = R_{im} \quad (2.175)$$

kur  $m = 1 \dots n$ , bet

$$R_{im} = \int_V (f_i \varphi_m^i - k \varphi_m^i A u_i^*) dV + \int_{F_\sigma} (P_i \varphi_m^i - k \varphi_m^i B u_i^*) dF \quad (2.176)$$

Izteiksmes konstantēm  $a_{in}$  un funkcijai  $u_i$ , pēc sistēmas (2.175) atrisināšanas ietilps pagaidām nenoteiktais reizinātājs  $k$ . Saskaņā ar Rītcu metodi  $a_{in} \varphi_n^i$  būs ar iztrūkumu. Tātad, ja varēsīm atrast tādus  $k = k_1$  un  $k = k_2$ , kuriem  $V$  apgabala pētāmajā punktā  $\bar{x}^*$  atbilstoši

$$a_{in}(k_1) \varphi_n^i(\bar{x}^*) > 0$$

un (2.177)

$$a_{in}(k_2) \varphi_n^i(\bar{x}^*) < 0$$

Tad, atstājot tuvinātajā risinājumā  $N$  saskaitāmos, pirmajā gadījumā iegūsim augšējo, bet otrajā – apakšējo robežu labākajam risinājumam saskaņā ar Rītcu  $u_i^T(\bar{x}^*)$

$$a_{in}(k_1\phi_n^i)(\bar{x}^*) + k_1u_i^*(\bar{x}^*) \leq u_i^T(\bar{x}^*) \leq a_{in}(k_2\phi_n^i)(\bar{x}^*) + k_2u_i^*(\bar{x}^*) \quad (2.178)$$

Kur  $u_i^T(\bar{x}^*)$  - risinājums saskaņā ar Ritcu pie  $n = \infty$ . Attiecība (2.178) izriet no tā, ka izvēlēta punkta  $\bar{x}^*$  gadījumā acīmredzami var izvēlēties tādu  $k^*$ , lai

$$u_i^T(\bar{x}^*) = k^* u_i^*(\bar{x}^*) \quad (2.179)$$

Ja izvēlētais  $k_j$  ir tāds, lai

$$u_i^T(\bar{x}^*) > k_1 u_i^*(\bar{x}^*) \quad (2.180)$$

Tad

$$a_{in}(k_1)\phi_n^i(\bar{x}^*) > 0 \quad (2.181)$$

Un saskaņā ar Ritca metodi, atrasts ar iztrūkumu t.i.

$$a_{in}(k_1)\phi_n^i(\bar{x}^*) < u_i^T(\bar{x}^*) - k_1u_i^*(\bar{x}^*) > 0 \quad (2.182)$$

Atzīmēsim, ka katram  $V$  apgabala punktam  $k_1$  un  $k_2$  lielumu meklēšana, kas sniedz risinājumu ar iztrūkumu un pārpalikumu, jāveic atsevišķi.

Pie  $N < \infty$  nevienādība (2.178) kļūst spēcīgāka.  $N$  saskaitāmajiem, kuri tiek atstāti (2.173), par aprēķinu lielumu var ņemt „dakšas” vidējo aritmētisko (2.178), kurš vienmēr būs „augstāks”, nekā risinājums no (2.172) pie tā paša  $N$  skaita. Vienlaicīgi iegūstam iespēju novērtēt kļūdu salīdzinoši ar labāko Ritca risinājumu un sašaurināt „dakšu” (2.178), piemeklējot tikai labākās  $k_1$  un  $k_2$  kombinācijas, nepalielinot saskaitāmo skaitu (2.173). Risinot to pašu jautājumu par (2.172) palīdzību, nāktos palielināt  $N$ , risināt sistēmu (2.175), pie  $k = 0$ , ar sekojošu (2.172) aprēķināšanu, kas bieži ir saistīts ar lielu aprēķinu apjomu.

Piedāvātā pieeja samazina šo darbu līdz minimumam, jo šajā gadījumā, lai arī kā mēs palielinātu  $N$ , faktiski risināt sistēmu (2.175) nav vajadzības. Pietiek izpētīt tikai brīvos locekļus  $R_{im}$ . Tā kā sistēmas (2.175) kreisās daļas nesatur reizinātāju  $k$ , tad, citu vienādu apstākļu gadījumā galu galā  $a_{in}$  zīmi nosaka  $R_{im}$  zīme.

Izvēlamies  $k = k_1$  un  $k = k_2$ , kuru gadījumā  $R_{im}$  atbilstoši ir pretējas zīmes jebkāda  $n$  gadījumā. Ir viegli noteikt, ka šajā gadījumā zīmes  $a_{in}$  un tāpat arī  $a_{in}\phi_n^i$  tāpat būs pretējas  $k =$

$k_1$  un  $k = k_2$ , kas arī ļaus iegūt „dakšu” (2.178). „Dakšas” platums konkrēta  $N$  gadījumā (2.173) ir būtiski atkarīgs no  $k_1$  un  $k_2$  izvēles. Tā būs šaurāka gadījumā, ja  $k_1$  un  $k_2$  būs vistuvākie tādām  $k_0$  lielumam, kura gadījumā rindas  $a_{in}\phi_n^i$  savirze būs vislabākā. Lai to izdarītu, ar  $k$  izvēli jāpanāk ātrāko  $R_{im}$  brīvo locekļu samazinājums ar  $n$  pieaugumu.

Tā kā  $u_i^*$  izvēle ir brīva, tad, ieliekot tajos lielāko informāciju par pētāmo uzdevumu, var  $a_{in}\phi_n^i$  ietekmi (2.173) samazināt, kas ļaus vēl vairāk precizēt „dakšu” (2.178).

Tuvinājumu (2.173) var apkopot, ieviešot katrai  $u_i$  funkcijai savu, nevariējamu reizinātāju  $k^i$ , t.i., pieņemot, ka

$$u_i = a_{in}\phi_n^i + k^i u_i^* \quad (2.183)$$

Pie tam, izvēloties vienu  $k^i$  no ātrākā samazinājuma nosacījuma, citus no zīmes pastāvīguma nosacījuma  $R_{im}$  jebkāda  $n$  gadījumā, „dakšu” (2.178) varēs dažos gadījumos sašaurināt labākajam Ritca risinājumam pie tā paša saskaitāmo skaita (2.173).

## 2.9. Nodaļas secinājumi

- Izstrādāta gumijas-tehnisko izstrādājumu spriegota stāvokļa statistiskā slogojumā mazu deformāciju apgabalā, neievērojot elastomēra saspiežamību un izmantojot deformācijas pilnas potenciālas enerģijas minimuma principu, aprēķināšanas metodika;
- Noteikti gumijas-tehnisko izstrādājumu tuvināto risinājumu, kuri iegūti izmantojot hipotēzi par elastomēra nesaspiežamību, pielietošanas apgabalā, ievērojot izstrādājuma formas faktoru un reālu Puasona koeficienta vērtību (pielikums 1);
- izstrādāta plānslāņa gumijas tehniska izstrādājuma aprēķināšanas metodika elastomēra fiziskas nelinearitātes ievērošanai;
- izstrādātas plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metodes statistiskās slodzes gadījumā mazo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību un neelastomēra slāņu deformāciju;
- Izstrādāta saliktas formas gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika, izmantojot variācijas metodes pārtrauktiem spēkiem un pārvietojumiem;

- izstrādāta gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metode statiskās slodzes gadījumā vidējo deformāciju apgabalā izmantojot Delta-metodi, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību;
- izstrādāta gumijas tehniskā izstrādājuma stinguma raksturojuma, "spēks-pārvietojums", analītiskā risinājuma precizitātes novērtējuma metodika, kas iegūta, izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu.

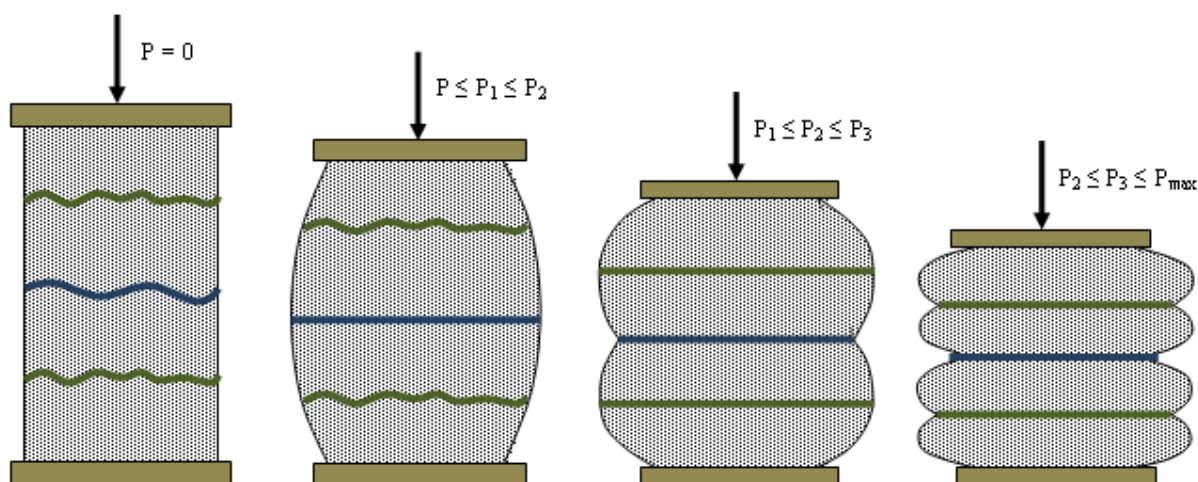
### 3. GUMIJAS-TEHNISKO IZSTRADĀJUMU JAUNAS KONSTRUKTĪVAS SHĒMAS UN TO APREĶINĀŠANAS METODEDES

#### 3.1. Elastomēra kompensators ar mainīgu stingumu

Mašīnbūvē un rūpniecībā vairākos mehānismos ir nepieciešams izmantot tāds kompensējošus elementus, lai mainītos stingums atkarībā no slodzes. Ir nepieciešamība nodrošināt pakāpenisku un vienmērīgu kompensatora darbību visā slodžu diapazonā. Šajā daļā apskatīsim statistisku slogojumu, lai gan šādi kompensatori var strādāt arī pie dinamiskām slodzēm.

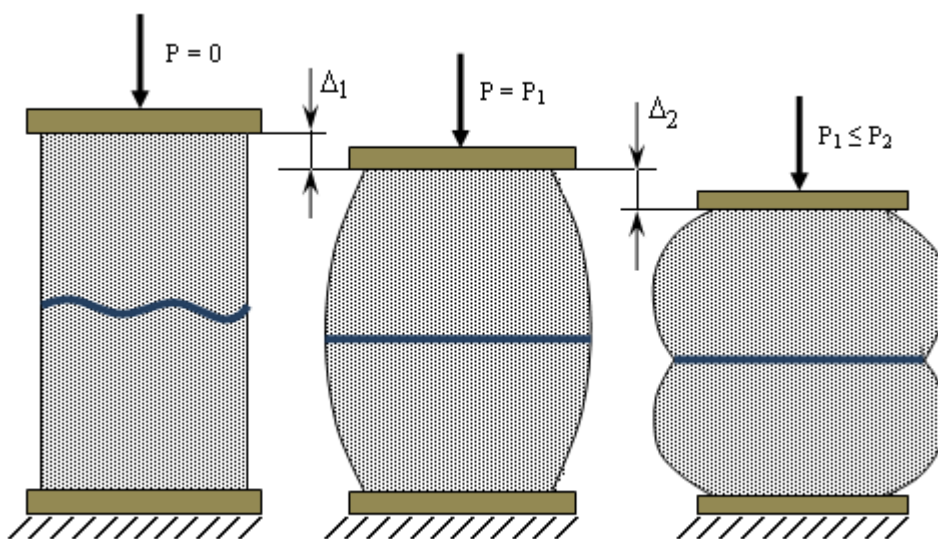
Līdz šim pārsvarā tiek izmantots viens mainīga stinguma kompensatoru veids, proti, izmantojot sānu ierobežotājus un tehniskajā literatūrā [89], [105], [107] atrodamie risinājumi neņem vērā visas konstruktīvās īpašības, kas varētu ietekmēt tā darbību (gumijas īpašības, metālisko daļu deformācijas, formas sarežģītību, gumijas slāņu saspiežamību, u.c.). Tāpēc šajā nodaļā tiek piedāvāts jauns, līdz šim nekur neizmantots konstruktīvs risinājums kā iegūt mainīgu stingumu spiedē izmantojot ne elastomēra starpslāņus.

Konstruktīvi risinājumi kā varētu izveidot kompensatoru ar mainīgu stingumu spiedē ir parādīti 3.1.att. attēlā.



3.1. att. Cilindriskis gumijas kompensators ar mainīgu stingumu spiedē

Apskatīsim vienkāršotas formas kompensatora aprēķinu shēmu ar vienu ne elastomēra starpslāni. Zinot vienkārša kompensatora darbību, var viegli aprēķināt „spēks – pārvietojums” sakarību arī sarežģītāku formu kompensatoriem ar vairākiem ne elastomēru starpslāņiem.



3.2. att. Mainīga stinguma cilindrisks kompensators

Attēlā 3.2.att redzamais kompensators sastāv no gumijas slāņa, kurā ir ievulkanizēta plāna gofrēta ne elastomēra kārtiņa (metāla, tekstila, polimēra, u.c. materiāli).Pieņemam, ka ne elastomēra kārtiņa ir pietiekoši plāna, lai tās pretestība lieces spēkiem tiektos uz nulli.

Piedāvāta kompensatora darbība sastāv no diviem etapiem:

pirmais etaps: ja pieliktais spēks  $0 \leq P \leq P_1$  tas darbojas kā vienslāņa tipa kompensators, pakāpeniski iztaisnojot plāno ne elastomēra starpslāni;

otrais etaps: ja pieliktais spēks  $P_1 \geq P \geq P_2$ , tad tas sāk darboties kā divslāņu tipa gumijas kompensators, jo ne elastomēra starpslānis pievulkanizēšanas dēļ neļauj piestiprinātajai gumijai deformēties sastiprinājuma vietā.

### 3.1.1. Elastomēra kompensatora ar mainīgu stingumu analītiskais aprēķins

Veiktajos aprēķinos gumija tiks apskatīta kā viendabīga bez tukšumiem un porām, izotropā, elastīga, sakarības starp spriegumiem  $\sigma_{ij}$  un deformācijām  $\epsilon_{ij}$  var tikt aprakstītas ar lineāriem vienādojumiem (2.7)-(2.12), gumijas slāņa deformācijas ir mazas  $0 < \epsilon < 15\%$ , tiks pieņemts, ka kompensators pakļauts statiskam slogojumam, ne elastomēra kārtiņa ir pietiekoši plāna, lai neņem vērā tās pretošanos lieces un vērpes spēkiem, augšējais un apakšējais kompensatora balsts ir pielīmēts pie gumijas, tas ir absolūti ciets un nedeformējas. Visi aprēķini balstīsies uz pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu [86]

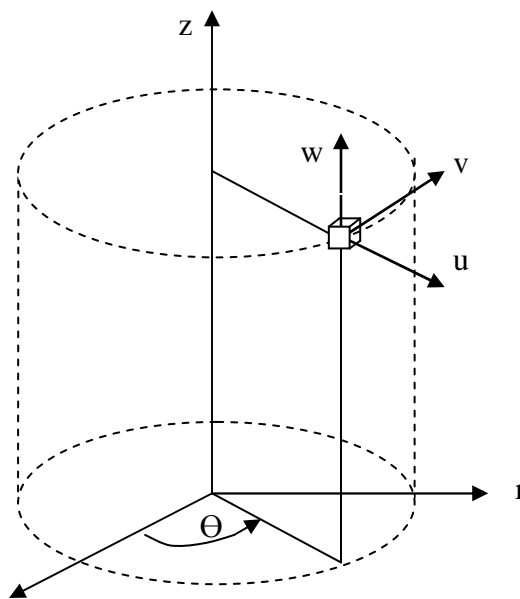
Šajā nodaļā apskatīsim dažādus īpašību kopumus, kuri tiks iekļauti „spēks – pārvietojums” sakarības aprēķinos un izvērtēsime rezultātu ietekmējošos faktorus, kad:

- netiks ņemta vērā gumijas vājā saspiežamība, un netiks ņemta vērā ne elastomēra slāņa deformācija;

- ņemsim vērā gumijas vājo saspiežamību, bet netiks ņemta vērā ne elastomēra slāņa deformācija;

- ņemsim vērā gumijas vājo saspiežamību un ne elastomēra slāņa deformāciju.

Aprēķini tiks veikti cilindriskajā koordinātu sistēmā (3.3. att.) ar koordinātēm  $r$ ,  $\Theta$ ,  $z$ .



3.3 att. Cilindriskā koordinātu sistēma

kur  $u(r, \Theta, z)$  – pārvietojums pa asi  $r$ ;

$v(r, \Theta, z)$  – koordināte pa pagrieziena leņķi  $\Theta$ ;

$w(r, \Theta, z)$  – koordināte pa  $z$  asi.

Tā kā tiks apskatīti uzdevumi ar asu simetrisku spiedi, tad:

$$u(r, \Theta, z) = u(r, z);$$

$$v(r, \Theta, z) = 0;$$

$$w(r, \Theta, z) = w(r, z);$$

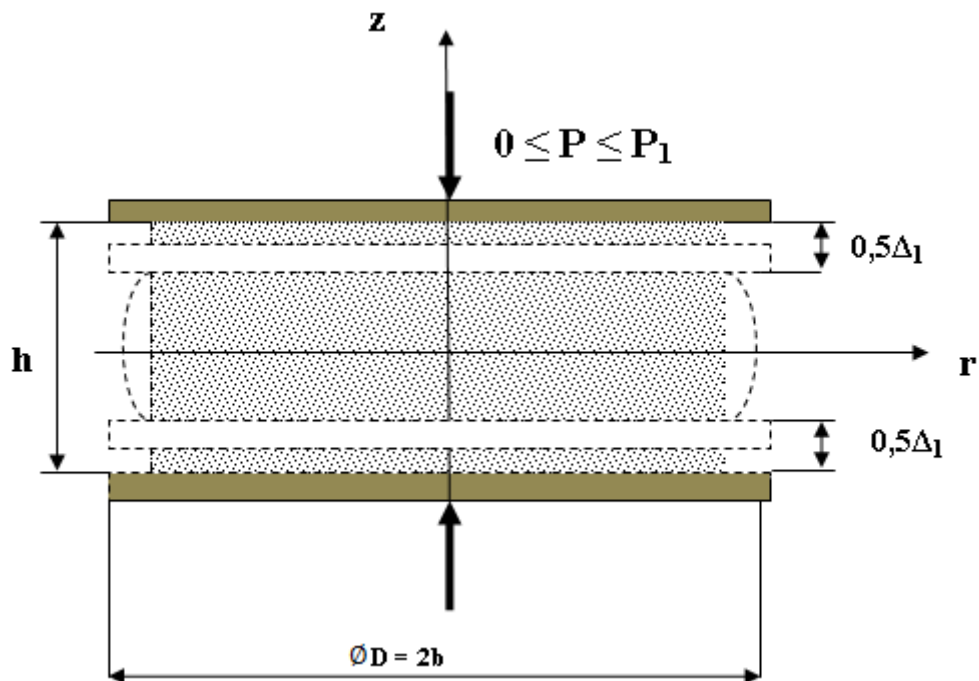
(3.1)

### 3.1.1.1. Kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins nesaspiežamiem materiāliem

Aplūkojamā kompensatora darba mehānisms ir paskaidrots 3.1. nodaļā. Šis ir aprēķins gadījumam, kad gumija tiek uzskatīta kā nesaspiežams materiāls (Puasona koeficients  $\mu = 0.5$ ).

#### Pirmais etaps:

Vispirms atradīsim aprēķinu formulas vienkāršam pilnam cilindriskam kompensatoram (3.4 att.), kurš arī atbilst dotā mainīgā stinguma kompensatora (3.2. att.) pirmajam darba etapam, aprakstītam iepriekšējā nodaļā.



3.4. att. Pilna cilindriskā kompensatora aprēķinu shēma

Aprēķins tiek veikts, izmantojot pilnas potenciālās enerģijas minimuma principu, aprakstītu 2.1 nodaļā. Pietiek izpildīt tikai pārvietojumu ģeometriskos robežnosacījumus (2.11) un aprakstīt gaidāmos pārvietojumus [86].

Aprakstam objekta virsmu:

- rādiuss mainās robežās  $0 \leq r \leq b$
- augstums mainās robežās  $-0.5h \leq z \leq 0.5h$
- pagrieziena leņķis mainās robežās  $0 \leq \Theta \leq 2\pi$

Slogojums ir spiedes spēks, kas ir vai nu koncentrētais spēks  $P$ , vai vienmērīgi izkliedēta spiede  $p$  pa absolūti cietu visu ne elastomēra atbalsta virsmu. Šajā gadījumā:

$$P = \pi b^2 p \quad (3.2)$$

Tā kā gumija ir pielīmēta pie balstiem, tad ģeometriskie robežnosacījumi pārvietojumiem (sk.3.4.att.) ir šādi:

$$u(r=0, z) = 0, \quad u\left(r, z = \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \quad (3.3)$$

$$w(r, z=0) = 0, \quad w\left(r, z = \pm \frac{h}{2}\right) = \mp \frac{\Delta_1}{2} \quad (3.4)$$

Gaidāmos pārvietojumus  $u(r, z)$  pa  $r$  un  $w(r, z)$  pa  $z$  asīm, kuri obligāti apmierina ģeometriskos robežnosacījumus (3.3) un (3.4) pieraksta šādi [11]:

$$u = Ar \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (3.5)$$

$$w = -\frac{3\Delta_1}{2h} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) \quad (3.6)$$

Izvēlas hidrostatiskā spiediena funkciju  $s(r, z)$  un tā kā tiek izmantots potenciālās enerģijas minimuma princips, tad tai nav jāpakļaujas nekādiem robežnosacījumiem:

$$s = B \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (3.7)$$

Apvienojot izteiksmes (3.1 – 3.7) un ievietojot tās pilnas potenciālās enerģijas minimuma funkcijā (2.14) tā pārrakstās šādi [86]:

$$\Pi = 2\pi G \int_0^h \int_0^b \left[ u_{,r}^2 + \left(\frac{u}{r}\right)^2 + w_{,z}^2 + \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,r})^2 + s \left(u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z}\right) \right] r dr \quad (3.8)$$

$$-P\Delta_1$$

Veicot iegūtās izteiksmes (3.8) integrēšanu iegūst izteiksmi  $\Pi = \Pi(A, B, \Delta_1)$  un izpildot potenciālās enerģijas minimuma nosacījumu:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial B} = 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

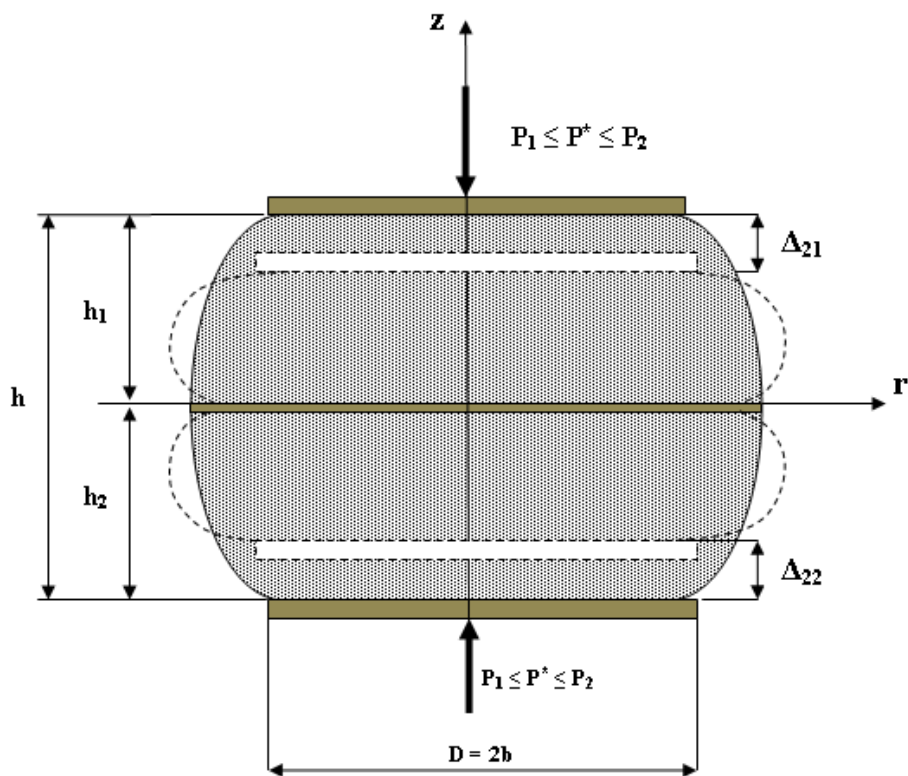
atrod konstantes A, B,  $\Delta_1$  no kurām izsaka pārvietojuma atkarību no pieliktās slodzes nesaspiežamiem materiāliem, kas ir tāda pati kā darbos [11], [86]:

$$\Delta_1 = \frac{P h}{\pi b^2 G} \cdot \left[ 3.6 + 1.5 \frac{b^2}{h^2} \right]^{-1} \quad (3.10)$$

Iegūtā formula (3.10) dod aprakstu pārvietojumam, pieņemot, ka gumija ir nesaspiežama un balsti nedeformējas.

**Otrais etaps.**

Otrajā kompensatora darba etapā (3.5. att.), kurš iestājas, kad pievulkanizētais ne elastomēra starpslānis, kurš tiek apskatīts kā absolūti ciets uz stiepi, ir iztaisnojies, Otrajā kompensatora darba etapā sāk darboties kā divslāņu tipa, attiecīgi kļūstot stingrāks.



3.5. att. Pilna cilindriskā kompensatora shēma, kad tas sāk darboties kā divslāņu

Neelastomēra starpslāņa atrašanās vietas noteikšanai var izmantot sekojošas formulas:

$$\begin{aligned} h_1 &= k h, \\ h_2 &= h - h_1, \\ 0 &\leq k \leq 1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kur  $h$  – kopējais gumijas slāņa augstums;

$h_1$  – augšējā gumijas slāņa augstums;  
 $h_2$  – apakšējā gumijas slāņa augstums;  
 $k$  – koeficients.

Tā kā dotajā gadījumā ne elastomēra starpslāņa deformācija netiek ņemta vērā, tad aprēķinot pārvietojumu otrajam darba etapam var lietot formulu (3.10). Tikai jāņem vērā nevis kopējais pieliktais spēks, bet gan spēka pieaugums, tad otrajā darba etapā pārvietojums  $\Delta_2$  rēķina sekojoši:

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} \quad (3.12)$$

$$\Delta_{21} = \frac{(P_2 - P_1) (h_1)}{\pi b^2 G \left[ 3.6 + 1.5 \left( \frac{b}{h_1} \right)^2 \right]} \quad (3.13)$$

$$\Delta_{22} = \frac{(P_2 - P_1) (h_2)}{\pi b^2 G \left[ 3.6 + 1.5 \left( \frac{b}{h_2} \right)^2 \right]}, \quad (3.14)$$

kur  $\Delta_{21}$  – augšējā gumijas slāņa pārvietojums pirmajā darba etapā;  
 $\Delta_{22}$  – apakšējā gumijas slāņa nosēde otrajā darba etapā;  
 $P_1$  - spēks, pie kura ne elastomēra starpslānis ir iztaisnojies;  
 $P_2$  - kopējais pieliktais spēks.

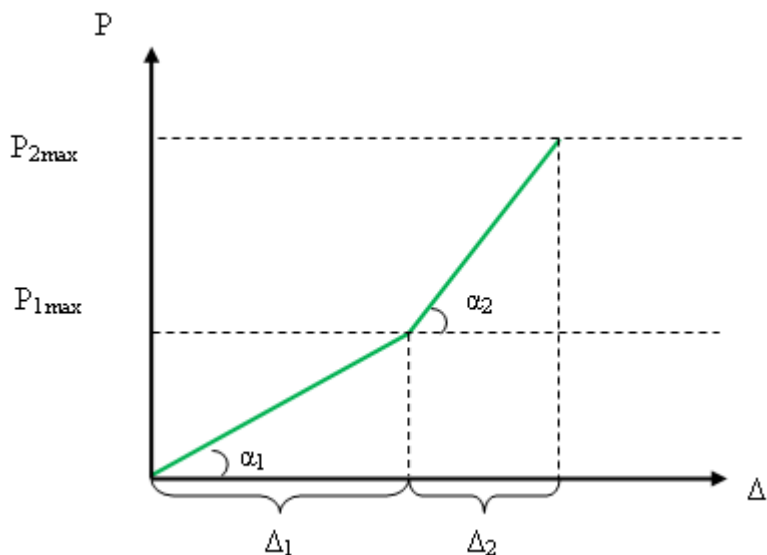
Apvienojot pārvietojuma aprēķināšanas formulas (3.9 – 3.14) tiek iegūta kopējā kompensatora pārvietojumu:

$$\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_{21} + \Delta_{22} \quad (3.15)$$

Tad kopējā kompensatora pārvietojums pie jebkādiem slāņu augstumiem nesaspiežamiem materiāliem pie nosacījumiem, ka ne elastomēra starpslānis nedeformējas, rēķinās sekojoši:

$$\Delta_\Sigma = \frac{P_1 h}{\pi b^2 G \left[ 3.6 + 1.5 \frac{b^2}{h^2} \right]} + \frac{(P_2 - P_1) (h_1)}{\pi b^2 G \left[ 3.6 + 1.5 \left( \frac{b}{h_1} \right)^2 \right]} + \frac{(P_2 - P_1) (h_2)}{\pi b^2 G \left[ 3.6 + 1.5 \left( \frac{b}{h_2} \right)^2 \right]} \quad (3.16)$$

Vispārīgs „spēks – pārvietojums” raksturs mainīga stinguma kompensatoram pieņemot, ka atbalsti ir absolūti cieti, ne elastomēra starpslānis nedeformējas un gumija ir kā nespīējams materiāls, parādīts 3.6. att.



3.6. att. Principiāla „spēks – pārvietojums” sakarība

### 3.1.1.2. Neelastomēra starpslāņa izvēle

Elastomēra kompensatora sloģošana ar kādu slodzi saistās ar tiešu tā deformāciju un ir svarīgi, lai deformācijas nepārsniedz pieļaujamo robežu  $\varepsilon \leq 10 - 15 \%$ , kuras ietvaros var izmantot aprēķinos izmantotās formulas.

Deformācija, kad iztaisnojas ne elastomēra starpslānis:

$$\frac{\Delta_1}{h} = [\varepsilon_1] \quad (3.17)$$

deformācija tikai otrā darba etapam:

$$\frac{\Delta_{21}}{h_1} + \frac{\Delta_{22}}{h_2} = [\varepsilon_2] \quad (3.18)$$

un summārā deformācija:

$$[\varepsilon_{\Sigma}] = [\varepsilon_1] + [\varepsilon_2], \quad (3.19)$$

Kur  $0 \leq [\varepsilon_{\Sigma}] \leq 0.15$

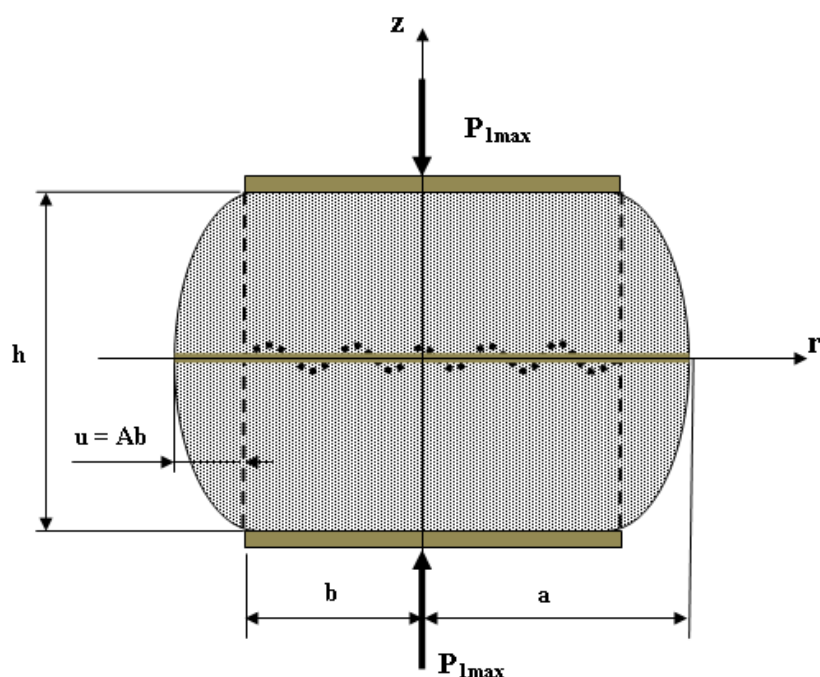
Tātad spēks, pie kura kompensators pāriet otrajā darba etapā (iztaisnojas ne elastomēra starpslānis), lai deformācijas nepārsniegtu pieļaujamo robežu, no (3.10), būs vienāds ar:

$$P_{1\max} = [\varepsilon_1] \pi G b^2 \left( 3.6 + 1.5 \frac{b^2}{h^2} \right) \quad (3.20)$$

Kopējais spēks ar kādu varētu slogot elastomēra kompensatoru, lai deformācijas nepārsniegtu pieļaujamo robežu un varētu izmantot iepriekš iegūtās aprēķinu formulas aprēķinās šādi:

$$P_{2\max} = P_{1\max} + \frac{[\varepsilon_2]}{\frac{h_1}{\pi G b^2 \left( 3.6 + 1.5 \frac{b^2}{h_1^2} \right) h} + \frac{h_2}{\pi G b^2 \left( 3.6 + 1.5 \frac{b^2}{h_2^2} \right) h}} \quad (3.21)$$

Zinot spēkus, pie kuriem deformācija nepārsniedz pieļaujamo robežu no pārvietojumu funkcijas (3.5) konkrētam gadījumam var viegli atrast ne elastomēra starpslāņa rādiusu un nepieciešamības gadījumā var arī izvēlēties tādu ne elastomēra slāņa rādiusu, lai otrais etaps iestātos agrāk vai vēlāk. 3.7.att. attēlā shematiski attēlots kompensators, kad iztaisnojas starpslānis.



3.7. att. kompensatora shēma, kad iztaisnojas ne elastomēra starpslānis

kur  $b$  – amortizatora rādiuss;

$a$  – iztaisnota starpslāņa rādiuss;

$A$  – konstante;

$u = Ab$  – pārvietojums  $r$  ass virzienā līdz iztaisnojas starpslānis.

Pie nosacījumiem  $u(r, z = 0)$  pārvietojums pa  $r$  asi būs maksimāls, tātad no tā varēs aprēķināt ne elastomēra starpslāņa rādiusu, kad tas ir iztaisnojies. No pārvietojumu funkcijas (3.5) pa  $r$  asi pie nosacījuma  $u(r = b, z = 0)$  iegūst kompensatora rādiusa pieaugumu:

$$u = Ar \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \Bigg|_{\substack{r=b \\ z=0}} = Ab \quad (3.22)$$

No nesaspiežamības nosacījumiem nav tilpuma deformācijas, tātad:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.23)$$

Nemot vērā (3.5) un (3.6), izpildot izteiksmi (3.23), iegūst:

$$2A \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{3\Delta_1}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) = 0 \quad (3.24)$$

No izteiksmes (3.24) izsakām konstanti  $A$ :

$$A = \frac{3\Delta_1}{4h} \quad (3.25)$$

Izmantojot iegūto izteiksmi (3.25) un (3.2) var aprēķināt ne elastomēra starpslāņa rādiusu, kad tas ir iztaisnojies:

$$a = b \left(1 + \frac{3\Delta_1}{4h}\right) \quad (3.26)$$

Pie kompensatora izgatavošanas tātad jāņem ne elastomēra starpslānis ar rādiusu  $a$  un jāsaņemas līdz amortizatora rādiusam  $b$ .

### 3.1.1.3 Stinguma pieauguma iestāšanās brīdis

Nepieciešamās kompensatora darbības iegūšanai svarīgi ir noteikt brīdi, kad kompensators kļūs stingrāks. No nosacījumiem (3.17) un (3.18) jāievēro, lai deformācijas katrā no etapiem nepārsniegtu pieļaujamās robežas. Pēc 3.7.att. attēlā parādītā kompensatora darbības grafika tā stingums katram darba etapam tiek rēķināts sekojoši:

$$c_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P_{1\max}}{\Delta_1}, \quad c_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P_{2\max} - P_{1\max}}{\Delta_2} \quad (3.27)$$

Brīdi, kad notiek stinguma maiņa var uzdot sekojoši:

$$c_2 = n c_1, \quad (3.28)$$

kur  $n > 1$  – koeficients, kas raksturo cik reizes pieaug stingums.

### 3.1.1.4 Kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins ievērojot gumijas vāju saspiežamību

Šajā nodaļā tiks veikti aprēķini, lai noteiktu gumijas saspiežamības ietekmi uz pilna cilindriskā gumijas kompensatora (3.2. att.) ar mainīgu stingumu spiedē darbību. Ne elastomēra starpslāņa deformācija šajā nodaļā vēl netiks ņemta vērā. Aprēķinu algoritms ir tāds pats kā 3.1.1.1. daļā.

Vispirms atradīsim nosēdes formulu pirmajam darba etapam. Izpildot tos pašus ģeometriskos robežnosacījumus (3.3) un (3.4) un pielietojot tos pašus pārvietojumu un hidrostatiskā spiediena vienādojumus (3.5) – (3.7) pilnās potenciālās enerģijas vienādojums (3.8) izskatīsies šādi [11]:

$$\Pi = 2 \pi G \int_0^h \int_0^b \left[ u_{,r}^2 + \left( \frac{u}{r} \right)^2 + w_{,z}^2 + \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,r})^2 + \right. \\ \left. + \frac{3\mu}{1+\mu} s (u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z}) - \frac{9\mu(1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} s^2 \right] r dr dz - P \Delta^i \quad (3.29)$$

Veicot iegūtās izteiksmes (3.29) integrēšanu, iegūst izteiksmi  $\Pi = \Pi(A^*, B^*, \Delta^*_1)$  un izpildot potenciālās enerģijas minimuma nosacījumu:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial A^*} = 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial B^*} = 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1^*} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

atrod konstantes  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $\Delta_1^*$  no kurām izsaka nosēdes atkarību no pieliktās slodzes saspiežamiem materiāliem:

$$\Delta_1^* = \frac{P h}{\pi b^2 G} \left[ 2,4 + \frac{3 D}{5 \left( 1 + \frac{1-2 \mu}{\mu} D \right)} \right]^{-1}, \quad (3.31)$$

$$\text{kur } D = 2 + \frac{5 b^2}{2 h^2}$$

Formula (3.31) ņem vērā Puasona koeficienta  $\mu$  reālo vērtību. Tādējādi var novērtēt gumijas slāņa vajās saspiežamības ietekmi uz sakarību „spēks – pārvietojums” un novērtēt formulas (3.10) pielietojuma robežas nesaspiežamam materiālam. Viegli pārbaudīt, ja formulā (3.105) ievieto  $\mu = 0,5$  patiešām iegūst (3.10).

Tā kā iegūtā formula (3.31) aprēķina nosēdi vienam gumijas slānim un dotajā gadījumā otrajam kompensatora darba etapam jāņem vērā nevis kopējais pieliktais spēks, bet gan spēka pieaugums, tad otrajā darba etapā kopējo nosēdi rēķina sekojoši:

$$\Delta_2^* = \Delta_{21}^* + \Delta_{22}^*, \quad (3.32)$$

kur

$$\Delta_{21}^* = \frac{(P_2 - P_1) h_1}{\pi b^2 G} \left[ 2,4 + \frac{3 D_1}{5 \left( 1 + \frac{1-2 \mu}{\mu} D_1 \right)} \right]^{-1} \quad (3.33)$$

$$\Delta_{22}^* = \frac{(P_2 - P_1) h_2}{\pi b^2 G} \left[ 2,4 + \frac{3 D_2}{5 \left( 1 + \frac{1-2 \mu}{\mu} D_2 \right)} \right]^{-1}, \quad (3.34)$$

kur

$$D_1 = 2 + \frac{5}{2} \left( \frac{b}{h_1} \right)^2;$$

$$D_2 = 2 + \frac{5}{2} \left( \frac{b}{h_2} \right)^2;$$

$\Delta_{21}^*$  – augšējā gumijas slāņa pārvietojums otrajā etapā ņemot vērā gumijas saspiežamību;

$\Delta_{22}^*$  – apakšējā gumijas slāņa pārvietojums otrajā etapā ņemot vērā gumijas saspiežamību;

$P_1$  - spēks, pie kura ne elastomēra starpslānis ir iztaisnojies;

$P_2$  - kopējais pieliktais spēks;

Apvienojot nosēdes aprēķināšanas formulas (3.30) – (3.34) tiek iegūta kopējā kompensatora pārvietojums ņemot vērā gumijas saspiežamību, pie nosacījumiem, ka ne elastomēra starpslānis nedeformējas:

$$\Delta_{\Sigma}^* = \Delta_1^* + \Delta_{21}^* + \Delta_{22}^*, \quad (3.35)$$

kur  $\Delta_1^*$  – kompensatora pārvietojums pirmajā etapā ņemot vērā gumijas saspiežamību;

$\Delta_{21}^*$  – augšējā gumijas slāņa pārvietojums otrajā etapā ņemot vērā gumijas saspiežamību;

$\Delta_{22}^*$  – apakšējā gumijas slāņa pārvietojums otrajā etapā ņemot vērā gumijas saspiežamību.

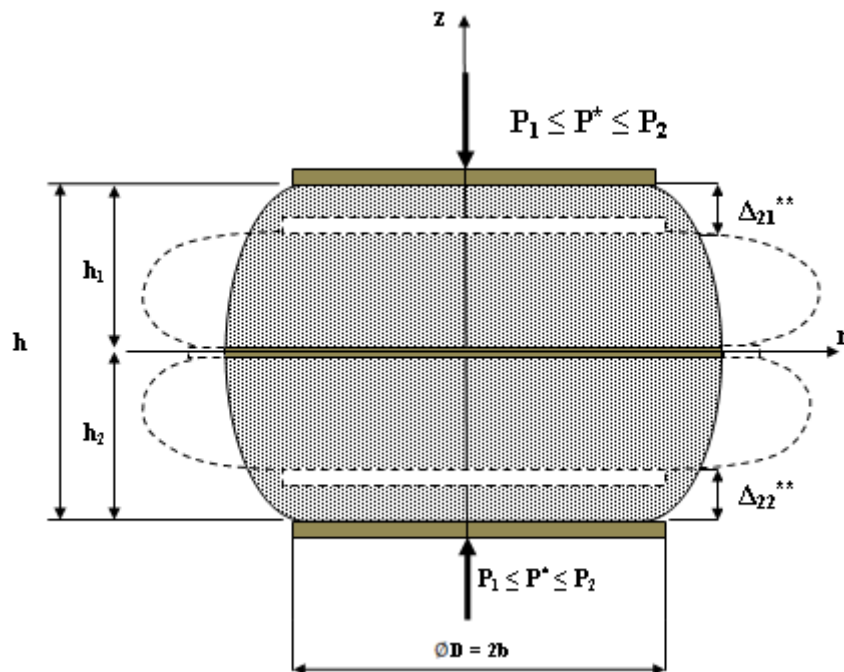
### 3.1.1.5 Kompensatora aprēķins saspiežamiem materiāliem, iekļaujot ne elastomēra starpslāņa deformāciju

Iepriekšējos aprēķinos tika atrastas aprēķinu formulas, kuras ļauj novērtēt Puasona koeficienta izvēles ietekmi uz nosēdes atkarību no pieliktā spēka, savukārt tā kā literatūrā nav atrodamas šāda tipa kompensatora aprēķinu formulas, kas ievēro ne elastomēra starpslāņa deformāciju, tad šajā daļā tiks atrastas aprēķinu formulas, kuras ļaus novērtēt ne elastomēra starpslāņa deformācijas ietekmi uz sakarību „spēks – pārvietojums” kas ļaus dot rekomendācijas to pielietojumam. Kompensatora nosēde jāaprēķina tikai otrajam darba etapam,

jo tikai tad notiek ne elastomēra starpslāņa deformācija, bet pirmajam darba etāpam nosēdes aprēķināšanai jālieto formula (3.37).

Konstrukcijas shēma slogojot mainīsies nedaudz savādāk (3.8. att.), jo šajā gadījumā tiks iekļauta ne elastomēra slāņa deformācija.

Dotajā gadījumā ģeometriskos robežnosacījumus un gaidāmos pārvietojumus pa  $r$  un  $z$  asīm apskatīsim tikai augšējam elastomēra slānim, jo otrs elastomēra slānis darbosies analogiski.



3.8. att. Kompensatora shēma ar starpslāņa deformāciju

Tā kā ne elastomēra starpslānis deformēsies, tad ģeometriskie robežnosacījumi izskatīsies šādi:

$$u(r, z = 0) = K_1 r, \quad u(r, z = h_1) = 0 \quad (3.36)$$

$$w(r, z = 0) = 0, \quad w(r, z = h_1) = -\Delta_{z1}^{**} \quad (3.37)$$

Ne elastomēra slānim apskatīsim tikai stiepes deformāciju, jo spiedē tās ir minimālas. Izvēlamies pārvietojumu funkcijas šim gadījumam gumijai un ne elastomēra slānim, kuras apraksta paredzamos deformācijas pārvietojumus, obligāti apmierina ģeometriskos robežnosacījumus (3.36) un (3.37) un hidrostatiskā spiediena funkciju, pieraksta šādi:

$$u = A_1 r z(z - h_1) + \frac{K_1 r}{h_1} (h_1 - z) \quad (3.38)$$

$$w = C_1 \left( \frac{z^3}{3} - \frac{z^2 h_1}{2} \right) + K_2 z \quad (3.39)$$

$$s = B_1 \left( 1 - \frac{4z^2}{h_1^2} \right) \quad (3.40)$$

$$u_0 = K_1 r; w_0 = 0; s_0 = 0, \quad (3.41)$$

kur funkcijas ar indeksu 0 attiecas uz ne elastomēra starpslāni.

No funkcijām (3.36) – (3.41):

$$-\frac{C_1 h_1^3}{6} + K_2 h_1 = -\Delta_{21}^{**} \quad (3.42)$$

Apvienojot izteiksmes (3.36) – (3.42) un ievietojot tās pilnas potenciālās enerģijas minimuma funkcijā (2.14) tā pārrakstās šādi:

$$\begin{aligned} \Pi = 2 \pi G \int_0^{\frac{h}{2}} \int_0^b & \left[ u_{,r}^2 + \left( \frac{u}{r} \right)^2 + w_{,z}^2 + \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,r})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3\mu}{1+\mu} s (u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z}) - \frac{9\mu (1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} s^2 \right] r dr dz + \\ & + 2 \pi G_0 h_0 \int_0^b \left[ u_{0,r}^2 + \left( \frac{u_0}{r} \right)^2 \right] r dr - (P_2 - P_1) \Delta_{21}^{**}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

kur  $G_0$  – ne elastomēra starpslāņa bīdes modulis;

$h_0$  – ne elastomēra starpslāņa augstums.

Veicot iegūtās izteiksmes (3.43) integrēšanu iegūst izteiksmi  $\Pi = \Pi(A_1, B_1, K_1, K_2, \Delta_{21}^{**})$  un izpildot potenciālās enerģijas minimuma nosacījumu:

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial A_1} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial B_1} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial K_1} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial K_2} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_{21}^{**}} = 0 \right. \quad (3.44)$$

atrod konstantes  $A_1, B_1, K_1, K_2, \Delta_{21}^{**}$ , no kurām izsaka pārvietojuma atkarību no pieliktās slodzes saspižamiem materiāliem, ievērojot starpslāņa deformācijas ietekmi. Otrajā darba etapā kopējo nosēdi rēķina sekojoši, saskaitot katra gumijas slāņa atsevišķo pārvietojumu:

$$\Delta_2^{**} = \Delta_{21}^{**} + \Delta_{22}^{**} \quad (3.45)$$

$$\Delta_{21}^{**} = \frac{(P_2 - P_1) h_1 \left(1 + \frac{0,625 D_1}{\chi_1}\right)}{\pi b^2 G} \left(2,4 + \frac{3 D_1}{5 \left(1 + \frac{1 - 2\mu}{\mu} D_1\right)}\right)^{-1} \quad (3.46)$$

$$\Delta_{22}^{**} = \frac{(P_2 - P_1) h_2 \left(1 + \frac{0,625 D_2}{\chi_2}\right)}{\pi b^2 G} \left(2,4 + \frac{3 D_2}{5 \left(1 + \frac{1 - 2\mu}{\mu} D_2\right)}\right)^{-1}, \quad (3.47)$$

kur  $\chi_1 = \frac{2G_0 h_0}{G h_1};$

$$\chi_2 = \frac{2G_0 h_0}{G h_2};$$

$G_0$  – ne elastomēra starpslāņa bīdes modulis;

$h_0$  – ne elastomēra starpslāņa augstums;

$G$  – gumijas slāņa bīdes modulis;

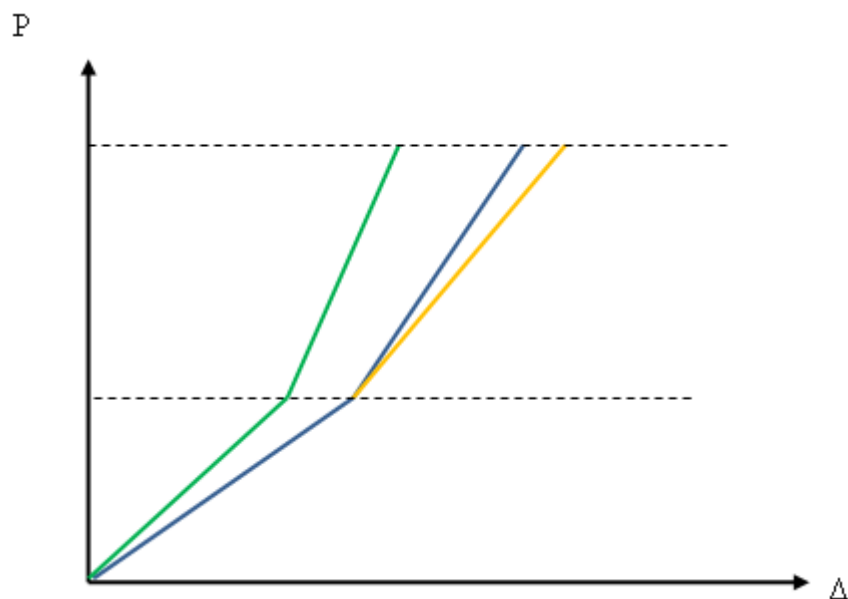
$h_1$  – augšējā gumijas slāņa augstums;

$h_2$  – apakšējā gumijas slāņa augstums.

Tad apvienojot pārvietojumu aprēķināšanas formulas (3.30), (3.44) – (3.47) tiek iegūta kopējā kompensatora nosēde saspižamiem materiāliem ņemot vērā ne elastomēra starpslāņa deformāciju:

$$\Delta_{\Sigma}^{**} = \Delta_1^* + \Delta_{21}^{**} + \Delta_{22}^{**} \quad (3.48)$$

Apskatīsim iespējamās kompensatora darba grafikus (3.9.att.):



3.9. att. Principiāls kompensatora darbības grafiks aprēķināts dažādu formulu palīdzību kur

- pēc formulas (3.16) nesaspiežamiem materiāliem bez starpslāņa deformācijas;
- pēc formulas (3.35) saspiežamiem materiāliem bez starpslāņa deformācijas;
- pēc formulas (3.48) saspiežamiem materiāliem iekļaujot starpslāņa deformāciju

### 3.1.1.6. Kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins ievērojot fizisku nelinearitāti

Izpētīsim kā uz kompensatora stingumu ietekme gumijas fiziska nelinearitāte, kura aplūkota 2.4 nodaļā. Kā piemēru (analoģiski var aprēķināt stingumu katram kompensatora darba etapam) aplūkosim nelinearitātes ietekme uz cilindriska kompensatora stingumu (3.4.att.).

Fizikāli lineāram materiālam ir iegūts:

$$\begin{aligned} \Delta^* &= Pk_0^{-1} \\ u^* &= \frac{3}{4} \cdot \Delta^* D_0^{-1} \frac{r}{h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right); \\ \omega^* &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta^*}{h} \left( z - \frac{4z^3}{3h^2} \right); \\ k_0^* &= \frac{\pi b^2 D_1}{h D_0}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

kur  $b, h$  – atbilstoši gumijas elementa rādiuss un augstums;

$u^*, w^*$  - pārvietojumi asu  $r$  un  $z$  virzienos;

$\Delta^*$  -nosēde, zem spēka  $P$ ,

$k_0$  - amortizatora stingums

$$D_0 = 1 + (1 - 2\mu)(1 + 1.25\rho^2);$$

$$D_1 = 3.6 + 1.5\rho^2;$$

$$\rho = b/h.$$

Darbā [88] parādīts, ja ir lineārais risinājums  $\Delta^*$ , tad risinājums ar fizisku nelinearitāti izskatīsies šādi:

$$\Delta = d_0\Delta^* \quad (3.50)$$

No (2.174) un (3.29) priekš cilindriskā kompensatora seko:

$$L = \int_V f^3 dV = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* + \varepsilon_z^*}{\Delta^*} \right) r dr dz = \frac{27}{35} \left( \frac{1 - D_0}{D_0} \right)^3 \rho^2. \quad (3.51)$$

$$C_1 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} \cdot \frac{P^3}{G^3 k_0^3} \chi_1 L;$$

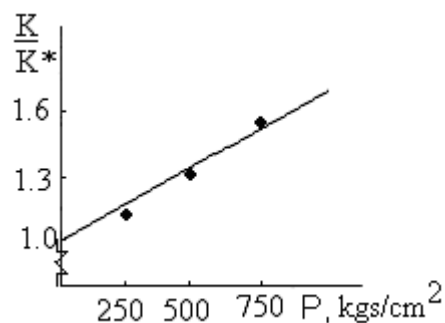
$$L = \int_V f^3 d; \quad (3.52)$$

$$B = \frac{3(1 - 2\mu)G^2 k_0^2}{4(1 + \mu)\chi_1 PL}.$$

Meklējamās plānslāņa gumijas-metāla- kompensatora sakarības „spēks – pārvietojums” pie saspiešanas galīgais veids, ievērojot fizikālo nelinearitāti, ir sekojošs:

$$\Delta = d_0\Delta^* = B \left( \sqrt{1 + 2B^{-1}} - 1 \right) \frac{P}{Gk_0} \quad (3.53)$$

Tā kā lielumi  $G$  un  $\mu$  nav doti, tad nelinearitātes efekta noteikšanai, izmantojot (3.53), pieņemsim:  $G=10 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu=0.498$

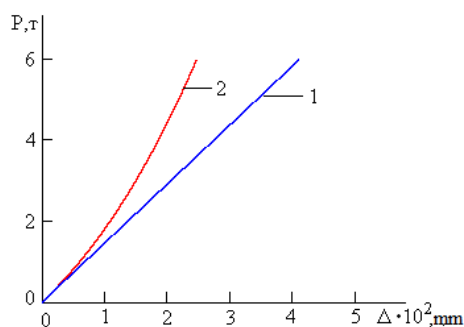


3.5.att Attiecības  $K/K^*$  atkarība no slodzes

Pēc 3.5 att. esošā grafika apstrādes ar (2.152) – (2.156) palīdzību iegūstam:  $|\chi_1| = 2.91 \cdot 10^{-2}$ .

Tad kompensatora pārvietojumu var aprēķināt pēc formulas:

$$\Delta = \frac{3(1-2\mu)}{4(1+\mu)} \cdot \frac{G^2 k^* o^2}{\chi_1 PL} \left( \sqrt{1 + \frac{8(1+\mu)\chi_1 PL}{G^2 k^* o^2}} - 1 \right) \frac{P}{Gk^* o} \quad (3.54)$$



3.6. att. Sakarība „spēks - pārvietojums” cilindriskam kompensatoram.  
1 – lineārs risinājums; 2 –nelineārs risinājums.

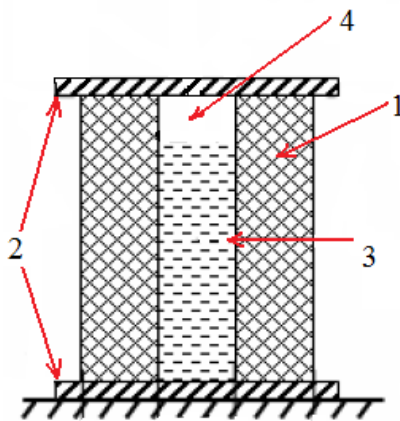
### 3.2. Elastomēra kompensators ar šķidruma ieslēgumiem

Šajā nodaļā ir apskatīta aprēķināšanas un projektēšanas metode elastomēra kompensatoram ar šķidruma ieslēgumiem. Galvenās priekšrocības elastomēra kompensatoriem ar šķidruma ieslēgumiem ir: iespēja dabūt kompensatorus ar mainīgu stingumu, tādiem izstrādājumiem ir mazi gabarīta izmēri, svars un cena, apkalpošanas vienkāršība – nav nepieciešama eļļošana, augsti drošības rezultāti – izstrādājums darbības laikā nodilst pakāpeniski, tā nozīme, ka pastāv laika periods remontam vai profilaksei. Šāda tipa izstrādājumiem mainīga stinguma diapazons ir ļoti plašs, pateicoties elastomēra kārtas ieslēgumu daudzveidībai (dažāda tipa eļļas, šķidrumi).

Piedāvātie kompensatori, mazo deformāciju diapazonā, nodrošina mainīgu stingumu, nelineāru raksturojumu „spēks- pārvietojums” pie dažādiem slodzes līmeņiem. Aprēķina metodika tika balstīta uz potenciālas enerģijas minimuma principa. Kā piemērs, ir apskatīts analītiskais aprēķins gredzenveida cilindriskā elastomēra kompensatoram.

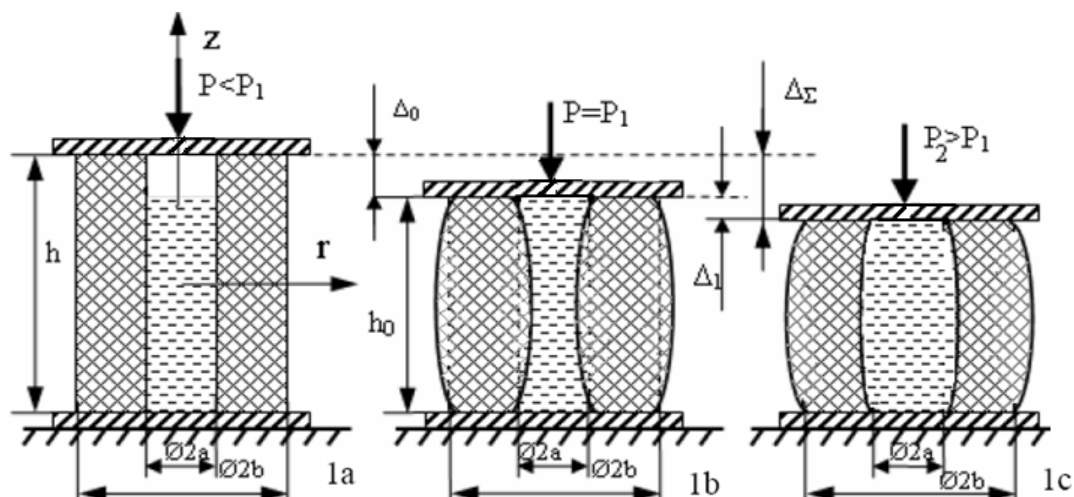
### 3.2.1. Elastomēra kompensatora ar šķidruma ieslēgumiem konstrukcija un darbības princips

Aplūkotam cilindriskam elastomēra kompensatoru ar šķidruma ieslēgumiem ir divi dažādi stinguma posmi ( $c_2 > c_1$ ): I. posms – deformācija  $0 - \beta\%$  un stingums  $c_1$ , II. posms – deformācija  $-\beta\% \div 15\%$  un stingums  $c_2$  (kur:  $\beta\% < 10\% \div 15\%$ ). Elastomēra tilpumam jābūt pēc iespējas mazākam, izstrādājuma izmēru samazināšanai un materiāla ekonomijas nolūkam. Konstrukcijai jābūt pēc iespējas vienkāršai, lai tādi kompensatori būtu droši un plaši pielietojami tehnikā. Piedāvāta kompensatora konstrukcija parādīta shēmā 3.7.att. :



3.7.att. Gredzenveida cilindriskā elastomēra kompensatora ar šķidruma ieslēgumiem konstrukcijas shēma

- kur 1– elastomēra slānis;  
 2 – nedeformējami pamati;  
 3 – šķidrums;  
 4 – iekšējais tilpums, kurš nav aizpildīts ar šķidrumu.



3.8. att. Elastomēra kompensatora ar šķidruma ieslēgumiem darbības shēma

Paskaidrojumi:

1a. – Slogošanas shēma, iekšā ir šķidrums un gaiss;

1b. – Šķidrums aizpildīja visu iekšēju tilpumu;

1c. – Saspiešanas procesu ietekmē šķidruma klātbūtne.

kur  $2a$  – iekšējais diametrs;

$2b$  – ārējais diametrs;

$h$  – elastomēra slāņa augstums;

$h_0$  – elastomēra slāņa augstums, kad šķidrums aizpildīs visu iekšējo tilpumu;

$\Delta_0$  – deformācija, pie kuras viss gaiss ir izspiests ārā;

$\Delta_1$  – deformācija, kas radās, turpinot saspiešanu, pēc gaisa izspiešanas;

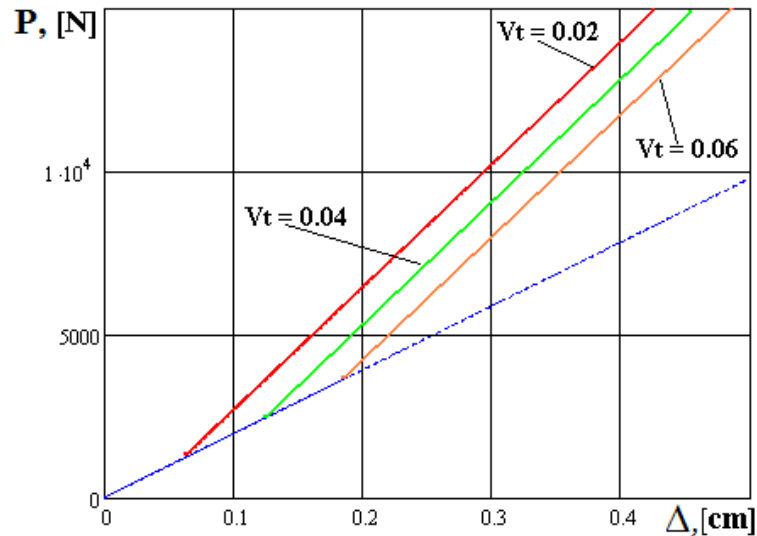
$\Delta_\Sigma = \Delta_0 + \Delta_1$  – summāra deformācija.

$P$  – pieliktais spēks;

$P_1$  – pieliktais spēks, pie kura gaiss ir izspiests ārā;

$P_2$  – pieliktais spēks, pie kura saspiešanas procesu ietekmē šķidrums, ievērojot mazo deformāciju nosacījumu (deformācija nevar pārsniegt 10 - 15% robežas).

Izmantojot tādas konstrukcijas kompensatoru, mainot iekšējās kameras piepildīšanas līmeni, pastāv iespēja mainīt pārvietoējuma lielumu, pie kuras notiek stinguma pieaugums. Tas ir ļoti izdevīgi, jo kompensatora ekspluatācijas laikā ir iespēja mainīt kompensatora stinguma raksturlīkni (stinguma pieauguma iestāšanās brīdi), mainot iekšējās kameras piepildīšanas līmeni. 3.9.att. ir parādīta gredzenveida cilindrisks kompensators ar šķidruma ieslēgumiem stinguma raksturlīkne pie dažādiem iekšējās kameras piepildīšanas līmeņiem.



3.9. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” elastomēra gredzenveida cilindriskam kompensatoram ar šķidruma ieslēgumiem, ar dažādu iekšējās kameras piepildīšanas līmeni.

Apzīmēsim ar šķidrumu nepiepildītas iekšējās kameras tilpumu ar  $V_t$ :

$$V_t = (V_a - V_q) / V_a \quad (3.55)$$

kur  $V_a$  - iekšēja dobuma tilpums;

$V_q$  - šķidruma tilpums.

Apskatīsim kompensatora (3.8.att.) konstrukcijas principu. Redzamais kompensators sastāv no diviem metāla pamatiem un gumijas cilindriskā elementa, kurš ir tukšs no iekšpuses un daļēji aizpildīts ar šķidrumu. Pie gumijas elementa ir pievulkanizētas metāliskas pamata daļas (saspiešanās procesa, gaisam konstruktīvi paredzēta iespēja tikt ārā).

Kompensatora darbība sastāv no diviem etapiem:

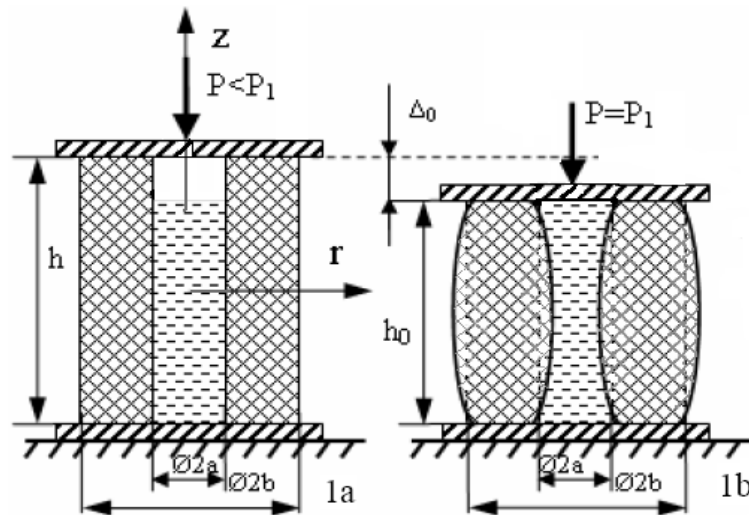
pirmais etaps: slogojot elastomēra cilindrisku kompensatoru ar spēku  $0 \leq P < P_1$  notiek elastomēra kameras saspiešana un tas darbojas kā parastais gredzenveida cilindriskais elastomēra kompensators. Kad kamera tiek spiesta, tajā esošais gaiss tiek izspiests ārā. Kad viss gaiss ir izspiests, vārsts aizveras un ar to pirmais darbības etaps ir beidzies.

otrais etaps: slogojot elastomēra cilindrisku kompensatoru ar spēku  $P_2 \geq P_1$  kompensatora stingums ievērojami pieaug, jo gaisa iekšā vairs nav, vārsts ir aizvērts un tālāk iekšējais šķidrums pretojās saspiešanas procesam, iedarbojoties ar kameras iekšējam sienām.

### 3.2.2. Elastomēra kompensatora ar šķidruma ieslēgumiem analītiskais aprēķins nesaspiežamiem materiāliem

Veiktajos aprēķinos gumija tiek aprakstīta kā viendabīga bez porām un tukšumiem, izotropa, elastīga, sakarības starp spriegumiem  $\sigma_{ij}$  un deformācijām  $\epsilon_{ij}$  var aprakstīt ar lineāriem vienādojumiem (2.7) – (2.12), gumijas slāņa deformācijas ir mazas  $0 < \epsilon < 10\% \div 15\%$ . Pieņemam, ka kompensators pakļauts statiskam slogojumam, augšējais un apakšējais kompensatora balsti ir pielīmēti pie gumijas, tie ir absolūti cieti un nedeformējās. Visi aprēķini ir balstīti uz pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu.

I. etapā slogojot kompensatoru notiek elastomēra slāņa saspiešana (7.4.att. 1.a). Saspiešanās procesā gaiss, kas aizņēma ar šķidrumu neaizpildīto iekšējo kameras tilpumu, izplūst ārā. Kad saspiešanas spēks ir sasniedzis vērtību  $P_1$  (7.4.att. 1.b), viss gaiss ir izspiests ārā un kompensatora nosēde ir vienāda ar vērtību  $\Delta_0$ . Ar to arī beidzas I. etaps.



3.10.att. I. etapa slogošanas shēma

Visi aprēķini ir balstīti uz pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu ar funkcionāli  $J(u_i, s)$  [86]:

$$J = G \int_V \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j} u_{j,i} + u_{i,j} u_{j,i}) + \frac{3\mu}{1+\mu} s u_{i,i} - \frac{9(1-2\mu)}{4(1+\mu)^2} s^2 \right] dV - \int_{F_\sigma} p_i u_{ni} dF \quad (3.56)$$

kur  $G$  – bīdes modulis;

$\mu$  – Puasona koeficients;

$p_i$  – ārēja spēka intensitāte;

$s$  – hidrostatiska spiediena funkcija;

$u_i$  – pārvietojumus;

$F$  – pieliktā spēka laukums;

$V$  – tilpums

$i, j$  – koordinātu sistēma.

Elastomērs un šķidrums tiek uzskatīts par vāji saspiežamiem materiāliem. Elastomēra bīdes modulis  $G$  ir daudzkreiz mazāks nekā elastomēra saspiešanas modulis  $K = 2,13 \div 2,81 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$  [88] un šķidruma saspiešanas modulis  $K_q = 1,96 \div 2,41 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$  [43] Mūsu gadījumā elastomēra slānis ir pietiekami augsts un vājas saspiežamības faktoru varam neņemt vērā, jo pārvietojums notiek pateicoties elastomēra ģeometriskai deformācijai, bet ne jau elastomēra apjomīgas saspiešanas dēļ. Tālāk aprēķinos pieņemam, ka šķidruma tilpums ir konstants. Izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu, nosacījumu, ka šķidruma tilpums ir konstants, varam ievietot funkcionālī (3.56) izmantojot Lagranža reizinātājus. Pie mazām deformācijām, šķidruma tilpuma izmaiņu  $\Delta V_q$  var pierakstīt [43],[88]:

$$\Delta V_q = \int_{F_q} u_n(F_q) dF, \quad (3.57)$$

kur  $F_q$  – gredzenveida griezuma amortizatora virsma;

$u_n$  – punktu novirze pa gredzenveida griezuma virsmas normāli.

Izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu un ievietojot izteiksmi (3.57) izteiksmē (3.56), mēs iegūsim:

$$J_q(u_i, s) = J(u_i, s) + \lambda \int_{F_q} u_n(F_q) dF, \quad (3.58)$$

Kur  $\lambda$  – ir Lagranža reizinātājs.

Ja iekšējais dobums ir piepildīts ar šķidrumu, mums nav jāņem vērā šķidruma vāja saspiežamība, jo tas ir tas pats process, kas notiek ar elastomēru. Šķidruma spiediens  $p_q$  ir proporcionāls šķidruma tilpuma izmaiņai  $\Delta V_q$  [43]:

$$p_q = K_q \Delta V_q / V_q, \quad (3.59)$$

kur  $V_q$  – šķidruma sākuma tilpums

Lai īstenotu pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu izmantosim funkcionāli:

$$J_q(u_i, s) = J(u_i, s) + \frac{0.5K_q(\Delta V_q)^2}{V_q}, \quad (3.60)$$

kur  $\frac{0.5K_q(\Delta V_q)^2}{V_q}$  -šķidruma spiediena darbs.

Pie mazām deformācijām, šķidruma tilpuma izmaiņu var aprēķināt pēc formulas (3.57.).

Saskaņa ar Ostrogradska – Gausa teorēmu [90]:

$$\int_{F_q} u_n(F_q) dF = \int_{V_q} \text{div } u dV \quad (3.61)$$

No (3.59) – (3.61), apkopojot izteiksmes, lai samazinātu funkcionāli  $J_q(u_i, s)$  un  $J_q^*(u_i, s)$ , iznāk, ka Lagranža reizinātais  $\lambda$  izteiksmē (3.58) var izteikt ar šķidruma spiedienu  $p_q$ .

Piemēra ir apskatīts gadījums, kad kompensators tiek slogots, iekšējais dobums (ar tilpumu  $V_a = 2\pi b^2 h$ ) nav līdz galam piepildīts ar šķidrumu (šķidruma tilpums  $V_q = \pi b^2 h_1 < V_a = \pi b^2 h$  - ). I. etapa sloģošanas shēmu mēs redzam 3.10. att. (šķidrums tiek uzskatāms par nesaspiežamu).

Kamēr iekšējās kameras tilpums ir lielāks nekā šķidruma tilpums, šķidruma klātbūtni var neņemt vērā (3.10. att. 1a. līdz 1b.).

Pierakstām pārvietojumu sakarības [59], [71], [86]:

$$u_r = \frac{\left( Ar + \frac{B}{r} \right) \sin \pi z}{h} \quad (3.62)$$

$$u_z = -\frac{2h}{\pi} A \left( \frac{\cos \pi z}{h} - 1 \right)$$

Pārvietojumiem ir jāapmierina ģeometriski robežu nosacījumi:

$$u_z(r, h) = -\Delta, \text{ ja } A = \frac{-\pi\Delta}{4h} \quad (3.63)$$

un elastomēra nesaspiežamības nosacījumu:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.64)$$

Spēku  $P$  atrodam no nosacījuma, kad šķidrums ir ieņēmis visu iekšējo tilpumu:

$$P = \frac{\Delta G \pi (b^2 - a^2)}{h} c, \quad (3.65)$$

kur  $\alpha = a/b$ ;

$\rho = b/h$ .

$$c = (3.6 + 1.5\rho^2(1 + \alpha^2)) - 6\rho^4 \frac{(1 - \alpha^2)\alpha^2}{0.8(1 - \alpha^2) - 4\rho^2\alpha^2 \ln \alpha}$$

Atkarībā no kameras piepildīšanas līmeņa – izsākam nosēdi  $\Delta_0$  – pārvietojums, pie kuras šķidrums piepildīs visu kameras tilpumu (3.10.att. 1.b).

$$\Delta V_a = 2\pi \int_0^h u_r(b, z) R_z dz + 2\pi \int_0^b u_z(r, h) r dr, \quad (3.66)$$

kur  $\Delta V_a$  - iekšējās kameras tilpuma izmaiņa.

Ņemot vērā (3.65) spēku  $P_I$  var atrast no formulas (3.67)

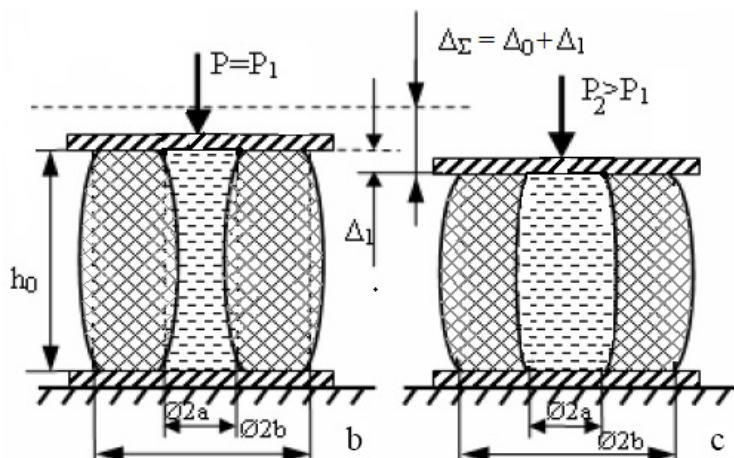
$$P_1 = \frac{\Delta_0 G \pi (b^2 - a^2)}{h} c \quad (3.67)$$

kur  $\Delta_0$  – kompensatora pārvietojums, pie kuras šķidrums pilnīgi aizpildīs kameras tilpumu.

Bet jāievēro, ka aprēķins attiecas tikai uz mazo deformāciju diapazonu. (līdz 15%), t.i.  $0 < \Delta_0 < 0,15 h$ . Vērtību  $\Delta_0$  mēs pieņemam, vai nosākam projektēšanas gaitā.

II. etapā ievērojam, ka šķidruma tilpums nemainās, tātad iekšējās kameras tilpums arī nemainīsies. Stingums ievērojami pieaug, jo viss gaiss ir izspiests un tagad saspiešanas procesam pretojas arī iekšējais šķidrums, spiežot uz kameras iekšējām sienām. Kad spiedes

spēks kļūst lielāks par  $P_1$  vērtību (3.11.c att.), zinot, ka šķidruma tilpums ir konstants, turpinot saspiešanu, elastomēra slāņa izliekums pārvietojas uz ārējo pusi.



3.11.att. II etapa sloģšanas process

kur  $\Delta_1$  – nosēde II. etapā.

Lai shēma 3.11.c att. darbotos tā kā tas ir paredzēts, tad izteiksmēs (3.62) – (3.64) jāizpildās šķidruma tilpuma konstantes nosacījumam, kad  $P_2 > P_1$ :

$$\Delta V_q = \int_{F_q} u_n(F_q) dF = 0 \quad (3.68)$$

kur  $\Delta V_q$  - šķidruma tilpuma izmaiņa.

Kompensatora pārvietojumu  $\Delta_1$  (pārvietojums II. etapā) (sk.3.11.att.) atrodam izmantojot Ritca metodi un funkcionāli (3.60) un sakarības (3.62) – (3.64) un (3.68):

$$P_2 = \frac{\Delta G \pi (b^2 - a^2)}{h} D \quad (3.69)$$

kur  $D = 3.6 + 1.5\rho^2(1 + \alpha^2)$ ;

$\rho = b/h$ ;

$\alpha = a/b$ ;

$h$  – elastomēra slāņa augstums;

$a$  – kameras iekšējais rādiuss;

$b$  – kameras ārējais rādiuss.

### 3.2.3. Elastomēra kompensatora ar šķidrums ieslēgumiem analītiskais aprēķins saspižamiem materiāliem

Analītiskā sakarība „spēks - pārvietojums” elastomēra amortizatoram ir iegūtas, uzskatot, ka elastomēra slāņa ģeometrija dod iespēju pieņemt, ka elastomērs ir nesaspiežams (Puasona koeficients  $\mu = 0.5$ ). Vājas saspiežamības ietekmi, kas ir saistīta ar tilpuma deformāciju, rēķinot sakarību „spēks- pārvietojums”, var pietiekami precīzi noteikt ar tuvinātām metodēm, kas aplūkotas 2.2 nodaļā, ievērojot tilpuma deformācijas sakarības :

$$u_{j,j} = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \quad (3.70)$$

kur  $u_{j,j}$  – tilpuma deformācijas attiecība.

Sakarību (3.70) var izteikt ar integrāli:

$$\theta = \int u_{j,j} dV = \int \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} s dV = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \int s dV , \quad (3.71)$$

kur  $\theta = \frac{\Delta V}{V}$  – elastomēra slāņa tilpuma deformācija;

$\Delta V = \Delta_1^* \cdot F$  - elastomēra slāņa tilpuma izmaiņa;

$V = F \cdot h$  - kompensatora elastomēra slāņa tilpums brīvā stāvoklī;

$F = \pi(b^2 - a^2)$  - elastomēra šķērsriezuma laukums.

$\Delta_1^*$  - kompensatora pārvietojums ar hidrostatisku spiedienu telpiski spiestam elastomēra slānim I etapā bez šķidrums ietekmes.

Daudzi gredzenveida cilindriska kompensatora aprēķini pierāda [59]: ja attiecība  $b/h < 4$ , tad mīksto gumiju gadījumā (Puasona koeficients  $\mu$  vērtība tuva 0.5), vājas saspiežamības efektu var neņemt vērā. Tāpēc izskatīsim gadījumu  $b/h > 4$ . Elastomēra slāņiem var ņemt hidrostatiska spiediena funkcijas vidējo vērtību:

$$s(r, z) \approx \frac{P}{GF} \quad (3.72)$$

No (3.70) – (3.72) iegūstam pārvietojuma vienādojumu priekš telpiski saspiestam elastomēram kompensatorā bez šķidrums ietekmes:

$$\Delta_I^* = \frac{3Ph(1-2\mu)}{\pi(b^2 - a^2)2(1+\mu)G} \quad (3.73)$$

Kopējais kompensatora pārvietojuma lielums bez šķidrums ietekmes būs vienāds ar:

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_I + \Delta_I^* \quad (3.74)$$

kur pārvietojums  $\Delta_I$  aprēķinam no formulas (3.65) un  $\Delta_I^*$  no formulas (3.73).

No [59], šķidrums tilpuma modulis  $K_q$  apmēram vienāds ar elastomēra tilpuma moduli  $K$ , tad varam pieņemt, ka:

$$K_q \approx K = \frac{2G(1+\mu)}{3(1-2\mu)} \quad (3.75)$$

No (3.70), (3.73) un (3.75) iegūstam kompensatora pārvietojuma izteiksmi priekš saspiestam elastomēra slānim, ņemot vērā, ka šķidrums pilnībā aizpilda iekšēju kompensatora apjomu:

$$\Delta_{II}^* = \frac{3Ph(1-2\mu)}{\pi \cdot b^2 \cdot 2(1+\mu)G} \quad (3.76)$$

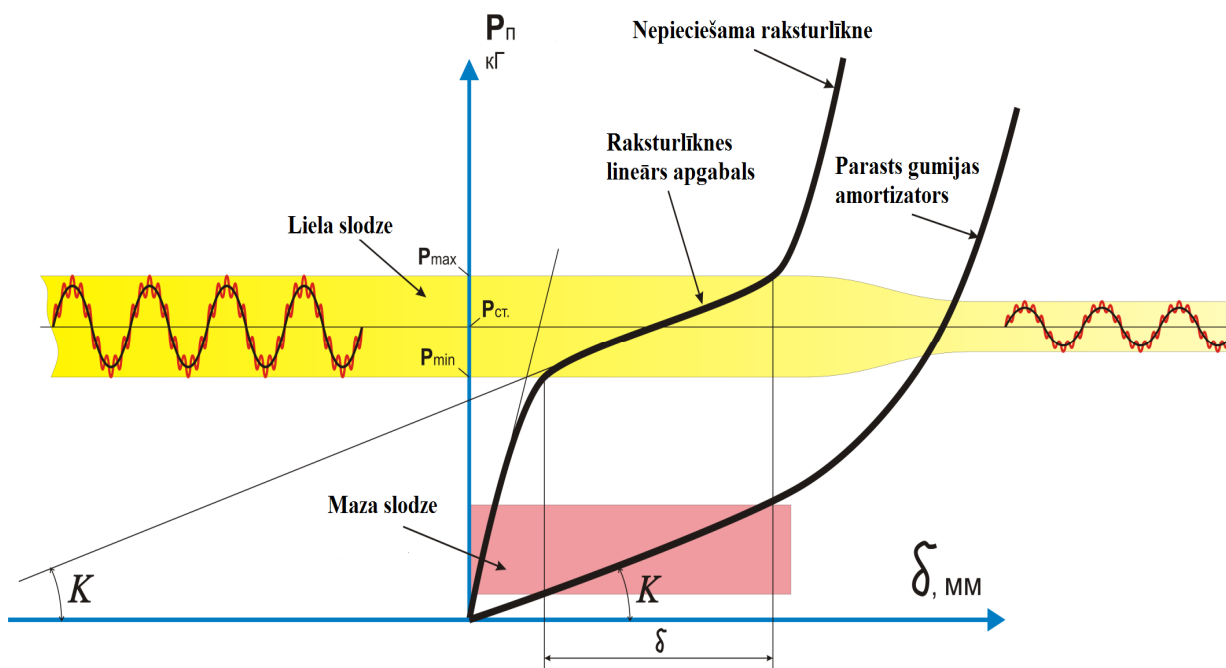
Tad kopējais kompensatora pārvietojuma lielums būs vienāds ar:

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_I + \Delta_I^* + \Delta_{II} + \Delta_{II}^* \quad (3.77)$$

Kur pārvietojumus  $\Delta_I$  un  $\Delta_{II}$  aprēķinam izmantojot formulas (3.65) un (3.69) un pārvietojumus  $\Delta_I^*$  un  $\Delta_{II}^*$  izmantojot formulas (3.73) un (3.76).

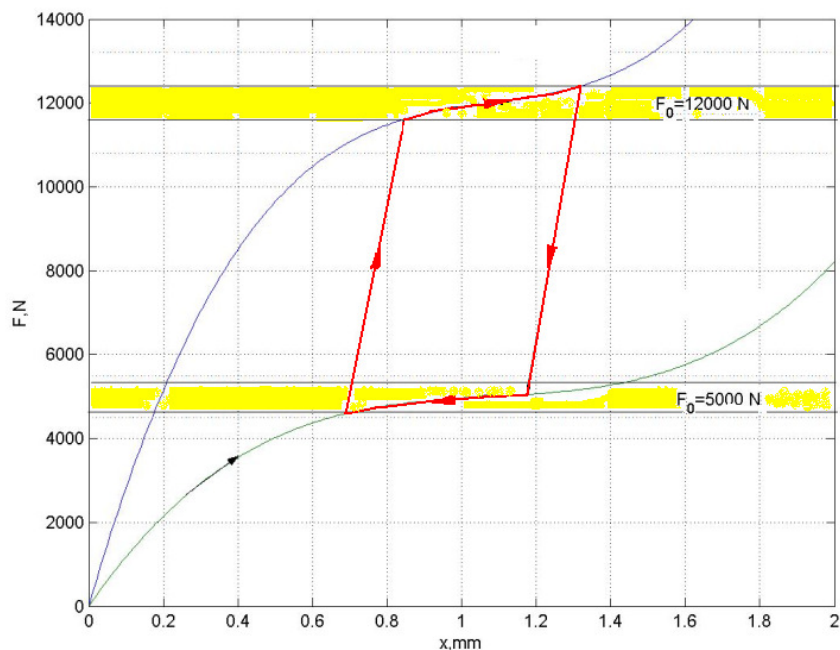
### 3.3. Gumijas kompensators ar mainīga augstuma sānu balstu

Gumijas amortizatoru plašs pielietojums prasa arvien vairāk jaunus konstruktīvus risinājumus. Mūsdienās konstrukcijas ir nepieciešams, lai amortizatoru stinguma raksturlīknes būtu nelineāras. Daudzas iekārtās pielieto amortizatorus, kuriem stingums pieaug, kopā ar slogojuma lielumu. Tādām iekārtām ir konstruēti dažādi gumijas amortizatoru varianti. Amortizatora stinguma palielināšanai parasti izmanto sānu balstu, kurš pie noteiktas deformācijas ierobežo elastomēra deformāciju. Bet pēdējos gados rodas nepieciešamība izmantot amortizatorus, kuriem stingums samazinās, kad slogojums palielinās. Piemēram, tādi amortizatori ir nepieciešami lidmašīnas dzinēju stiprināšanai [2]. Sakarā ar ekoloģiskām normām izmainās lidmašīnu dzinēju parametri, un rodas nepieciešamība slāpēt zemas frekvences vibrācijas, kuras izraisa lidmašīnas dzinējs. Attēlā 3.12.att. parādīta nepieciešamā amortizatora stinguma raksturlīkne.



3.12. att. Lidmašīnas dzinēja amortizatora stinguma raksturlīkne [2]

Turklāt lidojumā jābūt iespēja mainīt amortizatora stingumu (lineāra apgabala atrašanās vietu), atkarība no dzinēja darbības režīma (3.13.att.)

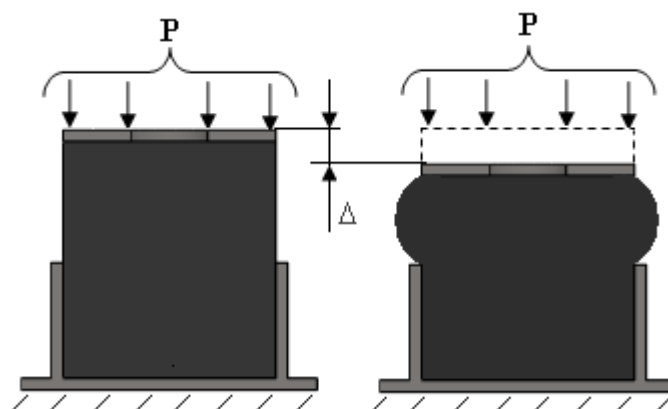


3.13. att. Lidmašīnas dzinēja amortizatora raksturlīknes ar regulējamu stingumu [2]

Kā redzams 3.12. att. parasts gumijas amortizators nevar nodrošināt tādu stinguma raksturlīkni. Tāpēc ir aktuāli izstrādāt tādu gumijas amortizatora konstrukcija, kura spēj to realizēt.

### 3.3.1 Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sanu balstu konstrukcija un darbības princips

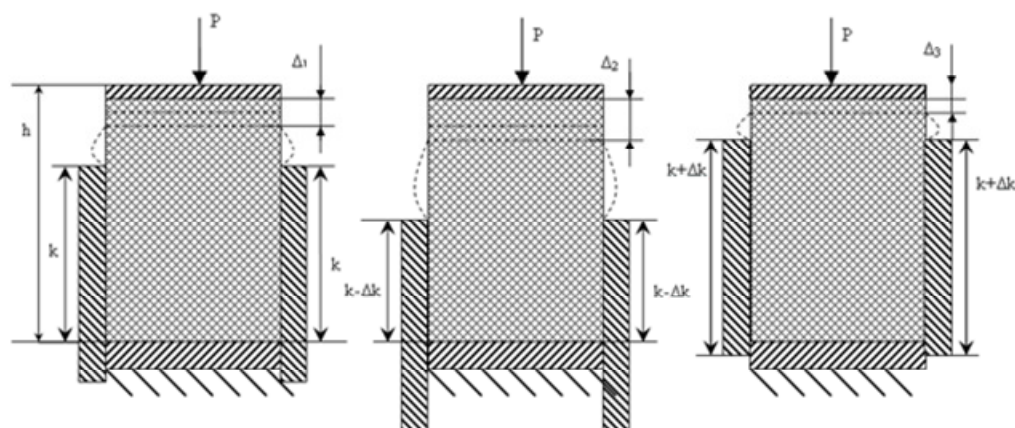
Šajā nodaļā tika aplūkots gumijas kompensators ar mainīga augstuma nedeformējamu sānu balstu (3.14.att.), kurš var nodrošināt minētas stinguma raksturlīknes īpašības. Mainīga augstuma sānu balstu izmantošana ļauj ievērojami paplašināt sakarības „spēks - pārvietojums” veidus gumijas kompensatoram kuri strādā aksiālā spiedē. Mainīga augstuma sānu balsti ļauj samazināt vai palielināt gumijas brīva slāņa biezumu. Savukārt kopa ar gumijas brīvas slāņa biezumu mainās arī gumijas kompensatora stingums, ja gumijas slāņa biezums palielinājās – kompensatoram stingums samazinājās, ja gumijas slāņa biezums samazinājās – gumijas kompensatoram stingums palielinājās. Tādas konstrukcijas kompensatora galvenā priekšrocība un atšķirība no citiem kompensatoriem ar mainīgu stingumu (piemēram ar nekustīgu sānu balstu) ir pārvietojot sānu balstu mēs varam ne tikai palielināt stingumu, bet arī samazināt.



3.14.att Gumijas kompensators ar mainīga augstuma sānu balstu

Gumijas kompensatora stinguma raksturlīknes „spēks - pārvietojums” veids būs atkarīgs no tā pēc kāda likuma mainās sānu balsta augstums. Ir trīs galveni sānu balstu augstuma izmaiņas veidi:

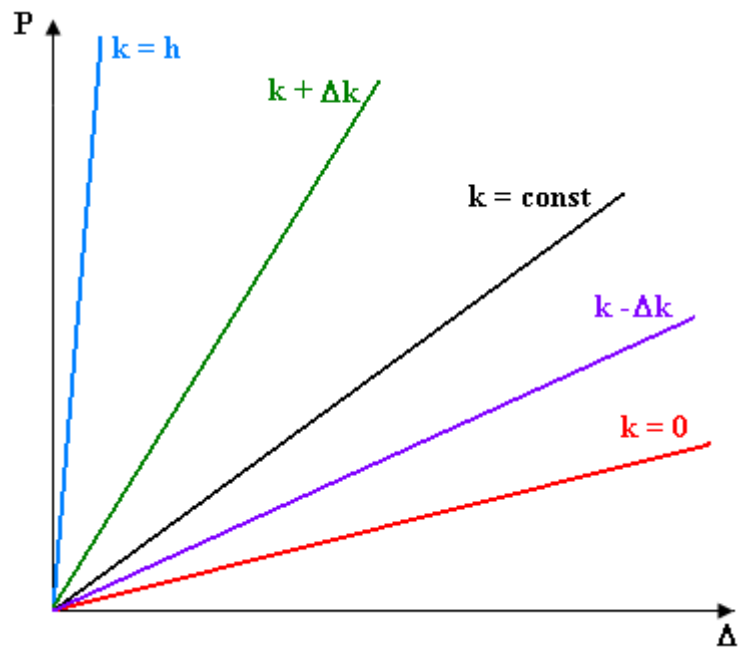
1. Sānu balsta augstums mainās tad, kad kompensators nav noslogots ar spēku (3.15.att.).



3.15. att. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu darbības princips.

Sānu balstu augstums mainās nenoslogotam kompensatoram.

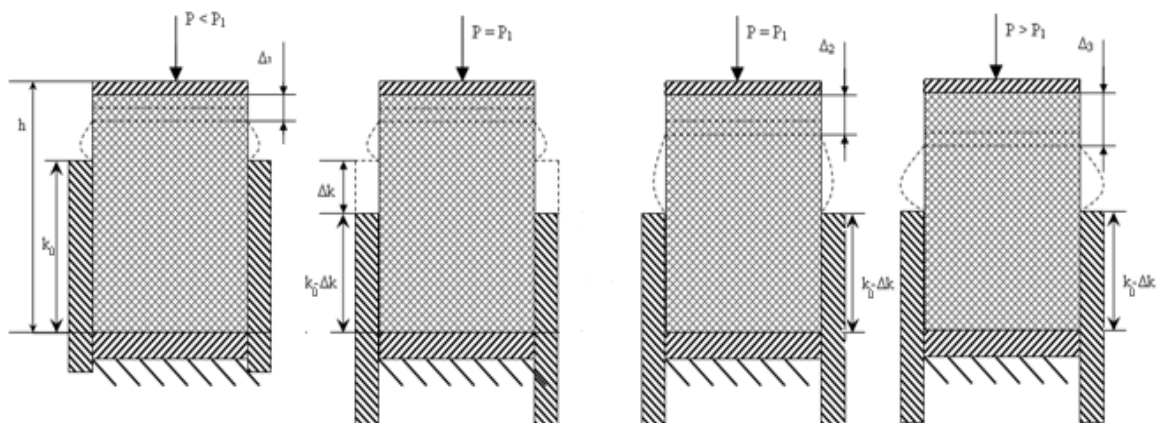
Šī gadījuma kompensatoram ir lineāra stinguma raksturlīkne „spēks - pārvietojums” (3.16. att.). Kompensatora stingums var mainīties robežās no parasta cilindriskā kompensatora stinguma ( $k = 0$ ), līdz absolūti cietam ( $k = h$ , pārvietojums notiek tikai gumijas vājas saspiežamības dēļ).



3.16. att. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu stinguma raksturlīknes, kad sānu balstu augstums mainās nenoslogotam kompensatoram

Galvenā priekšrocība tādas konstrukcijas kompensatoram ir konstrukcijas vienkāršība, bet tāda vienkārša konstrukcija ļauj mainīt kompensatora stingumu pietiekami lielā diapazonā.

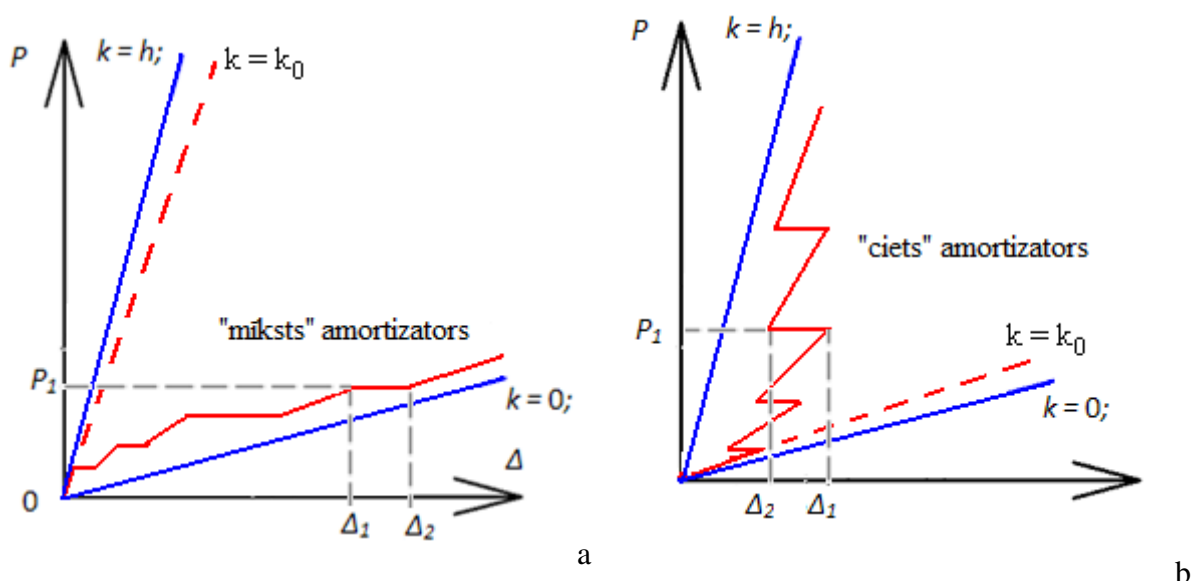
2. Sānu balsta augstums mainās pakāpeniski ar noteiktu soli kompensatora saspiešanas procesā(3.17.att.).



3.17. att. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu darbības princips, kad sānu balsta augstums mainās pakāpeniski ar noteiktu soli.

Šī gadījumā kompensatoram būs pa posmiem stinguma raksturlīkne (3.18.att.). Izmantojot tāda veida sānu balsta augstuma izmaiņas algoritmu var iegūt divu vedu kompensatora stingumu raksturlīknes. Ja sānu balsta augstums mainās ar likumu  $k = k_0 - \Delta k$

tad būs „mīksta” veida stinguma raksturlīkne (att.3.32a), ja sānu balsta augstums mainās ar likumu  $k = k_0 + \Delta k$  tad būs „cieta” veida stinguma raksturlīkne (att.3.32b)

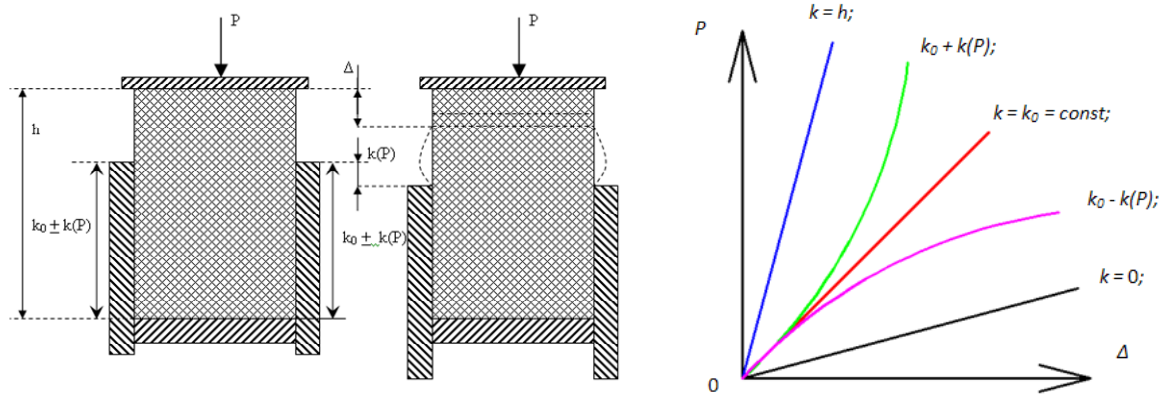


3.18. att. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu stinguma raksturlīknes. Sānu balsta augstums mainās pakāpeniski ar noteiktu soli.

Izmantojot tādu sānu balstu augstuma izmaiņas likumu stinguma raksturlīkne „spēks – pārvietojums” būs kritumi vai lēcieni. Kritumi būs „mīksta” stinguma raksturlīkne, brīdī, kad sānu balsta augstums samazinās (slodze nemainās, bet nosēde palielinājās gumijas brīva slāņa biezuma palielināšanas dēļ). Savukārt lēcieni būs „stinga” stinguma raksturlīkne, brīdī, kad sānu balsta augstums palielinās (slodze nemainās, bet nosēde samazinās gumijas brīva slāņa biezuma samazināšanas dēļ).

3. Sānu balsta augstums mainās, ka funkcija no pielikta spēka lieluma (nosēdes lieluma).

Šis sānu balsta augstuma izmaiņas variants dod gludu stingumu raksturlīkne „spēks - nosēde”, „mīkstu” vai „cietu”. Arī kā iepriekšēja varianta kompensators būs „mīksts” ja sānu balsta augstums mainās ar likumu  $k = k_0 - \Delta k(P)$ , „ciets” ja  $k = k_0 + \Delta k(P)$ . Trešais sānu balsta augstuma regulēšanas variants dod vislabākās (plašākas) iespējas regulēt kompensatora stingumu. Bet šo variantu ir grūtāk realizēt konstruktīvi nekā pirmos divus variantus.



3.19. att. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu stinguma raksturlīknes. Sānu balsta augstums mainās, kā funkcija no pieliktā spēka lieluma

### 3.3.2. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu analītiskais aprēķins

Aplūkojam sakarības „spēks – pārvietojums” analītisku atrisinājumu tādās konstrukcijas kompensatoriem. Sadalām kompensatoru divās daļās (3.20.att.).

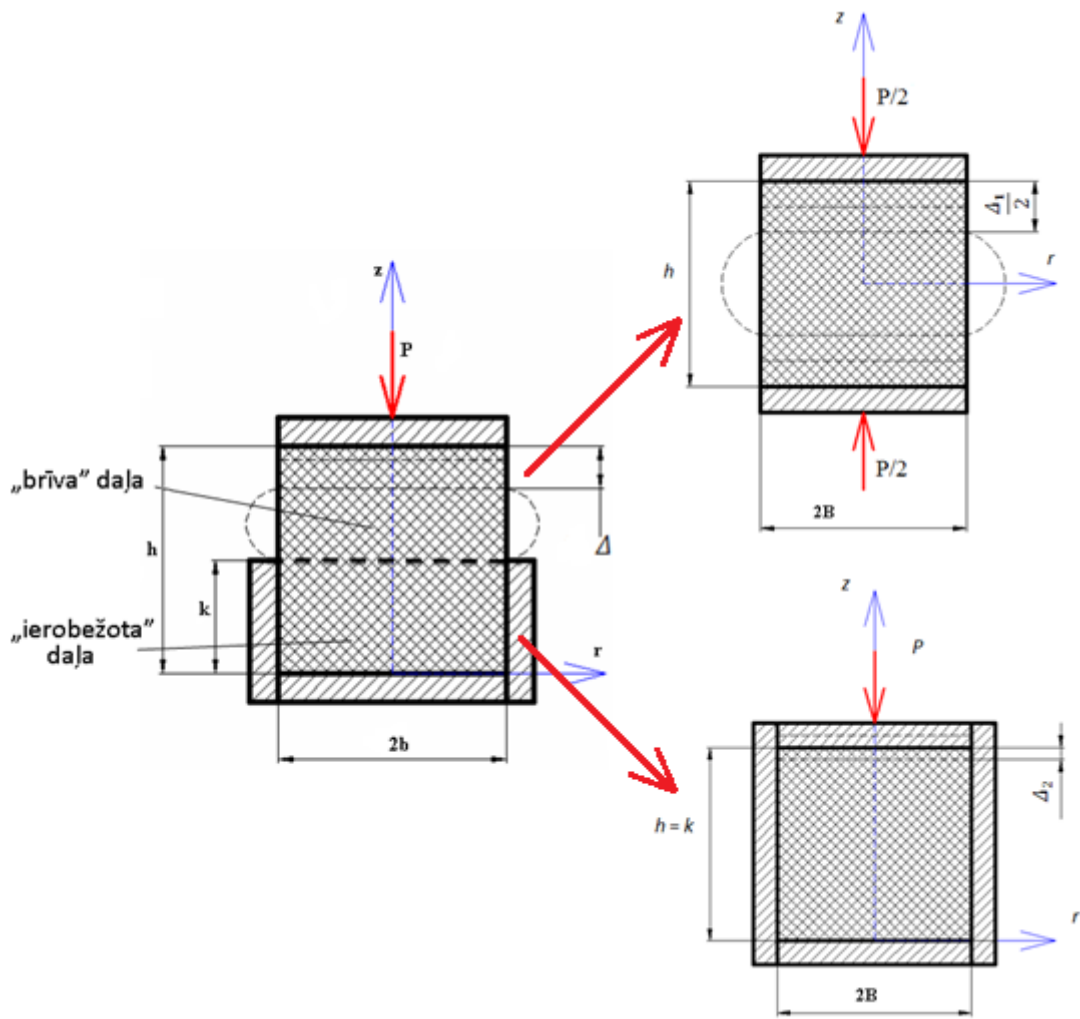
Pirmajā daļā (brīva daļa):  $(h - k(P)) \leq z \leq h$ , ir asij simetriska spiede, otrajā daļā (ierobežota daļa)  $0 \leq z \leq (h - k(P))$  telpiska saspiešana.

No sakumā aplūkotā risinājuma, kurš neievēro gumijas vāju saspiežamību. Kompensatora „brīvai daļai” sakarību „spēks – pārvietojums”, kura neņem vērā gumijas vāju saspiežamību, aprēķinājām pēc formulas (3.10) ka parastu cilindrisku kompensatoru. Formulā (3.10) aizvietojam  $h$  ar izteiksmi  $(h-k(P))$

Tā kā tika pieņemts, ka gumija ir nesaspiežams materiāls, kompensatora otrajās daļas pārvietojums būs vienāda ar nulle. Tāpēc kompensatora nosēde būs vienāda ar kompensatora pirmās daļas pārvietojums.

$$\Delta^* = \Delta_1^* + 0$$

$$\Delta^* = \frac{P (h - k(P))}{\pi b^2 G} \cdot \left[ 3.6 + 1.5 \frac{b^2}{(h - k(P))^2} \right]^{-1} + 0 \quad (3.78)$$



3.20. att. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu aprēķinu modelis

Aplūkojam risinājumu, kurš ievēro gumijas vāju saspiežamību. Kompensatora pirmajai daļai sakarību „spēks – pārvietojums” kura ņem vērā gumijas vāju saspiežamību, aprēķinājām, izmantojot formulu (3.31.) ka parastu cilindrisku kompensatoru. Arī formulā (3.79) aizvietojam  $h$  ar izteiksme  $(h-k(P))$ .

$$\Delta_1^* = \frac{P(h-k(P))}{\pi b^2 G} \left[ 2,4 + \frac{3 D_1}{5 \left( 1 + \frac{1-2\mu}{\mu} D_1 \right)} \right]^{-1} \quad (3.79)$$

$$\text{kur } D_1 = 2 + \frac{5 b^2}{2 (h-k(P))^2}$$

Kompensatora otrai daļai, pieņemot, ka sanu balsti ir absolūti cieti, un neievērojot berzi gumijas slāņa un sanu balsta kontaktvirsmā, sakarību „spēks – pārvietojums”  $P(\Delta_{II})$ , ieguvām no gumijas telpiskas saspiešanas nosacījuma.

$$\Delta_{II} = \frac{3P \cdot k(P)}{2\pi b^2 G} \cdot \frac{(1-2\mu)}{(1+\mu)} \quad (3.80)$$

Ievērojot (3.79) un (3.80) aplūkota gumijas kompensatora summārais pārvietojums būs

$$\Delta = \Delta_I + \Delta_{II}$$

$$\Delta = \frac{(h-k(P))}{\pi b^2 G} \left[ 2,4 + \frac{3 D_1}{5 \left( 1 + \frac{1-2\mu}{\mu} D_1 \right)} \right]^{-1} + \frac{3P \cdot k(P)}{2\pi b^2 G} \cdot \frac{(1-2\mu)}{(1+\mu)} \quad (3.81)$$

Izmantojot sakarības (3.78) – (3.81) jāievēro, ka tie iegūti un ir patiesi tikai mazu galīgo deformāciju robežās, kad

$$0 \leq \Delta_I / (h - k(P)) \leq 0.1 \div 0.15 \quad (3.82)$$

Brīvas (bez sanu balsta) gumijas slāņa biezums  $h_0$  slogojuma procesā var mainīties robežās:

$$0 \leq h_0(P) = h - k(P) \leq h \quad (3.83)$$

Ievērojot kompensatora izmantošanas prasības, var mainīt brīva gumijas slāņa biezumu  $h_0(P)$  atkarība no slogošanas lieluma, lai nodrošināt nepieciešamu kompensatora stingumu izmaiņu. Visvienkāršāk konstruēt sakarību „spēks- pārvietojums” ja ir zināmi saspiešanas spēka  $P$  izmaiņas intervāli. Šī gadījumā sakarības „spēks – pārvietojums” iegūšanas algoritms būs sekojošs: Lai saspiešanas spēka  $P$  intervāls būs sadalīts  $N$  (ne obligāti vienādos) intervālos un ir uzdotas prasības gumijas brīvas slāņa biezuma maiņa, tas ir uzdota funkcija  $k(P)$  katrām spēka  $P$  izmaiņas intervālam. Tad  $i$  – tājām intervālam:

$$P_{i-1} \leq P_i \leq P_{i-1} + P_i^* , \quad (3.84)$$

kur  $P_i^*$  spēka  $P$  izmaiņas solis (ja šī soli ir vienādi, tad  $P_i^* = P/N$ ).

Brīva (bez sanu balsta) gumijas slāņa biezums  $i$  – tājām slogojuma intervālam pieņem vērtības:

$$h_{i-1}(P = P_{i-1}) \leq h(P = P_i) = h(P = P_{i-1}) - k(P = P_i) \leq h \quad (3.85)$$

Kopēja kompensatora nosēde  $\Delta_{\Sigma i}$   $i$  – tājā slogojumā solī var aprēķināt pēc formulas:

$$\Delta_{\Sigma i} = \Delta_{\Sigma(i-1)} + (\Delta_I(h_0 - k_i(P_i), P_i^* + \Delta_{II}(k_i(P_i), P_i^*)), \quad (3.86)$$

Kur  $\Delta_I((h_0 - k_i(P_i), P_i^*))$  u  $\Delta_{II}(k_i(P_i), P_i^*)$  vērtības tika aprēķinātas pēc formulas (3.79) un (3.81) ar nepieciešama brīvas gumijas slāņa biezuma substitūciju katrā slogojumā solī. No formulas (3.81) – (3.86) seko, ja vērtība  $k(P = P_i)$  būs negatīva, tad gumijas brīva slāņa biezums nākamam slogojuma solim palielinās. Sekojoši, kompensatora stingums samazinās, tas ir sakarība „spēks – pārvietojums” būs „mīksta” veida. Pozitīvam  $k(P = P_i)$  vērtībām gumijas brīva slāņa biezums nākamam slogojuma solim samazinās un kompensatora stingums palielinās, tas ir sakarība „spēks – pārvietojums” būs „cieta” veida.

### 3.4. Nodaļas secinājumi

Trešajā nodaļā piedāvātas trīs jaunas kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstrukcijas, kas nodrošina nepieciešamo stinguma raksturojumu "spēks-pārvietojums":

- Elastomēra kompensators ar mainīgu stingumu (šī kompensatora konstrukcija ir patentēta, ir iegūts LR patents. 3.pielikums);
- Elastomēra kompensators ar šķidrums ieslēgumiem;
- Gumijas kompensators ar mainīga augstuma sānu balstu.

Izstrādāta šo kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodikas.

## 4. EKSPERIMENTĀLI PETIJUMI

Šajā nodaļā veikti gumijas kompensatoru saspiešanas naturāli eksperimenti. Bija izgatavoti trīs dažādi kompensatori un testēti saspiešanā. Pēc tam bija veikti šo kompensatoru analītiski aprēķini, izmantojot formulas, kas iegūtas otrajā nodaļā. Tāpat bija veikts šo kompensatoru aprēķins ar galīgo elementu programmas SolidWorks palīdzību. Iegūtie rezultāti (eksperimentāli, analītiski un modelēšanas) bija salīdzināti sava starpā.

### 4.1. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatora saspiešana

Bija izgatavoti un testēti gumijas - metāla kompensatori (4.1. att., 4.2.att.) ar dažiem ģeometriskiem izmēriem (ar katru izmēru trīs paraugi). Visiem kompensatoriem bija trīs gumijas slāņi no vienas un tās pašas gumijas.

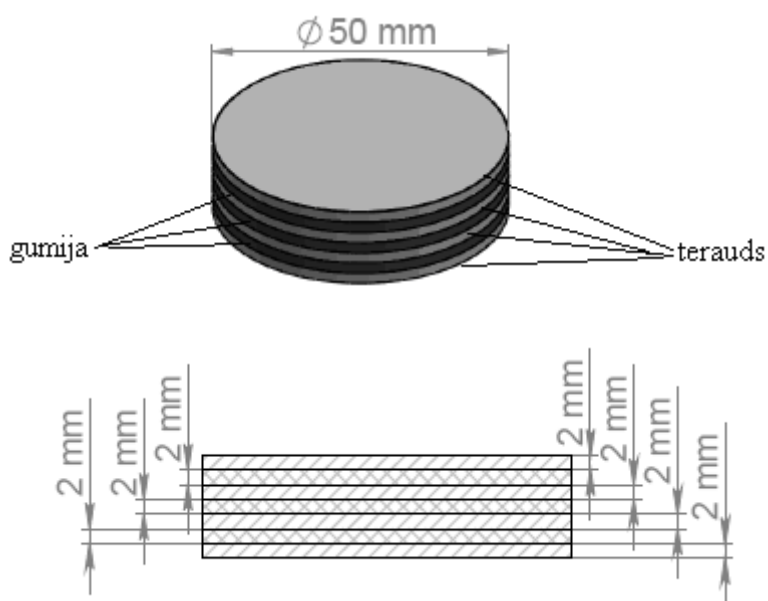


4.1. att. Gumijas – metāla kompensatori. Eksperimentālie paraugi

Apzīmēsim gumijas slāņa biezumu ar  $h_e$ , savukārt tērauda slāņa biezumu ar  $h_m$ . gumijas slāņu skaitu ar  $n$ . Apaļam paraugam apzīmēsim diametru ar  $d$ , kvadrātiskam paraugam apzīmēsim sānu garumus ar  $a$  un  $b$ . Tērauda slānis ar gumijas slāni ir salīmēti. Paraugu izmēri tika apkopoti 4.1.tabulā.

Plānslāņu gumijas - metāla kompensatoru ģeometriskie izmēri

Nr.	n	$h_e$ , mm	$h_m$ , mm	a, mm	b, mm	d, mm
1	3	2	2			50
2	3	2	2	50	50	
3	3	4	2			50
4	3	4	2	50	50	
5	3	6	2			50
6	3	6	2	50	50	
7	3	8	2			50
8	3	8	2	50	50	



4.2.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.1

#### 4.1.1. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru testēšana

Eksperimentālie paraugi bija saspiesti ar testēšanas mašīnas ZWICK/Roell Z-150 palīdzību (4.3. att.).

Paraugi Nr. 1, 2, 3, 4 bija noslogoti ar aksiālu spēku  $P = 16000$  N, paraugi Nr. 5,6,7,8 4 bija noslogoti ar aksiālu spēku  $P = 10000$  N. Slogošanas ātrums 1 mm/min. Katra parauga

eksperimentāla līkne „spēks - pārvietojums” attēlota grafiski (2. pielikums) un kompensatora stingums(vidējais aritmētiskais trim vienādiem paraugiem) ir ierakstīts 4.2. tabulā.



4.3. att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatora saspiešana testēšanas mašīnā ZWICK/Roell Z-150

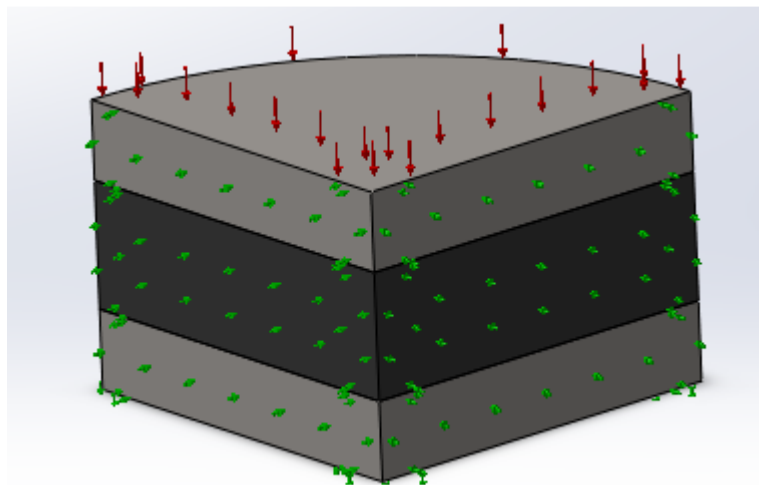
#### 4.1.2. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru analītiskais risinājums

Visi analītiski aprēķini tika veikti ar programmatūras MathCad palīdzību. Tika veikti divi analītiski risinājumi katram kompensatora izmēram. Pirmais risinājums (tālāk teksta risinājums „a”) tika veikts ar formulas (3.10) palīdzību, kura neievēro gumijas vāju saspiežamību ( $\mu = 0.5$ ). Otrais risinājums (tālāk teksta risinājums „b”) tika veikts ar formulas (3.14) palīdzību, kura ievēro gumijas vāju saspiežamību ( $\mu \neq 0.5$ ). Iegūtie rezultāti tika ierakstīti 4.2. tabulā.

#### 4.1.3. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru modelēšana SolidWorks vidē

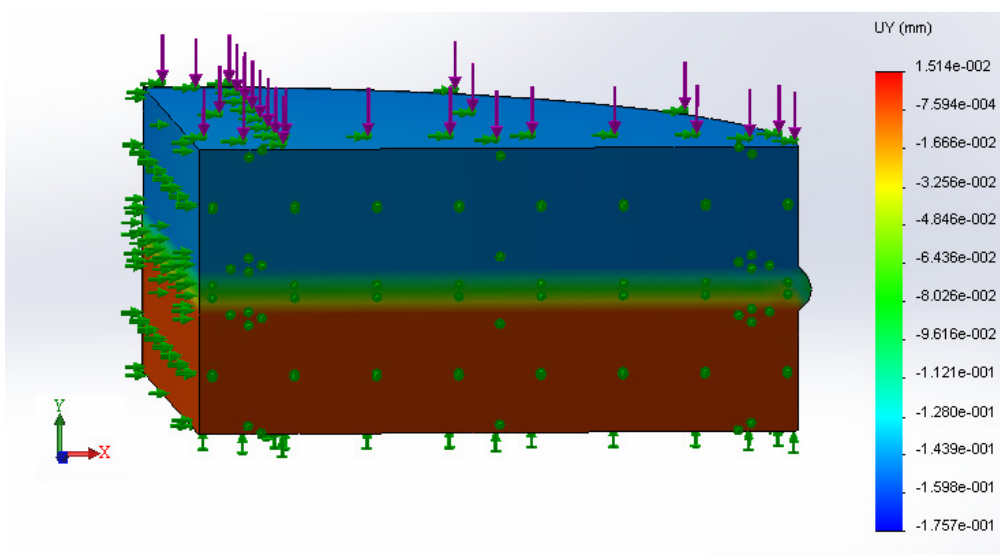
Kompensatora modelēšana bija veikta izmantojot galīgo elementu programmatūru SolidWorks. Tā, kā visi gumijas slāņi kompensatorā ir vienādi un to var sadalīt ar simetrijas asīm vienādās daļās, lai atvieglot atrisinājumu, bija izveidots modelis tikai vienai gumijas slāņa ceturtdaļai (4.4. att.). Modelī, lai izslēgtu tērauda starpslāņa deformāciju, tās biezums tika palielināts līdz 5 mm, eksperimentālam paraugam tas ir 2 mm. Gumijas slāņa un tērauda slāņa savienojuma vietā tika uzlikti pārvietojuma ierobežojumi, savienojuma vietā slāņi nevar

pārvietoties viens pret otru. Sānu malām tika uzlikts simetrijas nosacījums (ierobežojums). Uz augšējām tērauda starpslāņim tika pielikta izkliedēta slodze.

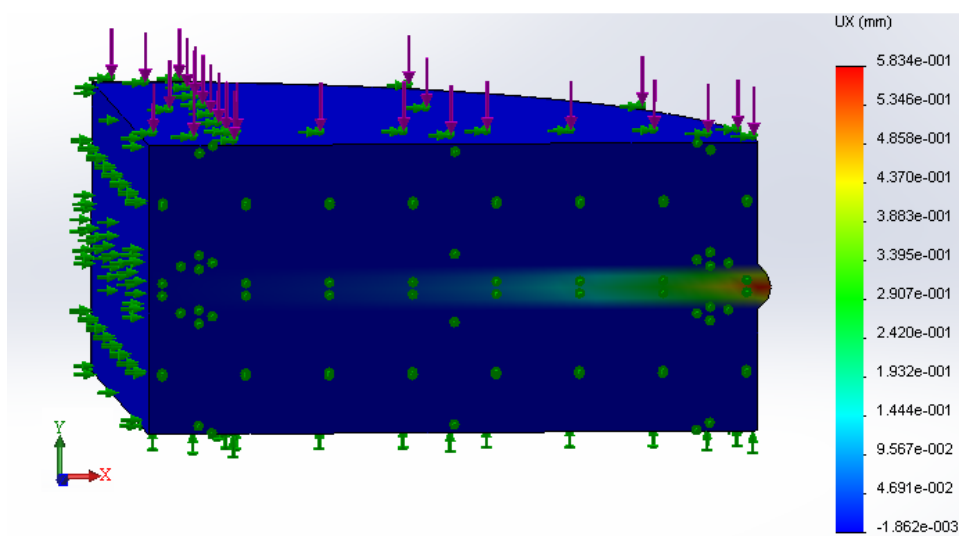


4.4. att. Gumijas kompensators ar gumijas slāņa biezumu 8 mm

Gumija bija modelēta, kā izotropš, lineārs materiāls. Modelēšanas rezultāti tika ierakstīti 4.2. tabulā. SolidWorks dod iespēju analizēt procesus (pārvietojumi katrā virzienā, spriegumu sadalījums), kuri notiek kompensatorā slodzes laikā. Attēlā 4.5.att. tika parādīts kompensatora augšējā balsta pārvietojums pa y asi. Daudz informācijas dod att.4.6., parauga Nr.1 gumijas slāņa pārvietojums pa x asi. Kā var redzēt, kompensatora vidū pārvietojuma (deformācijas) pa x asi (pa rādiusu) praktiski nav, tas nozīmē, ka kompensatora saspišanas laikā tur notiek gumijas telpiska saspišana.



4.5. att. Parauga Nr.1 nosēde. SolidWorks modelēšana



4.6.att. Parauga Nr.1 gumijas slāņa deformācija pa x asi. SolidWorks modelēšana

#### 4.1.4. Plānslāņa gumijas - metāla kompensatoru aprēķinu rezultātu salīdzinājums

4.2. tabula

Gumijas – metāla kompensatora testēšanas, aprēķinu un modelēšanas rezultāti.

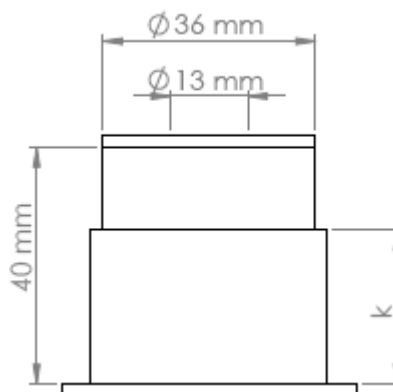
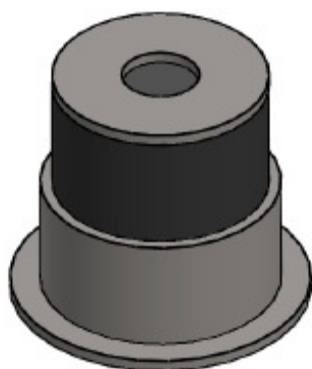
Parauga Nr.	Spēks, kN	Gumijas kompensatora pārvietojums, mm				Gumijas kompensatora pārvietojuma, kļūda %		
		Eksperiments	Anālītiskais risinājums „a”	Anālītiskais risinājums „b”	Modelēšana SolidWorkā	Anālītiskais risinājums „a”	Anālītiskais risinājums „b”	Modelēšana SolidWorkā
1	16	0.515	0.125	0.500	0.444	2.9	75.7	7.1
2	16	0.429	0.072	0.426	0.349	0.7	83.2	18.6
3	16	1.567	0.937	1.650	1.477	5.3	40.0	9.0
4	16	1.181	0.560	1.141	1.151	5.4	52.3	4.7
5	0.8	2.339	1.843	2.455	2.209	5.0	21.2	5.5
6	1	1.832	1.120	1.670	1.646	8.8	39.1	10.0
7	0.8	3.584	3.204	3.500	3.396	2.3	10.6	5.2
8	0.8	2.606	1.978	2.481	2.702	3.9	24.1	3.7

Eksperimenta, analītiskā aprēķina un modelēšanas rezultāti ierakstīti 4.2. tabulā. Rezultātu grafisks salīdzinājums dots 2. Pielikumā. Analizējot iegūtos datus, var secināt, ka analītiskā rēķina rezultāti, kurš ievēro gumijas vāju saspiežamību, vislabāk sakrīt ar eksperimentāliem datiem.

Aprēķina, kurš neievēro gumijas vāju saspiežamību kļūda palielinās, kad samazinās gumijas slāņa biezums. Tas sakrīt ar teoriju. Modelēšana SolidWorkā dod pietiekami labus rezultātus. To vēl var uzlabot, pilnveidojot modeli SolidWorkā. Modelēšanas priekšrocība ir tā, ka var apskatīt ne tikai kompensatora vertikālo pārvietojumu, bet arī izpētīt pārvietojumus pa asīm, spriegumus un deformācijas (elastomēra un neelastomēra slāņos).

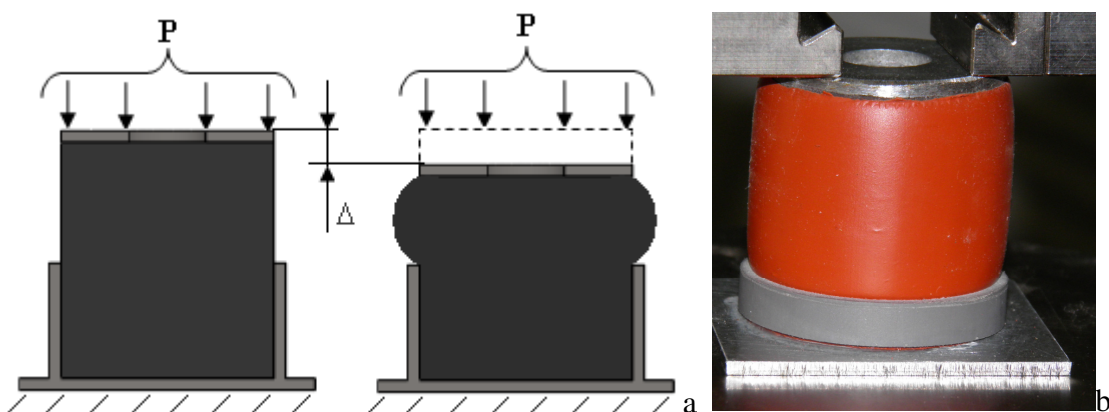
#### 4.2. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma augstuma sānu balstu aprēķins

Aplūkojam cilindrisku gumijas kompensatoru ar kustīgu augstuma sānu balstu (4.7.att), kura darbības princips aprakstīts 3.3.1. apakšnodaļā.



4.7. att. Gumijas kompensators ar mainīga augstuma sānu balstu, kur  $k$  – sānu balsta augstums

Sānu balsta augstums  $k$  tiek mainīts pakāpeniski, ar soli 6.5 mm. Gumijas kompensators tika noslogots ar aksiālu spēku  $P$  (4.7.att.a). Kompensatora pamati un sānu balsts tika uzskatīti par absolūti cietiem un nedeformējamiem. Tērauda pamati tika salīmēti ar gumijas slāni, salīmētās virsmas nevar pārvietoties viena attiecībā pret otru. Gumijas slāņa izmēri (4.7.att) un gumijas fiziskās īpašības:  $h = 40\text{mm}$ ,  $D = 36\text{mm}$ ,  $E = 1.55 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $G = 5.19 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , a)  $\mu = 0.5$ , b)  $\mu = 0.493$ .

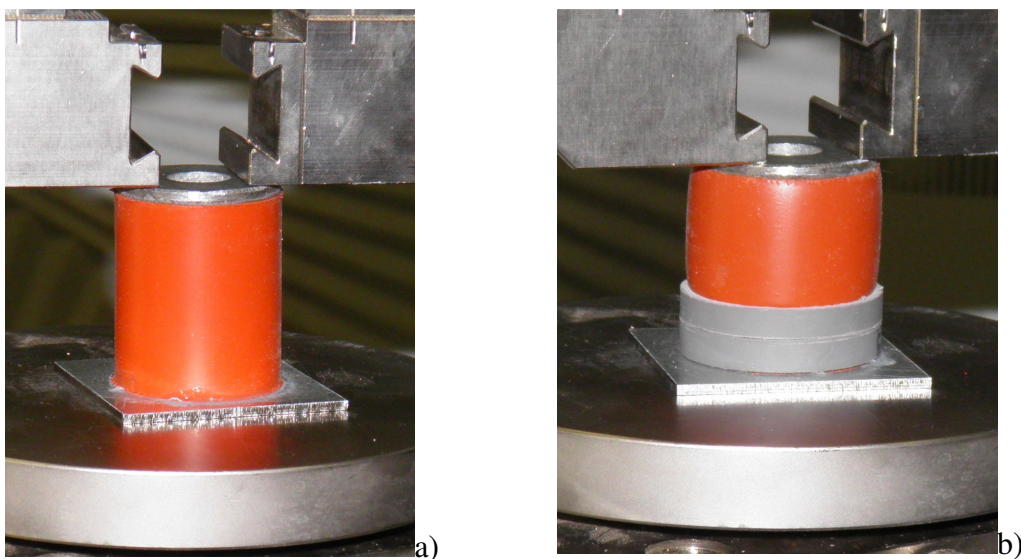


Att.4.9. a) Gumijas kompensatora sloģojuma shēma; b) Gumijas kompensatora sloģojums eksperimenta laikā;

#### 4.2.1. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu testēšana

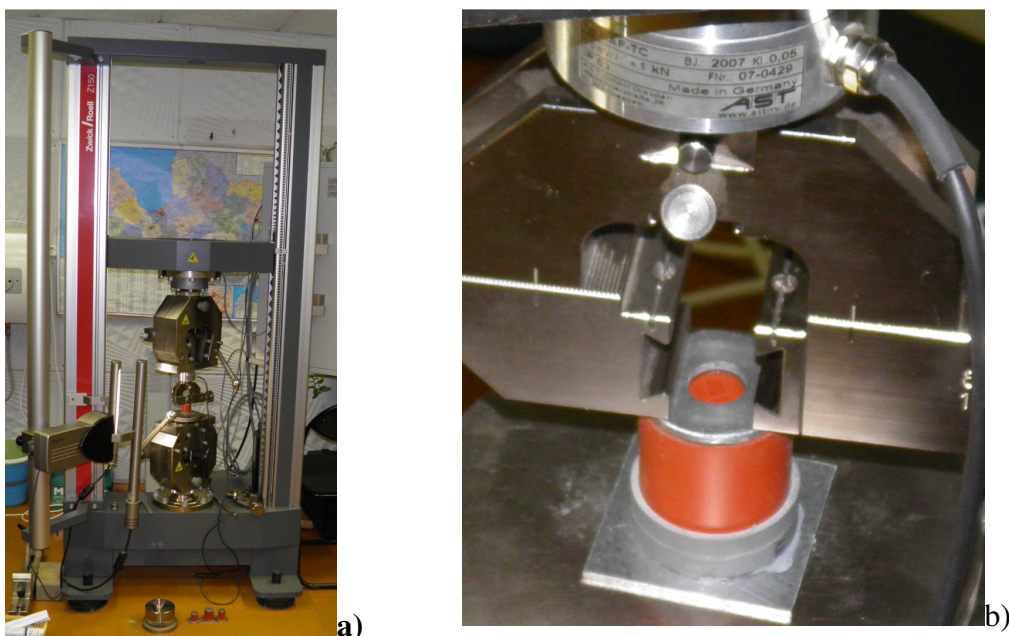
Eksperimentālam pētījumam bija izgatavoti 4 paraugi -gumijas cilindri ar izmēriem  $h = 40 \text{ mm}$  un  $d = 36 \text{ mm}$ . (4.10.att.) Gumijas cilindram bija pielīmēti divi tērauda pamati. Visi paraugi bija izgatavoti no vienādas gumijas ar vienādiem izmēriem un pēc vienādas tehnoloģijas.

Eksperimenta laikā uz cilindra tika uzlikti dažāda augstuma sānu balsti. Gumijas kompensatora saspiešana bija veikta ar iekārtu ZWICK/Roell Z150 (4.11.att.a) ar programmatūru testXpert II palīdzību. Lai nodrošinātu mērījumu precizitāti, tika izmantots sensors ar maksimālo pieļaujamo spēku  $1 \text{ kN}$  (4.11.att.b).

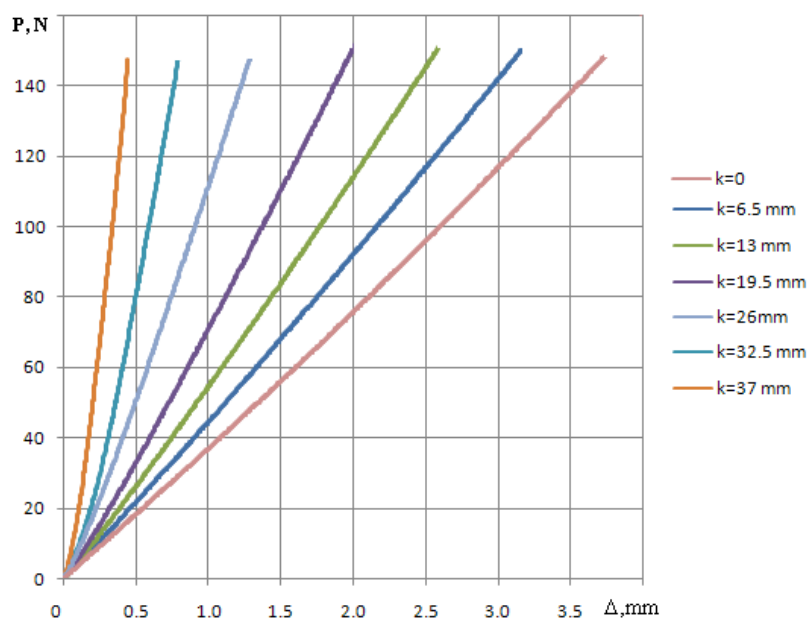


4.10. att.. Eksperimentālais paraugs. a)  $k = 0$ ; b)  $k = 13 \text{ mm}$

Gumijas kompensators tika noslogots ar spēku 150 N, sloģošanas ātrums 10mm/min. Programma fiksēja datus ar intervālu 0.1s. Pēc tam izmantojot saspišanas eksperimenta datus katram paraugam programmā testXpert II tika aprēķināts gumijas elastības modulis. Analītiskam aprēķinam un modelēšanai tika ņemts elastības moduļa vidējais lielums. Lai vienkāršotu eksperimentu datu apstrādi, tie no programmas testXpert II tika eksportēti Exel failā. Eksperimentāli dati tika attēloti 4.12.att.



4.11. att. Pressmašīna ZWICK (a) un sensors ar maksimālo pieļaujamo spēku 1 kN (b)

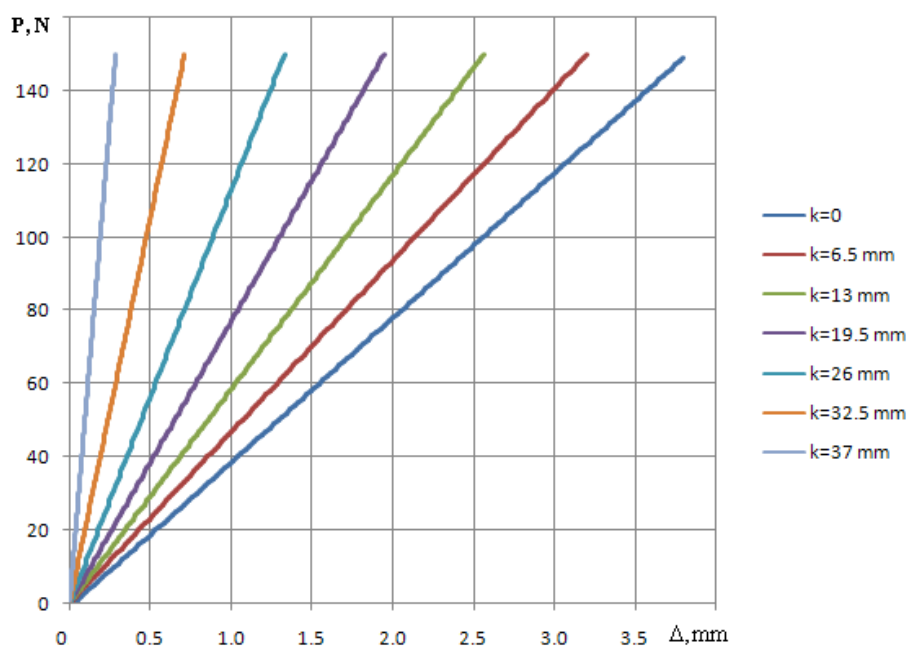


4.12.att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram ar mainīga augstuma sānu balstu. Eksperimentāli dati

#### 4.2.2. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu analītiskais aprēķins

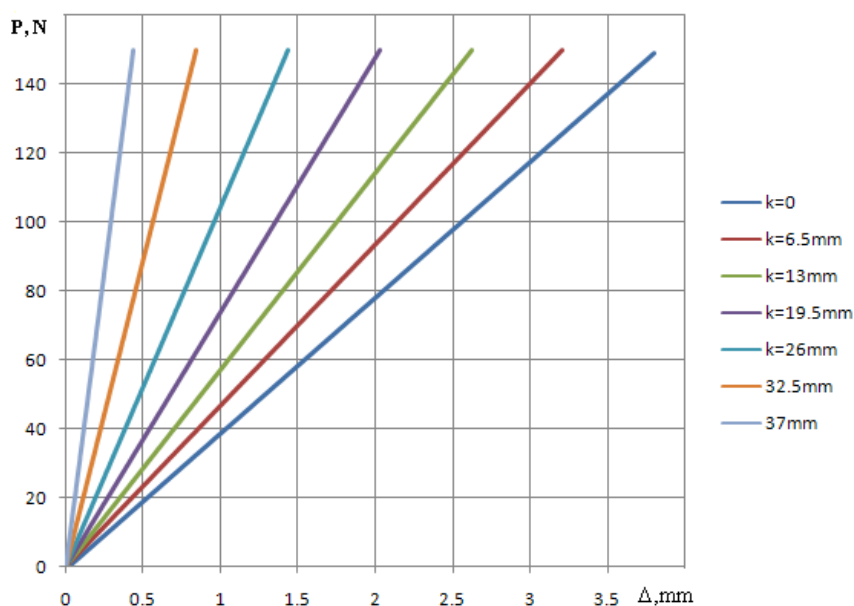
Aprēķinājām sakarību „spēks - pārvietojums” kompensatoram atkarībā no sānu balsta augstuma. Pirmajā aprēķinā (a) pieņemam, ka gumija ir nesaspiežama ( $\mu = 0.5$ ) un rēķinājām pēc formulas (3.78).

Aprēķinu rezultāti attēloti grafiski 4.12.att. Visi aprēķini tika veikti ar MathCad programmatūras palīdzību.



4.12.att..Sakarība „spēks –pārvietojums” gumijas kompensatoram ar mainīga augstuma sānu balstu. Analītiskais aprēķins(a), gumija tika uzskaitīta par nesaspiežamu ( $\mu = 0.5$ )

Otrajā aprēķinā (b) ņemam vērā gumijas vāju saspiežamību ( $\mu = 0.493$ ) un rēķinājām pēc formulas (3.81). Aprēķinu rezultāti attēloti grafiski 4.13.att.



4.13. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram ar mainīga augstuma sānu balstu. Analītiskais aprēķins (b), gumija tika uzskaitīta par saspiežamu ( $\mu = 0.493$ ).

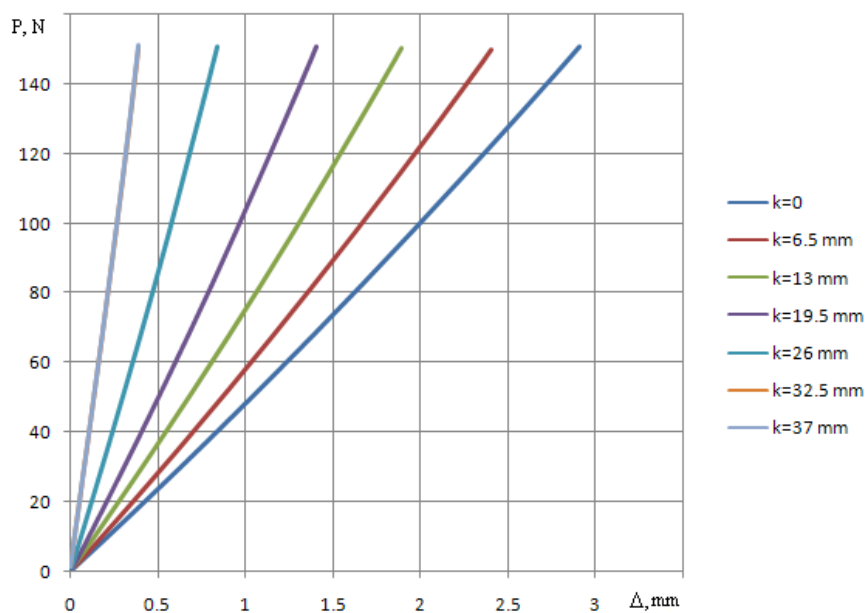
#### 4.2.3. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu modelēšana SolidWorks vidē

Gumijas kompensatora modelēšanai izmantojam datorprogrammu SolidWorks. SolidWorks veic aprēķinus, izmantojot galīgo elementu metodi. Kompensatora modelēšanai izmantojam statisku nelineāru analīzi. SolidWoka tika izveidoti divi gumijas modeļi:

- 1) Gumija tika aprakstīta, kā lineārs elastīgs izotropš materiāls;
- 2) Gumija tika aprakstīta, kā sevišķi elastīgs „Mooney Rivlin” materiāls.

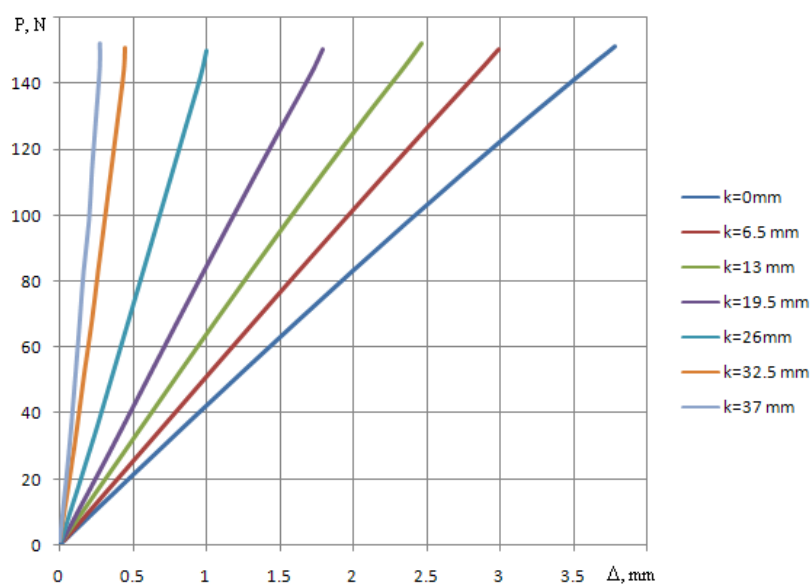
Katram gumijas modelim bija izveidoti seši modeli ar dažādu sānu balsta augstumu, no 0 līdz 37 mm.

Pirmais modelis. Lai aprakstīt gumiju kā elastīgu izotropu materiālu SolidWorkā ir nepieciešams uzdot sekojošus materiāla fizikālus raksturlielumus: elastības moduli  $E$  [ $N/m^2$ ], bīdes moduli  $G$  [ $N/m^2$ ], Puasona koeficientu  $\mu$  un blīvumu  $\rho$  [ $kg/m^3$ ]. Modelēšanas rezultāti attēloti 4.14. att.



4.14. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram ar mainīga augstuma sānu balstu. Modelēšana SilidWorkā, gumija tika aprakstīta, ka lineārs izotrops materiāls

Otrais modelis. Lai aprakstīt gumiju, kā sevišķi elastīgu „Mooney Rivlin materiālu SolidWorkā ir nepieciešams uzdot sekojošu materiāla fizikālus raksturlielumus: Puasona koeficientu  $\mu$  un divas materiāla konstantes.



4.15. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram ar mainīga augstuma sānu balstu. Modelēšana SilidWorkā, gumija tika aprakstīta, ka sevišķi elastīgs „Mooney Rivlin” materiāls

Šīs konstantes var izrēķināt analītiski un uzdot SolidWorkā, vai ielādēt SolidWorkā materiāla stiepes-spiešanas eksperimenta rezultātus un Solidworks automātiski izrēķina šīs konstantes. Šajā modelēšanā SolidWorka tika ielādēta spiedes diagramma un no tā SolidWorks izrēķina konstantes. Modelēšanas rezultāti attēloti 4.16. att.

#### 4.2.4. Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu aprēķina rezultātu salīdzinājums.

Salīdzinājām rezultātus, kurus ieguvām analītiski un ar modelēšanu SolidWorkā ar rezultātiem, kuri ir iegūti eksperimentā. Salīdzinājām kompensatora pārvietojumu kad tas ir noslogots ar spēku 150N. Rezultāti attēloti 4.3. tabulā.

Visslābāk ar eksperimentāliem datiem sakrīt analītiskais aprēķins (b), kurš ievēro gumijas vāju saspiežamību. Analītiskam aprēķinam, kurš neievēro gumija slāņa vāju saspiežamību, kļūda ir liela kad sānu balsta augstums ir liels. Šā gadījumā uz kompensatora kopējo pārvietojumu stipri ietekme gumijas vāja saspiežamība, jo kompensatora brīvas virsmas laukums ir mazs. SolidWorkā vislabākie rezultāti iegūti, kad gumija bija aprakstīta, kā sevišķi elastīgs „Mooney Rivlin” materiāls, bet tie ir sliktāki par analītisku aprēķinu. Kļūdas lielums palielinās kopā ar sānu balsta augstuma palielināšanu. Ja izmantojam gumijai lineāru izotropu materiāla modeli, kļūda ir pietiekami liela, bet stabila. Katram sānu balsta augstumam kļūda ir pozitīva (stingums ir lielāks) un atrodas robežās no 23% - 51%. Lineāram izotropam modelim būtu lietderīgi izmantot šķietamo elastības moduli, lai iegūt mazāku kompensatora stingumu.

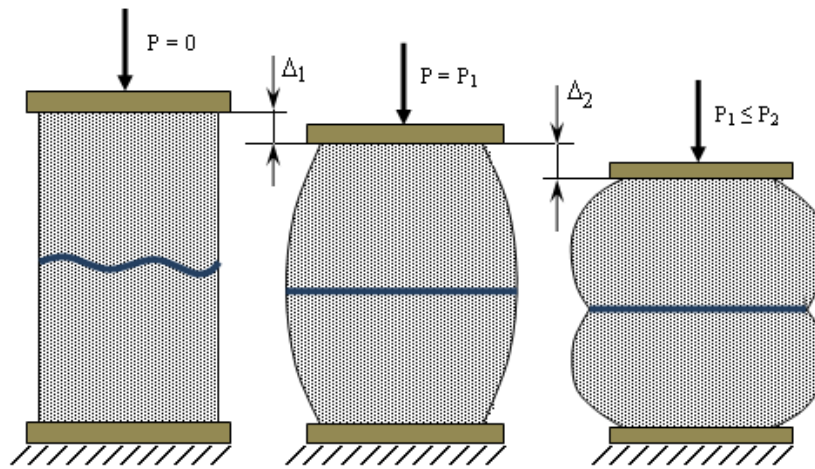
4.3.tabula

Gumijas kompensatora ar mainīga augstuma sānu balstu aprēķina, modelēšanas un eksperimenta rezultāti

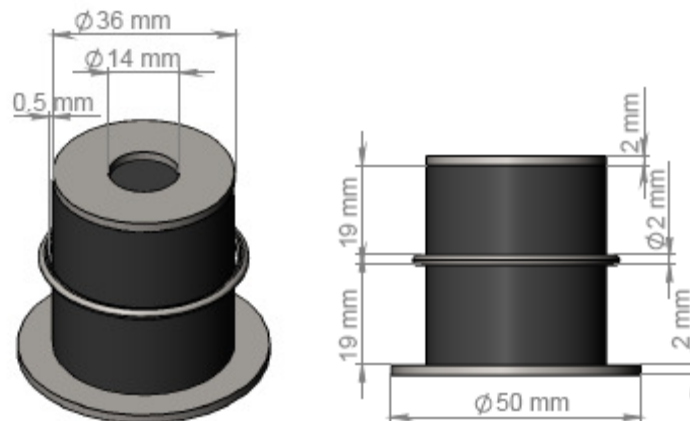
k, mm	Kļūda, %			
	Analītiskais aprēķins (a)	Analītiskais aprēķins(b)	SolidWorks. Lineārs isotrops materials	SolidWorks. sevišķi elastīgs „Mooney Rivlin materiāls
0	0.05	-0.03	23.62	-0.53
6.5	0.60	-1.42	24.21	-5.46
13	0.81	-1.55	26.75	-4.54
19.5	2.35	-1.65	29.63	-10.32
26	4.93	-2.57	39.97	-28.76
32.5	11.69	-2.85	51.46	-44.18
37	35.52	-0.23	45.32	-37.54

### 4.3. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu aprēķins

Tā, kā izgatavot mainīga stinguma cilindrisku kompensatoru (4.16att.) bez speciala aprīkojuma nav iespējams (izgriezt gumiju tā lai tā forma sakristu ar gofrēta starpslāņa formu) eksperimentāliem pētījumiem tika izmantota vienkāršota kompensatora konstrukcija, bet ir saglabāta šī kompensatora konstrukcijas būtība. Tika izveidots gumijas cilindrisks kompensators, bet starpslāņa vietā tika lietots tērauda gredzens (4.18.att.). Gredzena iekšējais diametrs ir par vienu milimetru lielāks nekā cilindriska kompensatora ārējais diametrs.



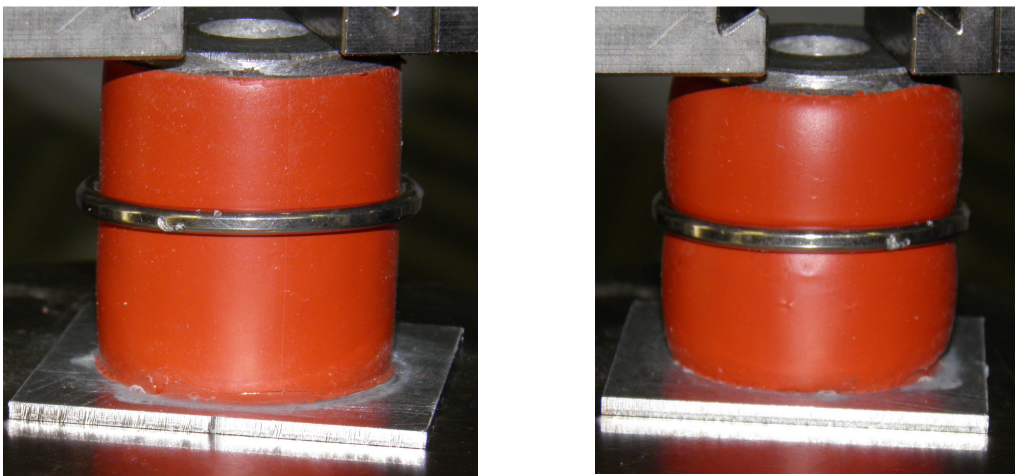
4.16. att. Mainīga stinguma cilindrisks kompensators



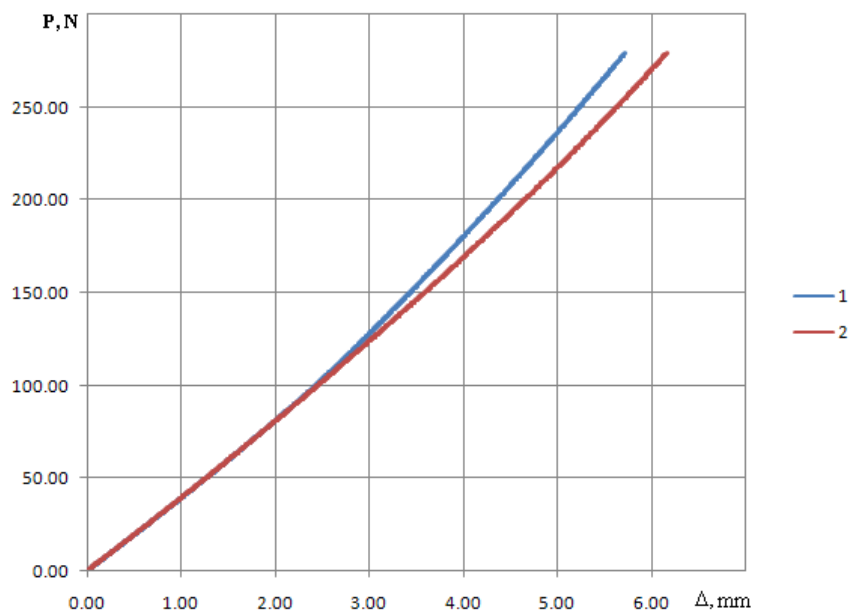
4.17. att. Gumijas kompensators ar gredzenveida ierobežotāju

### 4.3.1. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu testēšana

Eksperimentālam pētījumam bija izgatavoti 3 eksperimentāli paraugi. Visi paraugi bija izgatavoti no vienādas gumijas ar vienādiem izmēriem un pēc vienādas tehnoloģijas. Gumijas kompensatora saspiešana bija veikta ar iekārtu ZWICK/Roell Z150 (att.4.16a.) ar programmatūru testXpert II palīdzību. Lai nodrošināt mērījumu precizitāti, tika izmantots sensors ar maksimālo pieļaujamo spēku 1 kN. Gumijas kompensators tika noslogots ar spēku 270 N, slogošanas ātrums 10mm/min.



4.18. att. Gumijas kompensatora ar gredzenveida ierobežotāju saspiešana



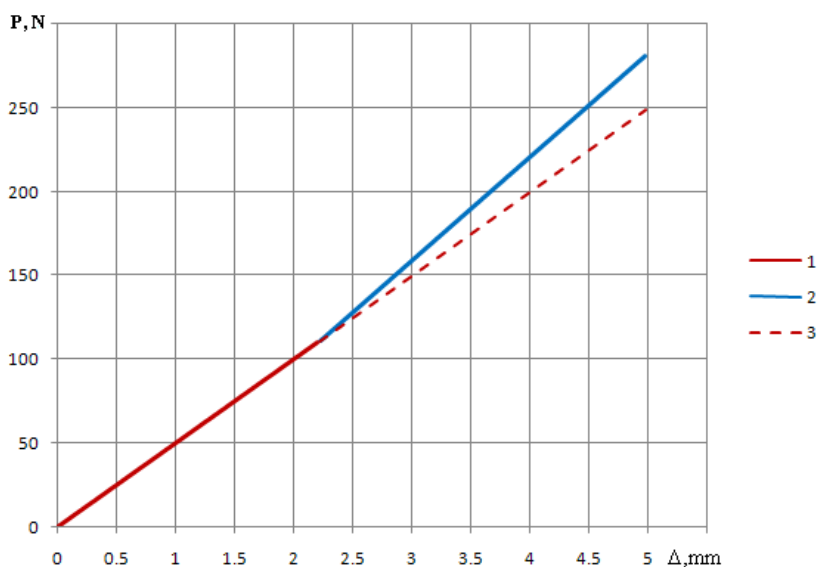
4.19. att. Sakarība spēks – nosēde gumijas kompensatoram Līkne „1” ar gredzenveida ierobežotāju, līkne „2” bez ierobežotāja

Programma fiksēja datus ar intervālu 0.1s. Pēc tam izmantojot saspiešanas eksperimenta datus katram paraugam programmā testXpert II tika aprēķināts gumijas elastības modulis. Analītiskam aprēķinam un modelēšanai tika ņemts elastības moduļa vidējais lielums. Lai vienkāršotu eksperimentu datu apstrādi, tie no programmas testXpert II tika eksportēti Exel faila. Eksperimentāli dati tika attēloti 4.19.att.

### 4.3.2. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu analītiskais risinājums

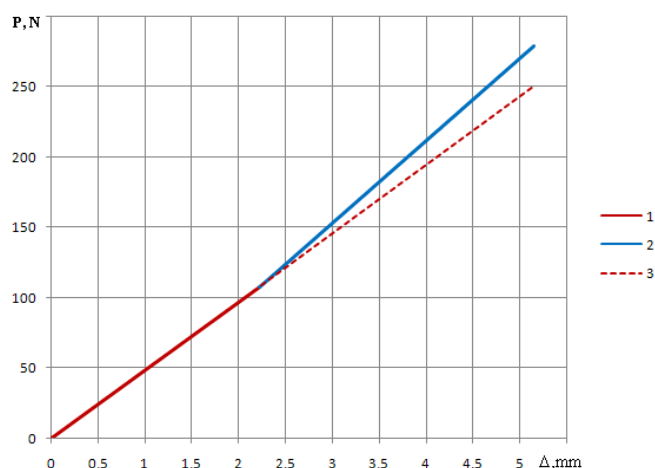
Eksperimentālā parauga ģeometriskie izmēri un materiāla konstantes:  $h = 40\text{mm}$ ,  $D = 36\text{mm}$ ,  $E = 1.55 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $G = 5.19 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $\mu = 0.493$ .

Pirmajā aprēķinā pieņemam, ka gumija ir nesaspiežama. Sakarību „spēks – pārvietojums” rēķinājām pēc formulas (3.15). Aprēķini veicam programmā MatchCad. Rezultāti attēloti 4.20.att.



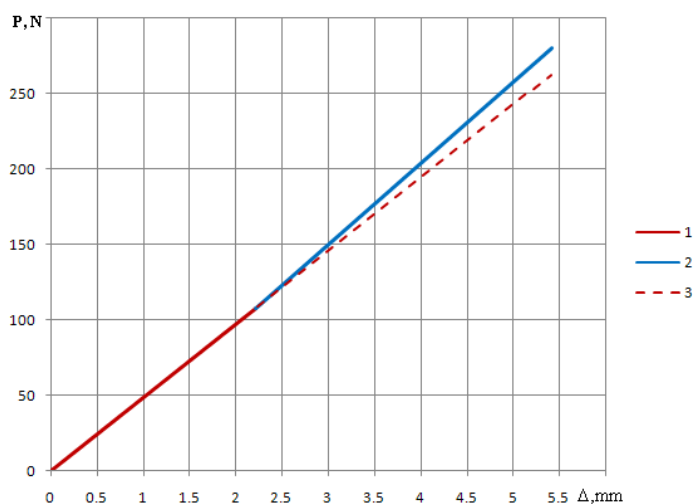
4.20. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram aprēķināts pēc formulas (3.15). Līkne „1” pirmais posms, līkne „2” otrais posms, līkne „3” ja nebūtu gofrēta starpslāņa.

Otrajā aprēķinā pieņemam, ka gumija ir saspiežama. Sakarību „spēks – nosēde” rēķinājām pēc formulas (3.35). Aprēķini veikti programmā MatchCad. Rezultāti attēloti 4.21. att.



4.21. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram aprēķināts pēc formulas (3.109). Līkne „1” pirmais posms, līkne „2” otrais posms, līkne „3” ja nebūtu gofrēta starpslāņa.

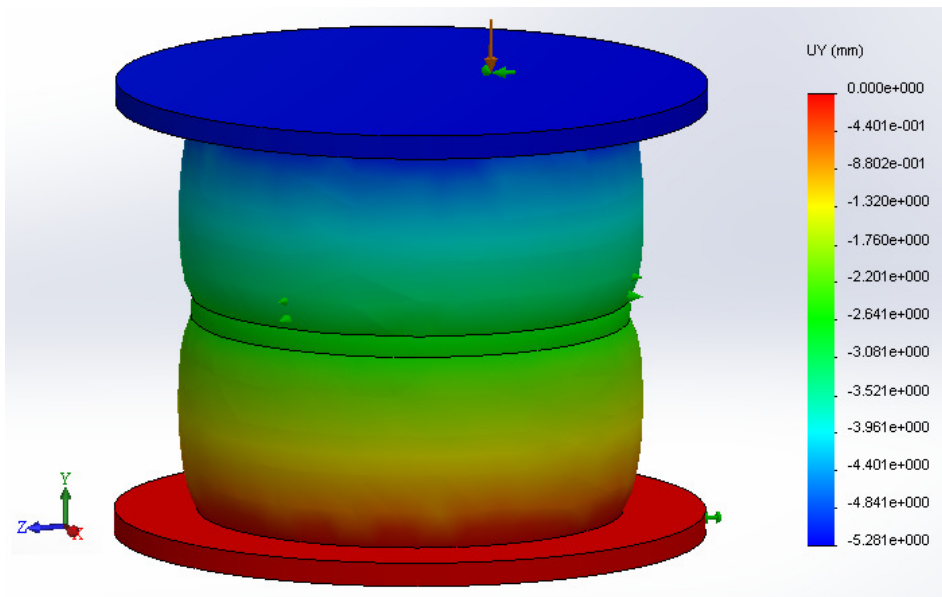
Trešajā aprēķinā pieņemam, ka gumija ir saspiežama un starpslānis deformējas. Šis modelis atbilst eksperimentam, jo eksperimentā gumijas deformācija bija ierobežota tikai arējā virsmā un gumijas deformācijas dēļ kontakta vietā ar riņķi. Tas pats notiek, ja deformējas starpslānis. Sakarību „spēks – pārvietojums” rēķinājām pēc formulas (3.48). Šķietama deformējama starpslāņa parametri tika ņemti, lai vidusslāņa deformācija atbilstu deformācijām eksperimentā. Aprēķini veikti programmā MathCad. Rezultāti attēloti 4.22.att..



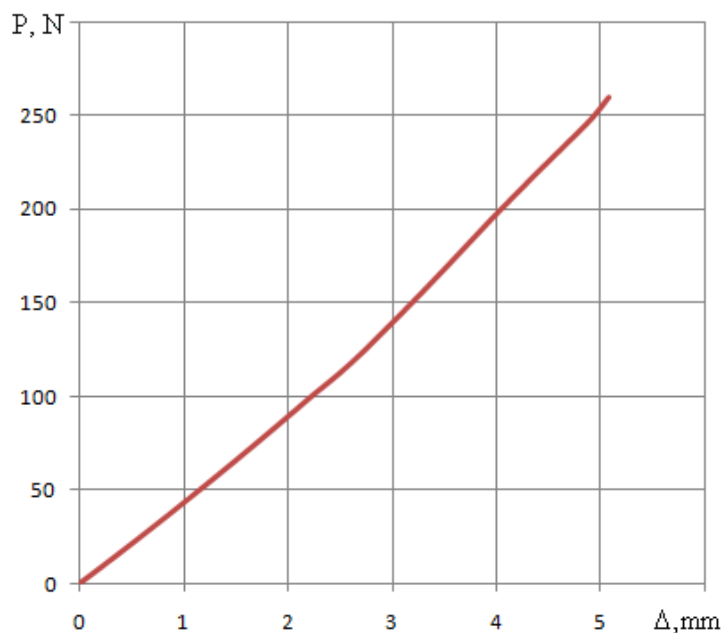
4.22. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram aprēķināta pēc formulas (3.48). Līkne „1” pirmais posms, līkne „2” otrais posms, līkne „3” ja nebūtu gofrēta starpslāņa

### 4.3.3. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu modelēšana SolidWorks vidē

Gumijas kompensatora modelēšanai izmantojam datorprogrammu SolidWorks. SolidWorks veic aprēķinus izmantojot galīgo elementu metodi. Kompensatora modelēšanai izmantojam statistisku nelineāru analīzi. Kompensatora materiāls (gumija) ir tāda paša kā (4.2), tāpēc izmantojam „Mooney Rivlin” gumijas modeli. Gumijas slānim pa vidu tika uzlikts pārvietojuma ierobežojums pa rādiusu (ļauj pārvietoties līdz noteiktam brīdim).



4.23.att. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu saspiešana

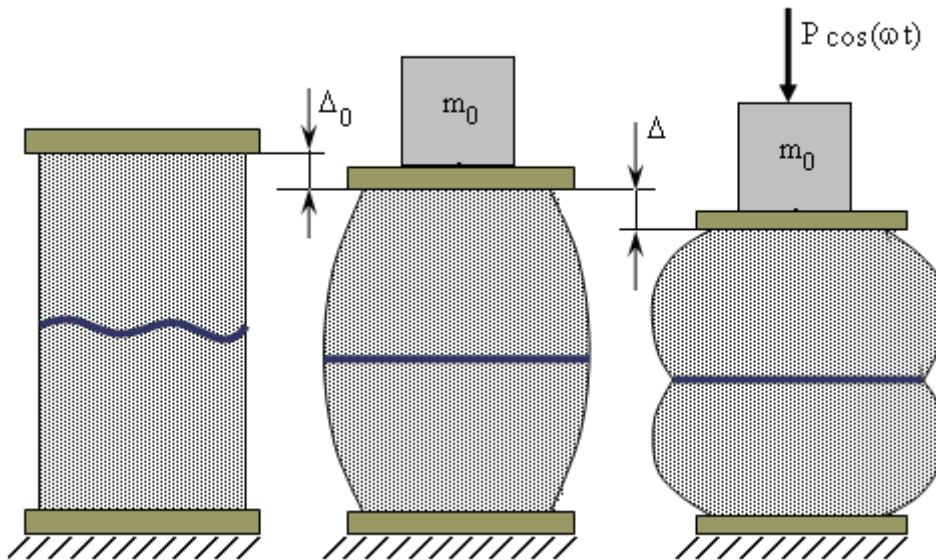


4.24. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” gumijas kompensatoram. SolidWorks modelēšana.

#### 4.4. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu dinamikas pētīšana

Tā kā gumijas amortizatori visbiežāk strādā dinamiskā slogojumā, šajā nodaļā tika parādīts, kā var izmantot iegūtos risinājumus statikā, dinamikas pētīšanai, kad ierosmes spēka frekvence ir zema.

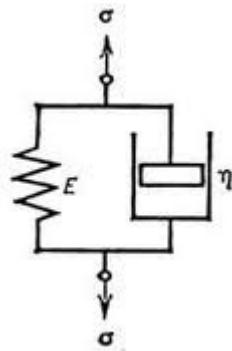
Aplūkosim gadījumu: gumijas kompensators ar mainīgu stingumu ir noslogots ar statisku slodzi  $P_0 = m_0g$  un ar mainīgu spēku  $P \cos(\omega t)$ . (4.25.att.).



4.25. att. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu, dinamisks slogojums

Gumijas kompensatora nosēde zem statiskas slodzes  $\Delta_0$  ir mazāka nekā gumijas kompensatora nosēde kad notiek stinguma pieaugums  $\Delta_1$ . Izvēlamies mainīgam spēkam tādu lielumu, lai svārstības procesā kompensators svārstītos ar piespiedi ( $\Delta_0 + \Delta > 0$ ).

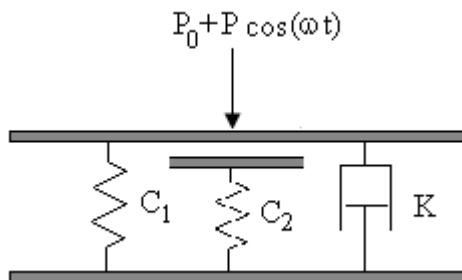
Kompensatora dinamikas pētīšanai izmantojam Foigta modeli [3], [77], [78] 4.26. att., kurš, sastāv no elastīga elementa un viskoza elementa.



4.26. att. Mehāniskais Foigta modelis

Izveidojam dinamisku sistēmu, kura ir ekvivalenta dotam uzdevumam 4.27.att.

**Dinamiskā sistēma** - dinamiskais nepārtrauktais vai diskrētais modelis, kura uzvedība viennozīmīgi un determinēti atkarīga no tā struktūras (S), parametriem (P) un stāvokļa (sākumu  $Q_0$  nosacījumiem) [73].



4.27. att. Gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu modelis dinamikas pētīšanai

Kompensatora slogojums sastāv no divām daļām, no statiska slogojuma  $P_0$  un laikā mainīga slogojuma  $P \cos(\omega t)$ .

Kompensatora dati (4.3. nodaļa):

Stingums: Stingums  $C_1$  ja  $\Delta \leq \Delta_1$ ,  $C_1 + C_2$  ja  $\Delta > \Delta_1$ .

$C_1 = 40$  N/m;  $C_1 + C_2 = 62.5$  N/m; pārvietojums pie kuras notiek kompensatora stinguma pieaugums  $\Delta_1 = 2.4$  mm, spēks pie kura notiek kompensatora stinguma pieaugums  $P_1 = 100$ N.

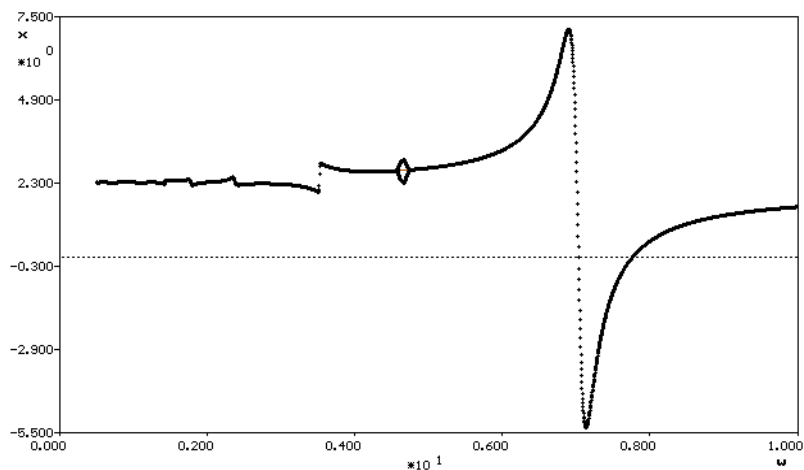
Pieņemam, ka  $P_0 = 80$ N, tad nosēde no  $P_0$  pēc formulas (3.33)  $\Delta_0 = 2$  mm, mainīgs spēks  $P = 100$ N,  $K = 0.23$  [78]

Analizēsim tādas dinamiskas, sistēmas uzvedību izmantojot datorprogrammu NLO. Šī programma ļauj analizēt biliniāras sistēmas.

No sākumā atradīsim režīma nekustīga punkta koordinātes atkarību no ierosmes spēka frekvences (4.28. att.)

**Nekustīgais punkts** - īpašs punkts uz Puankare plaknes, kura atbilst stabiliem vai nestabiliem periodiskiem atrisinājumiem, t.i. noslēgtām fāžu trajektorijām. Izšķir nekustīgo punktu četrus tipus: mezgls, fokuss, sedli un centrs [73].

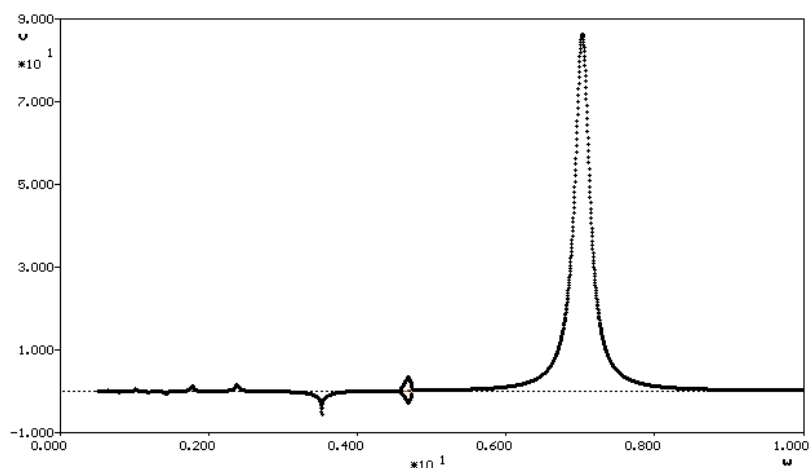
**Puankare plakne** - šķēlums, kas ir saņemts no stroboskopēšanas dinamisko mainīgo (nobīde  $x_p$  un ātrums  $v_p$ ) caur piespiedošā spēka periodu  $T_0$ , tas pats Puankare šķēlums [73].



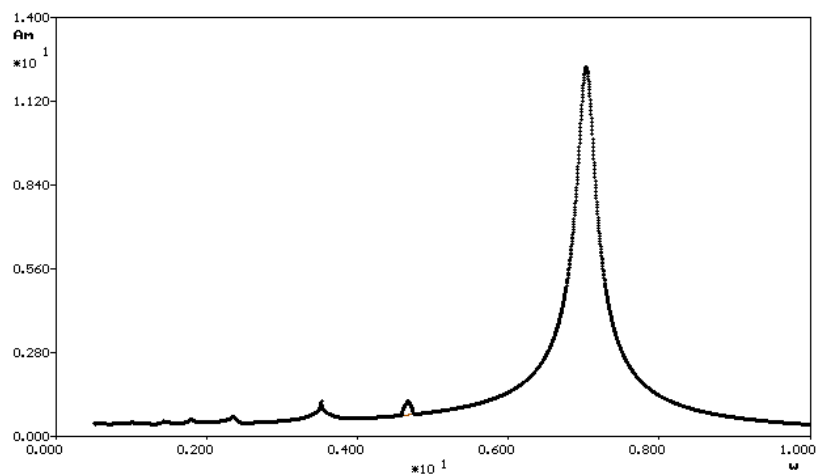
4.28. att. Nekustīga punkta koordinātes atkarība no ierosmes spēka frekvences

No nekustīga punkta koordinātes līknes ir redzams, kad ierosmes spēka frekvence  $\omega = 4.7$  ir viens režīms ar diviem periodiem.

Tālāk konstruēsim nekustīga punkta ātruma diagrammu atkarība no ierosmes spēka frekvences.



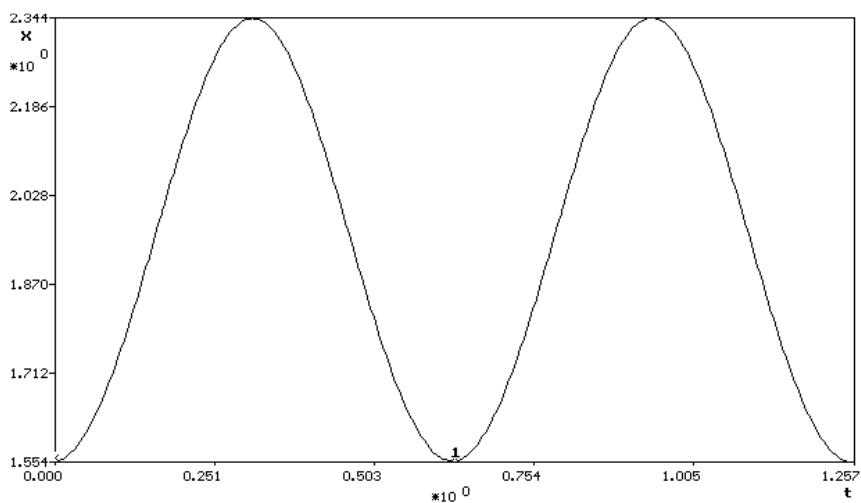
4.29. att. Nekustīga punkta ātruma atkarība no ierosmes spēka frekvences



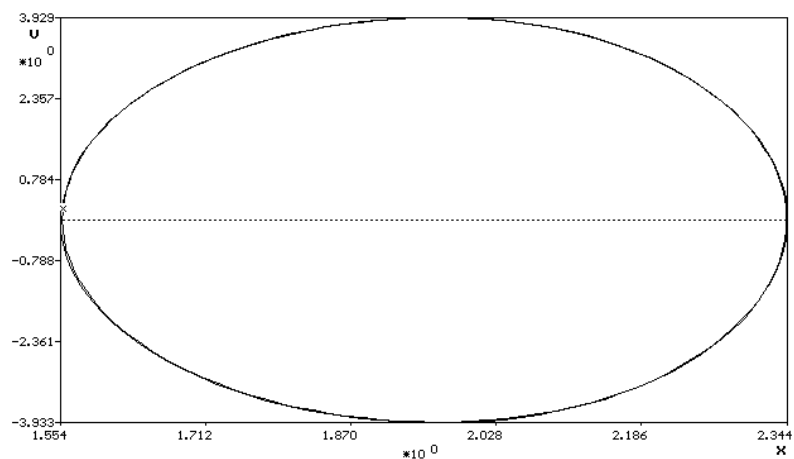
4.30. att. Amplitūdu frekvenču raksturojums.

Konstruēsim periodisku režīmu, „pārvietojums – laiks” diagrammas pie dažiem ierosmes spēka frekvencēm.

**Periodiskais režīms** - stabils vai nestabils periodisks diferenciālvienādojuma atrisinājums vai noslēgta fāžu trajektorija, kuras atbilstībā liekas punktveida nekustīgie punkti atbilstoši attēlojumam [73].

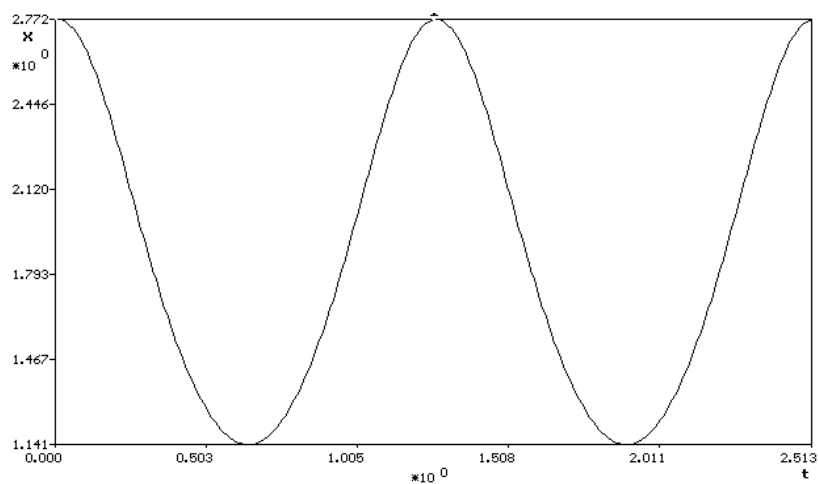


4.31. att. Periodisks režīms. Ierosmes spēka frekvence  $\omega = 10$

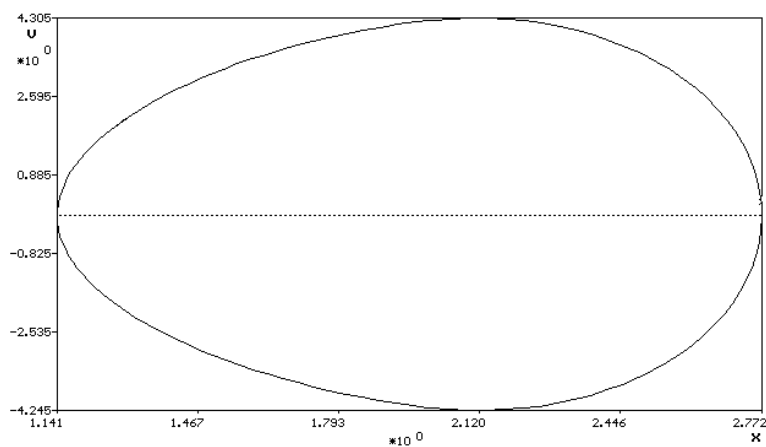


4.32. att. Periodiska režīma fāzes portrets pie ierosmes spēka frekvences  $\omega = 10$

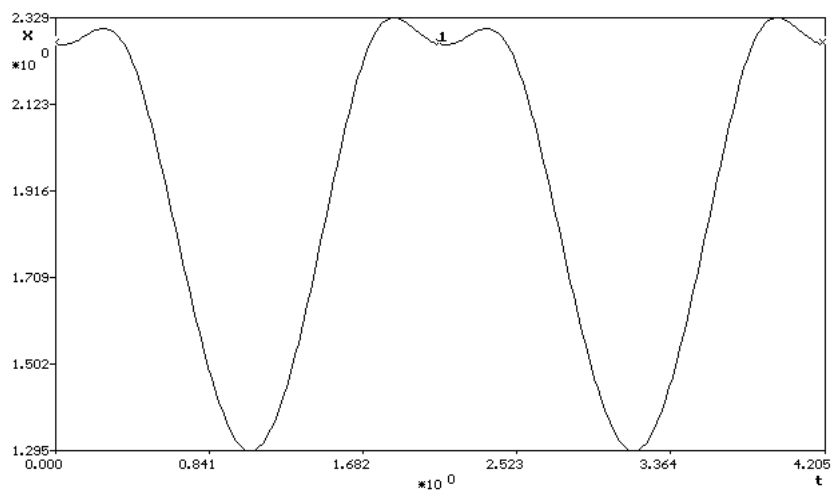
**Fāzes portrets** - režīma portrets, fāžu telpas sadalīšanas struktūrā uz trajektorijas režīma aplūkojamajās dinamiskās sistēmas [73].



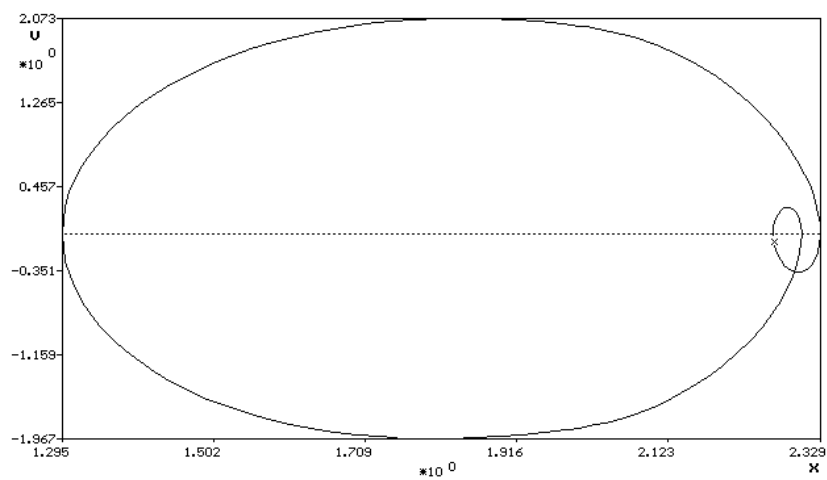
4.33. att. Periodisks režīms. Ierosmes spēka frekvence  $\omega = 5$



4.34. att. Periodiska režīma fāzes portrets pie ierosmes spēka frekvences  $\omega = 5$



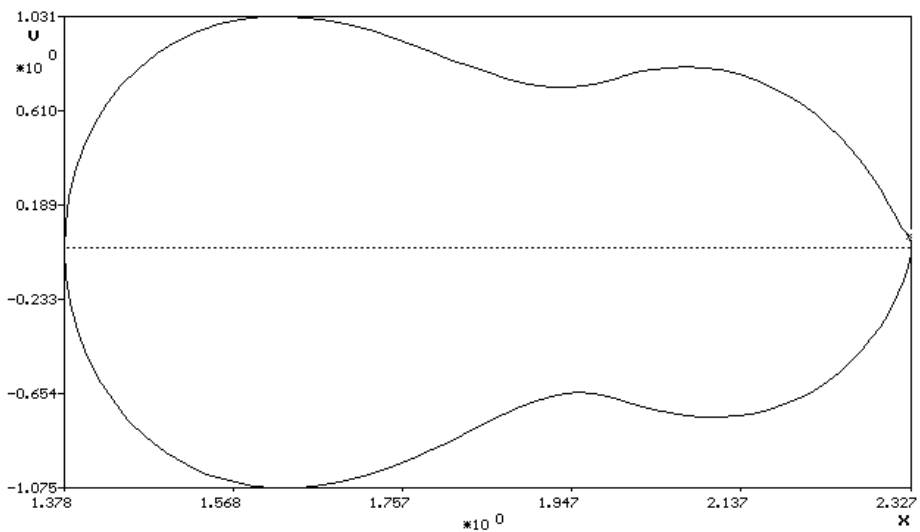
4.35. att. Periodisks režīms. Ierosmes spēka frekvence  $\omega = 3$



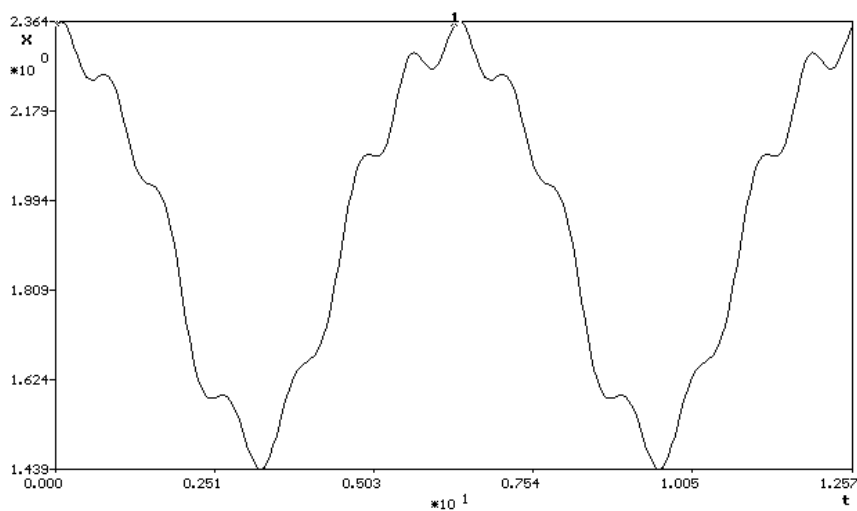
4.36 att. Periodiska režīma fāzes portrets pie ierosmes spēka frekvences  $\omega = 3$



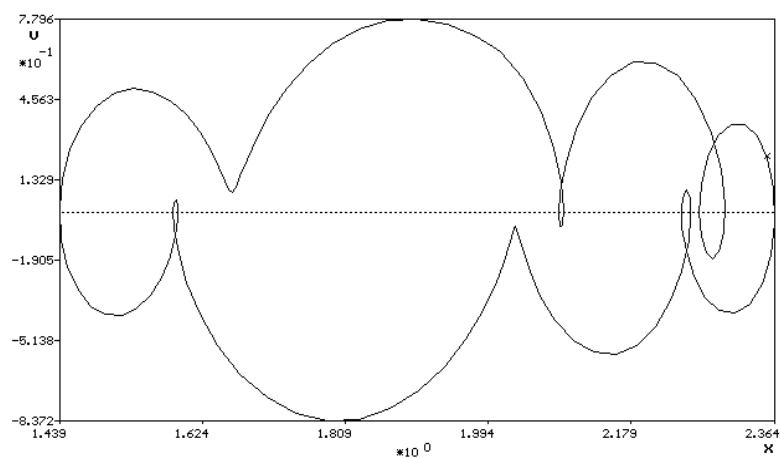
4.37. att. Periodisks režīms. Ierosmes spēka frekvence  $\omega = 2$



4.38. att. Periodiska režīma fāzes portrets pie ierosmes spēka frekvences  $\omega = 2$

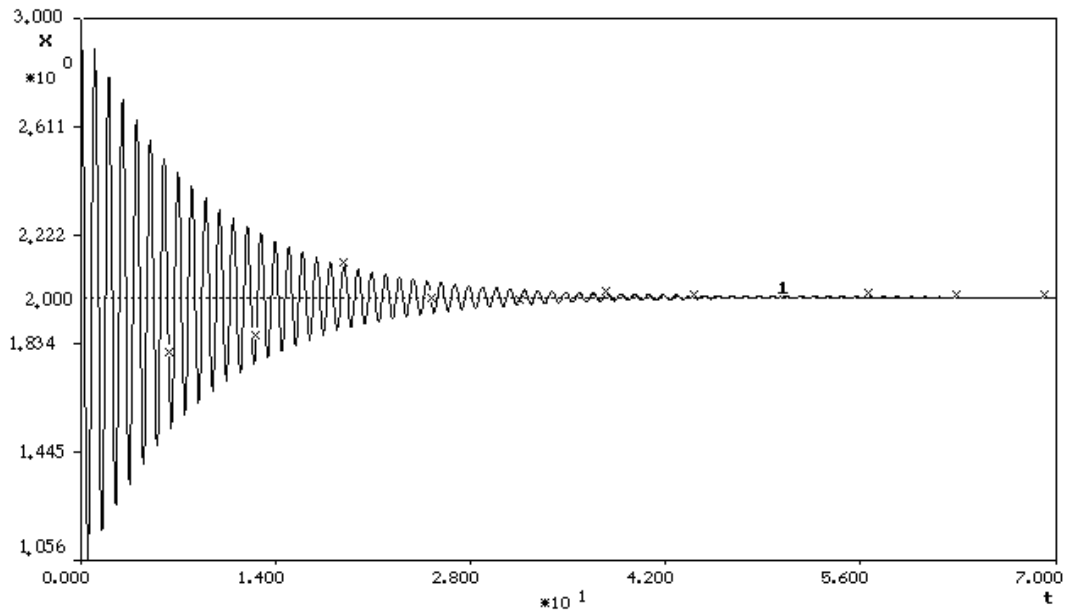


4.39. att. Periodisks režīms. Ierosmes spēka frekvence  $\omega = 1$

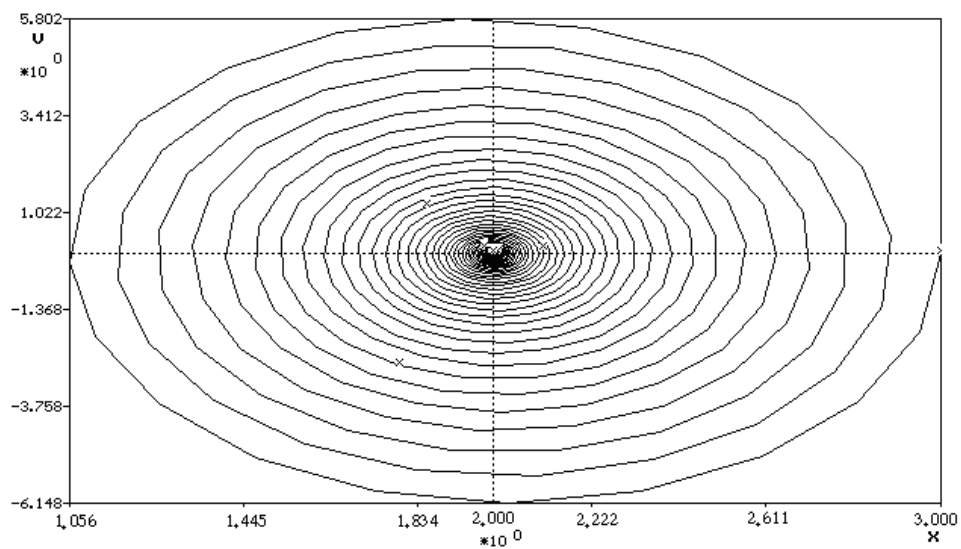


4.40. att. Periodiska režīma fāzes portrets pie ierosmes spēka frekvences  $\omega = 1$

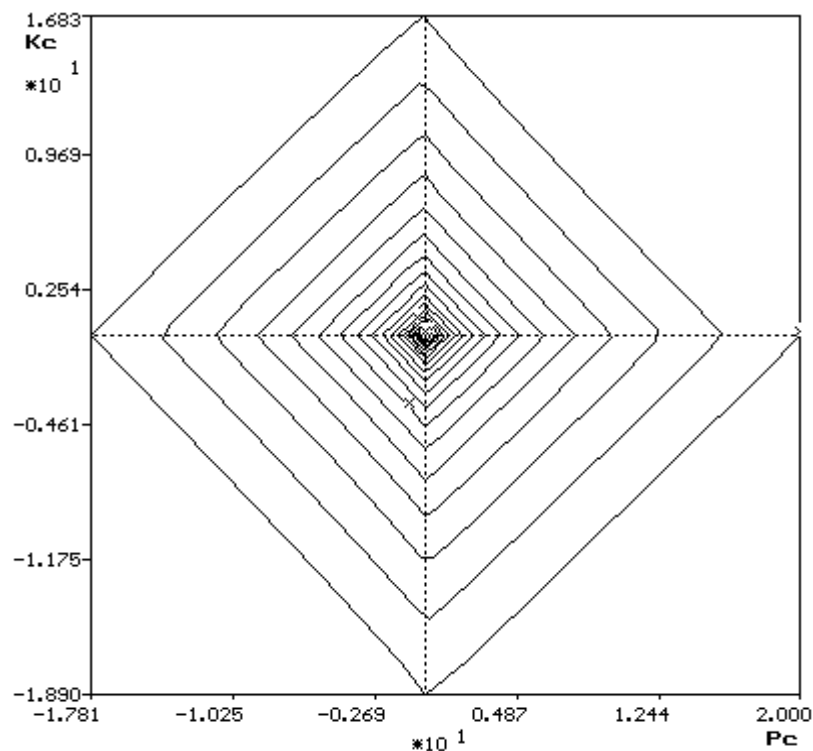
Izpētīsim gumijas kompensatora rimstošas svārstības. Rimstošu svārstības raksturošanai uzkonstruēsim 3 diagrammas: pārvietojums atkarība no laika 4.41.att., fāzes portretu 4.42. att., rimstošu svārstību enerģētiska plakne 4.43. att.. Pēc enerģētiskās plaknes ļoti izdevīgi analizēt kompensatora slāpēšanas īpašības.



4.41. att. Gumijas kompensatora rimstošas svārstības



4.42 att. Rimstošu svārstību fāzes portrets



4.43. att. Rimstošu svārstību enerģētiska plakne [73]

Pēc gumijas kompensatora dinamikas analīzes var secināt sekojošo:

- Dinamiskai sistēmai ir viens stabils periodisks režīms. Kad ierosmes spēka frekvence  $\omega = 4.7$  ir viens režīms ar diviem periodiem.
- Dinamiskas sistēmas rezonanse ir pie  $\omega = 7.3$ .
- Dinamiska sistēma nav nestabilu režīmu.

#### 4.5. Nodaļas secinājumi

Ceturtajā nodaļā veikti gumijas kompensatoru saspiešanas naturāli eksperimenti. Bija izgatavoti trīs dažādi kompensatori un testēti spiedē. Pēc tam bija veikti šo kompensatoru analītiski aprēķini, izmantojot formulas, kas iegūtas otrajā nodaļā. Tāpat bija veikts šo kompensatoru aprēķins ar galīgo elementu programmas SolidWorks palīdzību. Iegūti rezultāti (eksperimentāli, analītiski un modelēšanas) bija salīdzināti sava starpā. Eksperimenti parādīja, ka ar iegūtām formulām var pietiekami precīzi aprēķināt gumijas kompensatora stinguma raksturlīkni. Bija veikta gumijas kompensatora ar mainīgu stingumu pētīšana, kad uz to darbojas mainīgs spēks ar zemu frekvenci. Pētāmai dinamiskai sistēmai: bija atrasti: viens stabils periodisks režīms, viens režīms ar diviem periodiem un dinamiskas sistēmas rezonanse.

## SECINĀJUMI

- Izstrādāta gumijas-tehnisko izstrādājumu spriegota stāvokļa statistiskā slogojumā mazu deformāciju apgabalā, neievērojot elastomēra saspiežamību un izmantojot deformācijas pilnas potenciālas enerģijas minimuma principu, aprēķināšanas metodika;
- Noteikti gumijas-tehnisko izstrādājumu tuvināto risinājumu, kuri iegūti izmantojot hipotēzi par elastomēra nesaspiežamību, pielietošanas apgabalā, ievērojot izstrādājuma formas faktoru un reālu Puasona koeficienta vērtību;
- Izstrādātas plānslāņa gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskās metodes statistiskās slodzes gadījumā mazo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību un neelastomēra slāņu deformāciju;
- Izstrādāta plānslāņa gumijas tehniskā izstrādājuma aprēķināšanas metodika, ievērojot elastomēra fizikālo nelinearitāti;
- Izstrādāta gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas analītiskā metode statistiskās slodzes gadījumā vidējo deformāciju apgabalā, ņemot vērā elastomēra vājo saspiežamību, izmantojot Delta-metodi;
- Izstrādāta saliktas formas gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodika, izmantojot variācijas metodes pārtrauktiem spēkiem un pārvietojumiem;
- Izstrādāta gumijas tehniskā izstrādājuma stinguma raksturojuma, "spēks-pārvietojums", analītiskā risinājuma precizitātes novērtējuma metodika, kas iegūta, izmantojot pilnās potenciālās enerģijas minimuma principu.
- Piedāvātas trīs jaunas kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu konstrukcijas, kas nodrošina nepieciešamo stinguma raksturojumu "spēks-pārvietojums". Izstrādāta šo kompensējošo gumijas-tehnisko izstrādājumu aprēķināšanas metodikas.
- Ar eksperimenta palīdzību pārbaudīta iegūto formula pareizība.

## **Pielikumi**

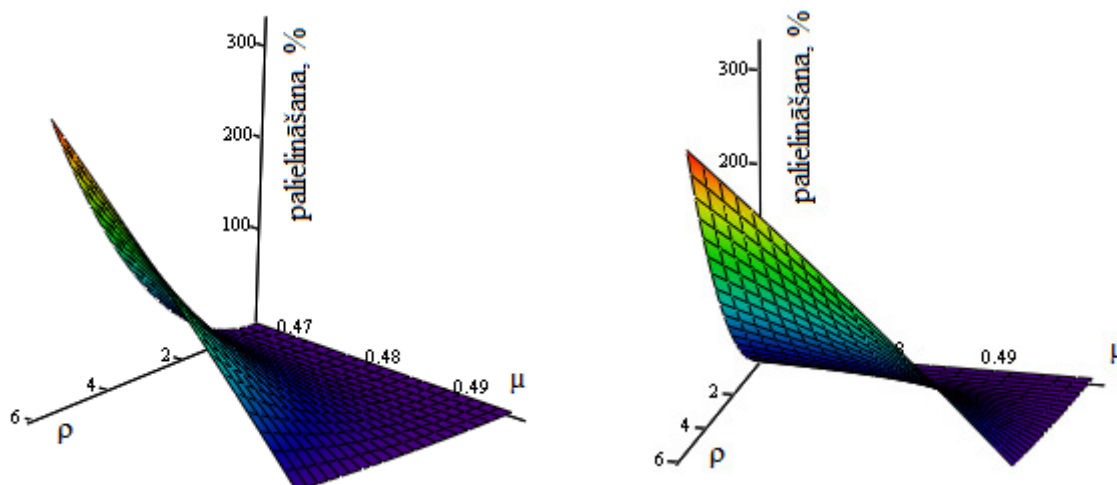
## Gumijas-tehniskā izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspižamība

Apaļa gumijas-tehniskā izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspižamība.

Apzīmējumi:  $\rho$  - formas faktors ( $\rho = b/h$ , kur  $b$  – izstrādājuma rādiuss,  $h$  – gumijas slāņa augstums);

$\mu$  - Puasona koeficients gumijai;

$\rho = 0.2 \div 6$ ;  $\mu = 0.470 \div 0.499$



1.att. Apaļa gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspižamība

Tabula Nr.1

Apaļa gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana procentos, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspižamība.

$\rho \backslash \mu$	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
0.2	2.9	2.4	1.9	1.4	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
0.4	3.6	3.0	2.4	1.8	1.2	1.0	0.7	0.5	0.2	0.1
0.6	4.8	4.0	3.2	2.4	1.6	1.3	1.0	0.6	0.3	0.2
0.8	6.7	5.6	4.5	3.4	2.3	1.8	1.4	0.9	0.5	0.2
1.0	9.3	7.8	6.2	4.7	3.2	2.5	1.9	1.3	0.6	0.3

Tabulas Nr.1 turpinājums

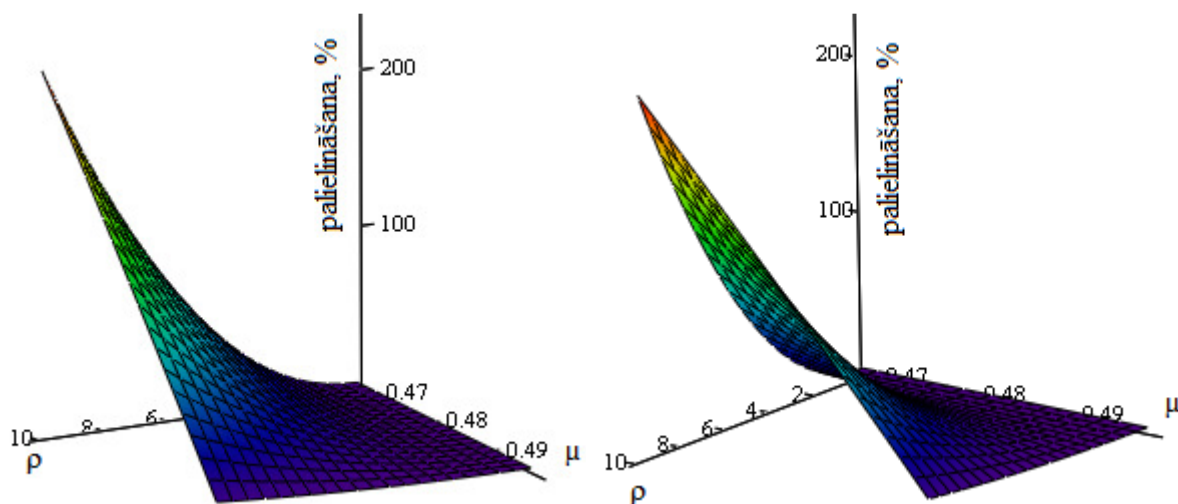
$\mu \backslash k$	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
1.2	12.6	10.6	8.5	6.4	4.3	3.5	2.6	1.7	0.9	0.4
1.4	16.8	14.1	11.3	8.6	5.7	4.6	3.5	2.3	1.2	0.6
1.6	21.7	18.2	14.7	11.1	7.5	6.0	4.5	3.0	1.5	0.8
1.8	27.4	23.1	18.6	14.1	9.5	7.6	5.7	3.8	1.9	1.0
2.0	34.0	28.6	23.1	17.5	11.8	9.4	7.1	4.8	2.4	1.2
2.2	41.3	34.7	28.1	21.3	14.3	11.5	8.7	5.8	2.9	1.5
2.4	49.4	41.6	33.6	25.5	17.2	13.8	10.4	7.0	3.5	1.8
2.6	58.2	49.1	39.7	30.1	20.3	16.3	12.3	8.2	4.1	2.1
2.8	67.8	57.2	46.3	35.1	23.7	19.1	14.4	9.6	4.8	2.4
3.0	78.2	65.9	53.4	40.6	27.4	22.0	16.6	11.1	5.6	2.8
3.2	89.3	75.3	61.0	46.4	31.3	25.2	19.0	12.7	6.4	3.2
3.4	101.2	85.4	69.2	52.6	35.5	28.6	21.5	14.4	7.3	3.6
3.6	113.8	96.1	77.9	59.2	40.0	32.2	24.2	16.3	8.2	4.1
3.8	127.1	107.3	87.0	66.2	44.7	36.0	27.1	18.2	9.1	4.6
4.0	141.2	119.3	96.7	73.5	49.7	40.0	30.2	20.2	10.2	5.1
4.2	156.1	131.8	106.9	81.3	55.0	44.2	33.4	22.4	11.2	5.6
4.4	171.6	145.0	117.6	89.4	60.5	48.7	36.7	24.6	12.4	6.2
4.6	187.9	158.8	128.8	98.0	66.3	53.3	40.2	27.0	13.6	6.8
4.8	205.0	173.2	140.5	106.9	72.3	58.2	43.9	29.4	14.8	7.4
5.0	222.7	188.2	152.7	116.2	78.6	63.3	47.7	32.0	16.1	8.1
5.2	241.2	203.9	165.4	125.9	85.2	68.5	51.7	34.7	17.4	8.7
5.4	260.5	220.2	178.7	136.0	92.0	74.0	55.9	37.5	18.8	9.5
5.6	280.4	237.0	192.4	146.4	99.1	79.7	60.2	40.4	20.3	10.2

Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

Apzīmējumi:  $\rho$  - formas faktors ( $\rho = a/h$ , kur  $a$  – izstrādājuma īsākas malas garums,  $h$  – gumijas slāņa augstums);

$\mu$  - Puasona koeficients gumijai;

$\rho = 0.5 \div 10$ ;  $\mu = 0.470 \div 0.499$ ; taisnstūra izstrādājuma malu garumu attiecība 1:1



2.att. Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

Tabula Nr.2

Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana procentos, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

$\rho \backslash \mu$	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
0.5	2.4	2.0	1.6	1.2	0.8	0.6	0.5	0.3	0.2	0.1
1.0	3.6	3.0	2.4	1.8	1.2	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
1.5	5.7	4.8	3.8	2.9	1.9	1.5	1.1	0.8	0.4	0.2
2.0	9.1	7.6	6.1	4.6	3.0	2.4	1.8	1.2	0.6	0.3
2.5	13.7	11.4	9.2	6.9	4.6	3.7	2.8	1.9	0.9	0.5
3.0	19.6	16.4	13.2	9.9	6.6	5.3	4.0	2.7	1.3	0.7
3.5	26.8	22.4	18.0	13.6	9.1	7.3	5.5	3.7	1.8	0.9

Tabulas Nr.2 turpinājums

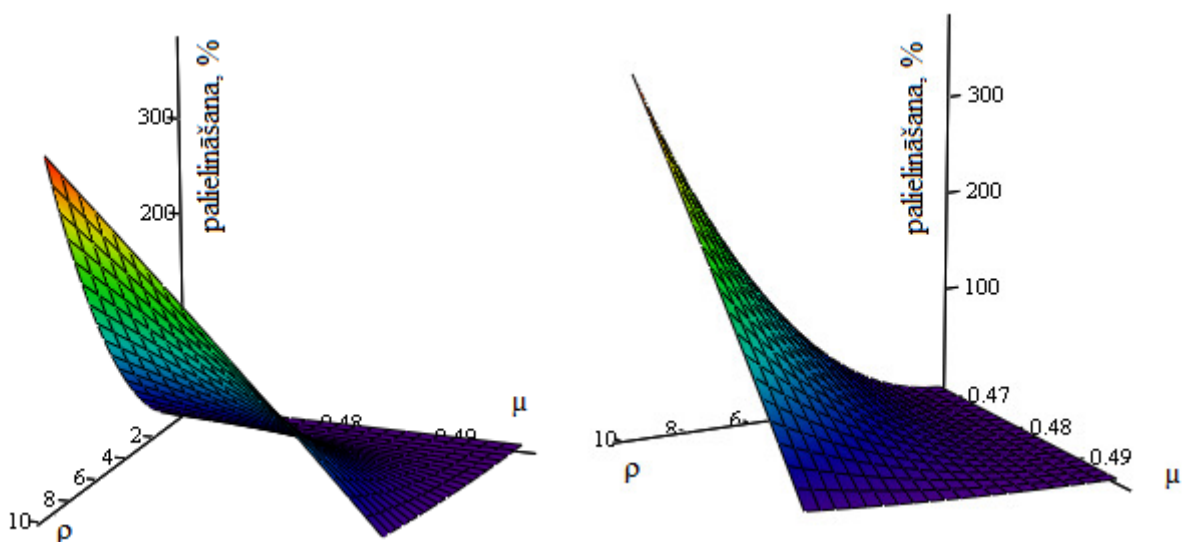
$\mu$ k	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
4.0	35.2	29.5	23.8	17.9	12.0	9.6	7.2	4.8	2.4	1.2
4.5	45.0	37.7	30.4	22.9	15.4	12.3	9.3	6.2	3.1	1.6
5.0	55.9	46.9	37.8	28.5	19.2	15.4	11.6	7.7	3.9	1.9
5.5	68.1	57.2	46.1	34.8	23.4	18.8	14.1	9.4	4.7	2.4
6.0	81.5	68.4	55.2	41.7	28.0	22.5	16.9	11.3	5.7	2.8
6.5	96.1	80.7	65.1	49.2	33.1	26.5	20.0	13.4	6.7	3.4
7.0	112.0	94.0	75.8	57.3	38.5	30.9	23.3	15.6	7.8	3.9
7.5	129.0	108.3	87.4	66.1	44.4	35.7	26.8	17.9	9.0	4.5
8.0	147.2	123.7	99.8	75.4	50.7	40.7	30.6	20.5	10.3	5.2
8.5	166.6	140.0	112.9	85.4	57.4	46.1	34.7	23.2	11.6	5.8
9.0	187.1	157.3	126.9	96.0	64.6	51.8	39.0	26.1	13.1	6.6
9.5	208.9	175.6	141.7	107.2	72.1	57.9	43.6	29.2	14.6	7.3
10	231.9	194.9	157.3	119.0	84.6	64.6	51.8	39.0	26.1	13.1

Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība.

Apzīmējumi:  $\rho$  - formas faktors ( $\rho = a/h$ , kur  $a$  – izstrādājuma īsākas malas garums,  $h$  – gumijas slāņa augstums);

$\mu$  - Puasona koeficients gumijai;

$\rho = 0.5 \div 10$ ;  $\mu = 0.470 \div 0.499$ ; taisnstūra izstrādājuma malu garumu attiecība 1:2



3.att.Taisnstūra gumijas-tehniskā izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

Tabula Nr.3

Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana procentos, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

$\rho \backslash \mu$	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
0.5	2.9	2.4	1.9	1.4	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
1.0	5.3	4.5	3.6	2.7	1.8	1.4	1.1	0.7	0.4	0.2
1.5	9.5	7.9	6.3	4.8	3.2	2.5	1.9	1.3	0.6	0.3
2.0	15.5	12.9	10.4	7.8	5.2	4.2	3.1	2.1	1.1	0.5
2.5	23.4	19.6	15.8	11.9	8.0	6.4	4.8	3.2	1.6	0.8
3.0	33.4	28.0	22.5	17.0	11.4	9.1	6.9	4.6	2.3	1.1

Tabulas Nr.3 turpinājums

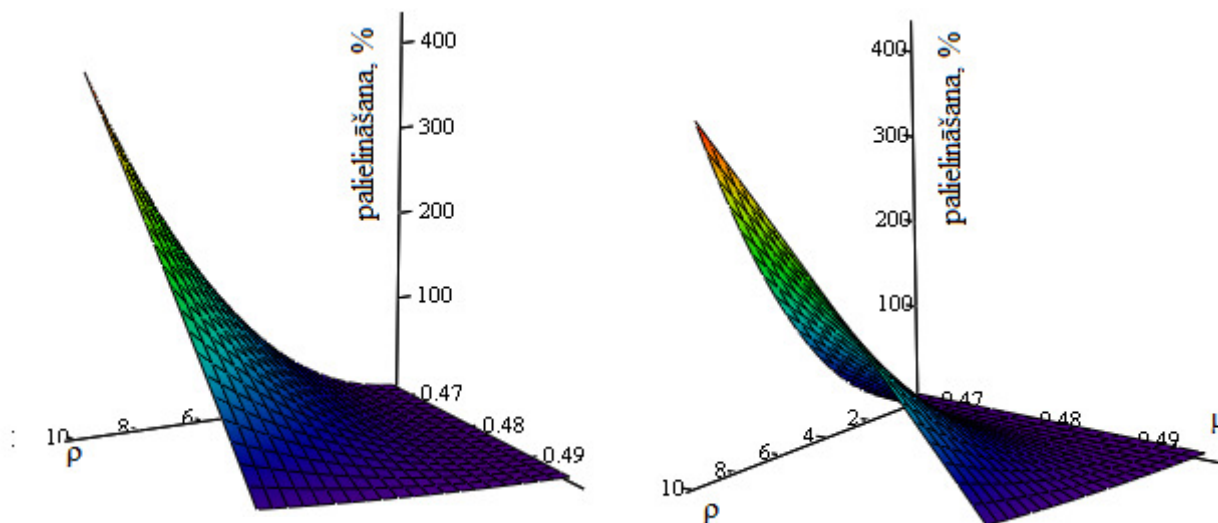
$\mu$ k	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
3.5	45.3	38.0	30.6	23.1	15.5	12.4	9.3	6.2	3.1	1.6
4.0	59.2	49.7	40.0	30.2	20.3	16.3	12.2	8.2	4.1	2.1
4.5	75.1	63.0	50.8	38.4	25.8	20.7	15.6	10.4	5.2	2.6
5.0	92.8	77.9	62.8	47.5	31.9	25.6	19.3	12.9	6.5	3.2
5.5	112.5	94.5	76.2	57.6	38.7	31.1	23.4	15.6	7.8	3.9
6.0	134.1	112.7	90.9	68.7	46.2	37.1	27.9	18.7	9.4	4.7
6.5	157.6	132.4	106.9	80.8	54.3	43.6	32.8	22.0	11.0	5.5
7.0	183.0	153.8	124.1	93.9	63.1	50.7	38.1	25.5	12.8	6.4
7.5	210.3	176.8	142.7	107.9	72.6	58.3	43.9	29.3	14.7	7.4
8.0	239.5	201.3	162.5	123.0	82.7	66.4	50.0	33.4	16.8	8.4
8.5	270.6	227.5	183.6	139.0	93.5	75.1	56.5	37.8	19.0	9.5
9.0	303.6	255.3	206.0	155.9	104.9	84.2	63.4	42.4	21.3	10.7
9.5	338.5	284.6	229.7	173.9	117.0	93.9	70.7	47.3	23.7	11.9
10	375.3	315.5	254.7	192.8	129.7	104.2	78.4	52.5	26.3	13.2

Taisnstūra gumijas-tehniskā izstrādājuma stinguma palielināšana, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība.

Apzīmējumi:  $\rho$  - formas faktors ( $\rho = a/h$ , kur  $a$  – izstrādājuma īsākas malas garums,  $h$  – gumijas slāņa augstums);

$\mu$  - Puasona koeficients gumijai;

$\rho = 0.5 \div 10$ ;  $\mu = 0.470 \div 0.499$ ; taisnstūra izstrādājuma mālu garumu attiecība 1:3



4.att. Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

Tabula Nr.4

Taisnstūra gumijas-tehniska izstrādājuma stinguma palielināšana procentos, ja aprēķinos netiek ņemta vērā gumijas vāja saspiežamība

$\rho \backslash \mu$	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
0.5	3.5	2.9	2.3	1.8	1.2	0.9	0.7	0.5	0.2	0.1
1.0	6.8	5.7	4.5	3.4	2.3	1.8	1.4	0.9	0.5	0.2
1.5	11.7	9.8	7.9	5.9	3.9	3.2	2.4	1.6	0.8	0.4
2.0	18.6	15.6	12.5	9.4	6.3	5.1	3.8	2.5	1.3	0.6
2.5	27.7	23.2	18.7	14.1	9.4	7.6	5.7	3.8	1.9	1.0
3.0	39.0	32.7	26.3	19.9	13.3	10.7	8.0	5.4	2.7	1.3
3.5	52.5	44.1	35.5	26.8	18.0	14.4	10.8	7.3	3.6	1.8

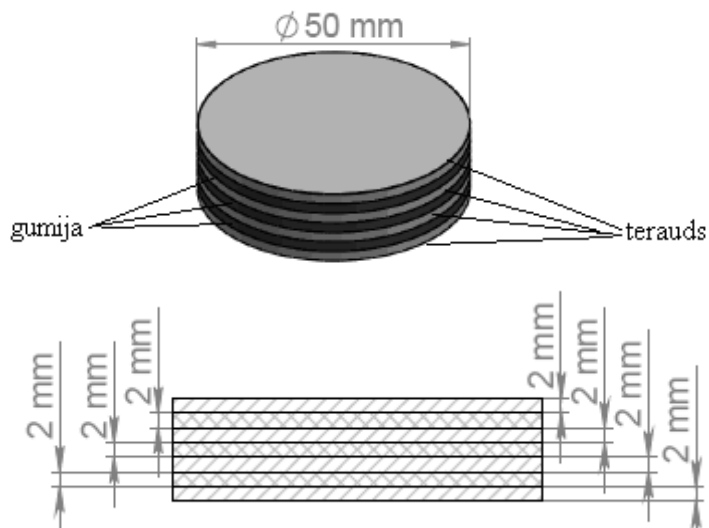
Tabulas Nr.4 turpinājums

$\mu$ k	0.470	0.475	0.480	0.485	0.490	0.492	0.494	0.496	0.498	0.499
4.0	68.2	57.3	46.1	34.9	23.4	18.8	14.1	9.4	4.7	2.4
4.5	86.1	72.3	58.3	44.0	29.6	23.7	17.9	11.9	6.0	3.0
5.0	106.1	89.1	71.9	54.3	36.5	29.3	22.1	14.7	7.4	3.7
5.5	128.3	107.8	86.9	65.7	44.2	35.5	26.7	17.9	9.0	4.5
6.0	152.6	128.2	103.5	78.2	52.6	42.2	31.8	21.3	10.7	5.3
6.5	179.1	150.5	121.4	91.9	61.8	49.6	37.3	25.0	12.5	6.3
7.0	207.7	174.6	140.9	106.6	71.7	57.5	43.3	29.0	14.5	7.3
7.5	238.4	200.4	161.7	122.4	82.3	66.1	49.7	33.3	16.7	8.4
8.0	271.3	228.0	184.1	139.3	93.7	75.2	56.6	37.9	19.0	9.5
8.5	306.3	257.5	207.8	157.3	105.8	85.0	64.0	42.8	21.5	10.8
9.0	343.4	288.7	233.1	176.4	118.7	95.3	71.7	48.0	24.1	12.1
9.5	382.6	321.7	259.7	196.6	132.3	106.2	80.0	53.5	26.9	13.5
10	424.0	356.5	287.8	217.9	146.6	117.7	88.6	59.3	29.8	14.9

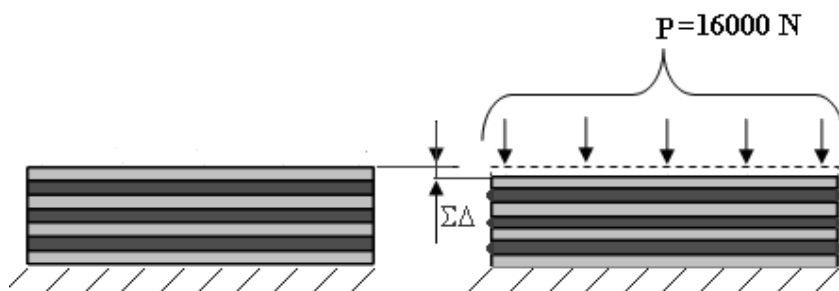
## Plānslāņu gumijas - metāla kompensatoru aprēķins

### Paraugs Nr.1.

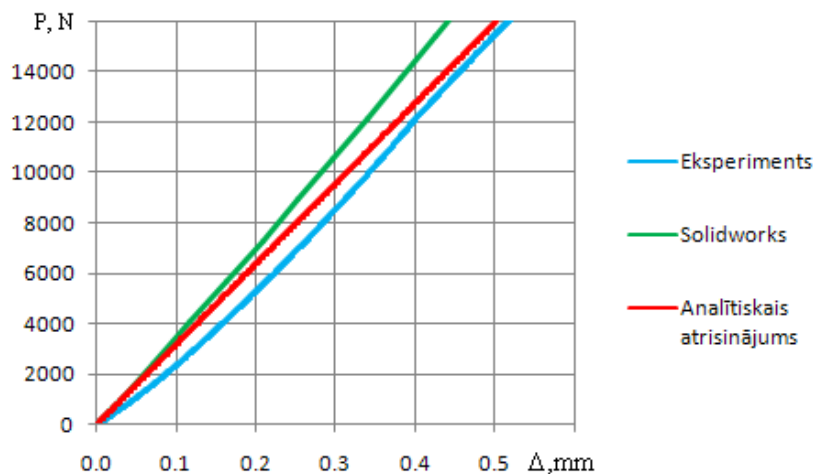
Paraugs Nr.1:  $h_e = 2\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $R = 25\text{mm}$ ,  $E = 5\text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 16000\text{ N}$



1.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.1



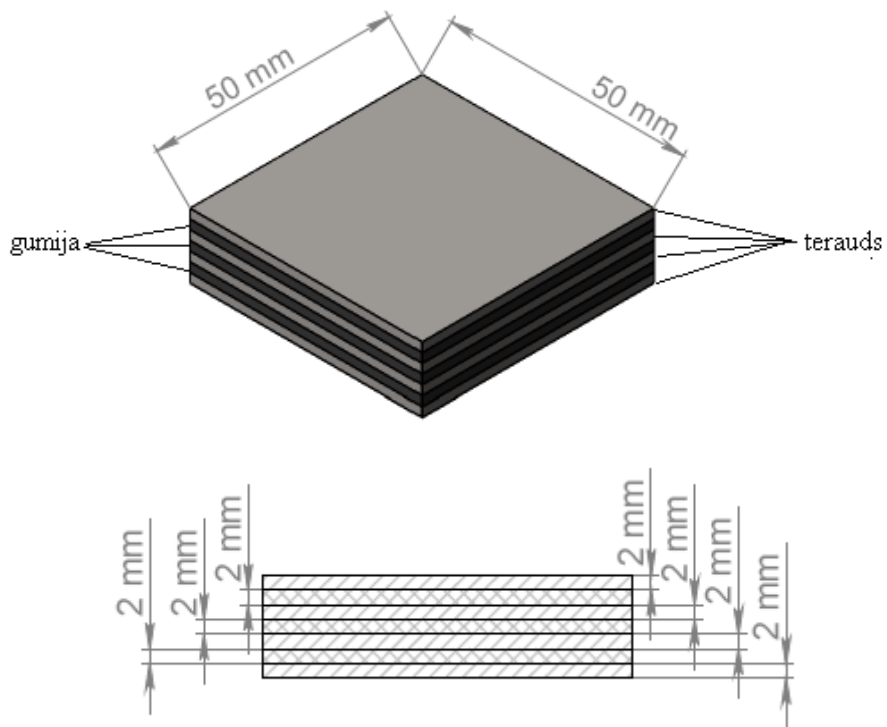
2.att. Parauga Nr.1 slojuma shēma



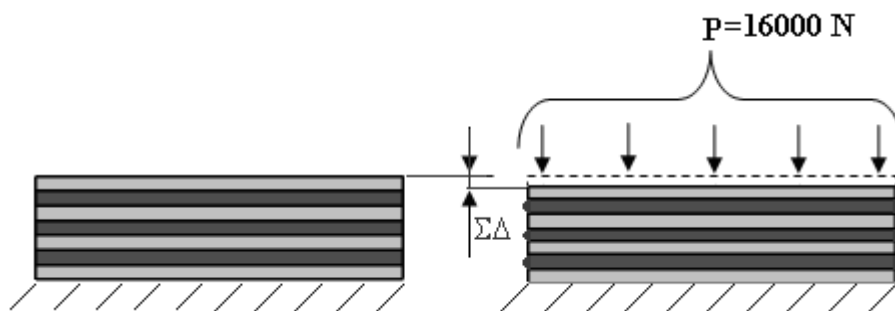
3.att. Sakarība „spēks - pārvietojums” paraugam Nr.1

### Paraugs Nr.2.

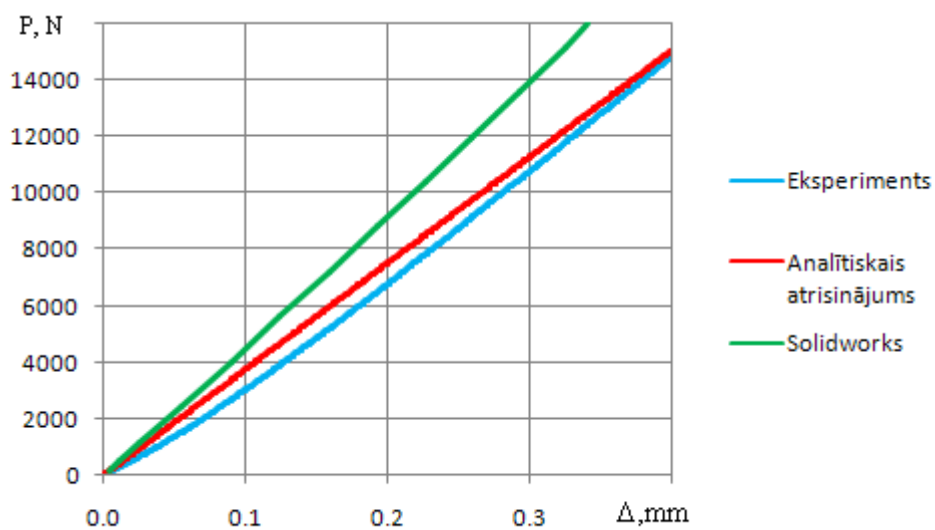
Paraugs Nr.2:  $h_e = 2\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $a = 50\text{mm}$ ,  $b = 50\text{mm}$ ,  $E = 5\text{MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 16000\text{N}$



4.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.2.



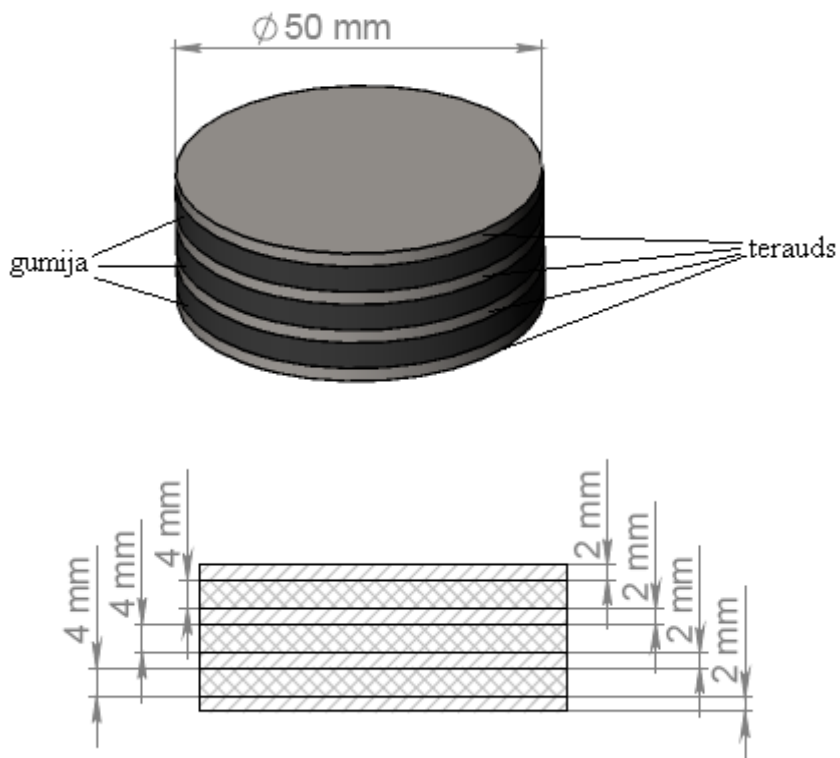
5.att. Parauga Nr.2. slojuma shēma.



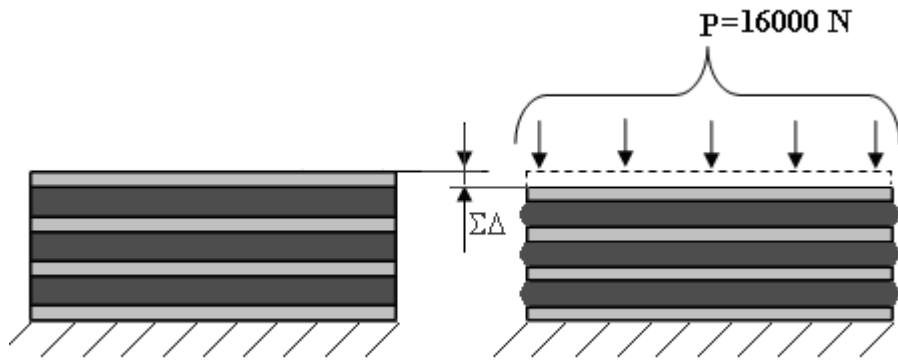
6. att. Sakarība „spēks – pārvietojums” paraugam Nr.1

### Paraugs Nr.3.

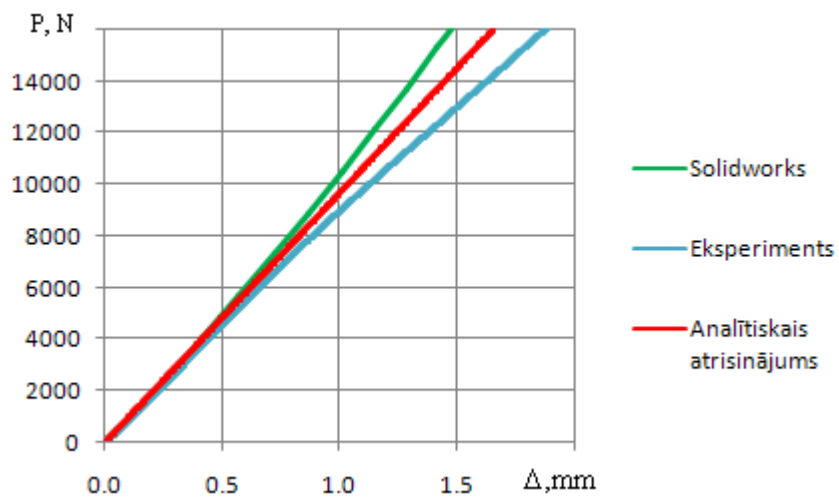
Paraugs Nr.3.:  $h_e = 4\text{ mm}$ ,  $h_m = 2\text{ mm}$ ,  $R = 25\text{ mm}$ ,  $E = 5\text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 16000\text{ N}$



7.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.3.



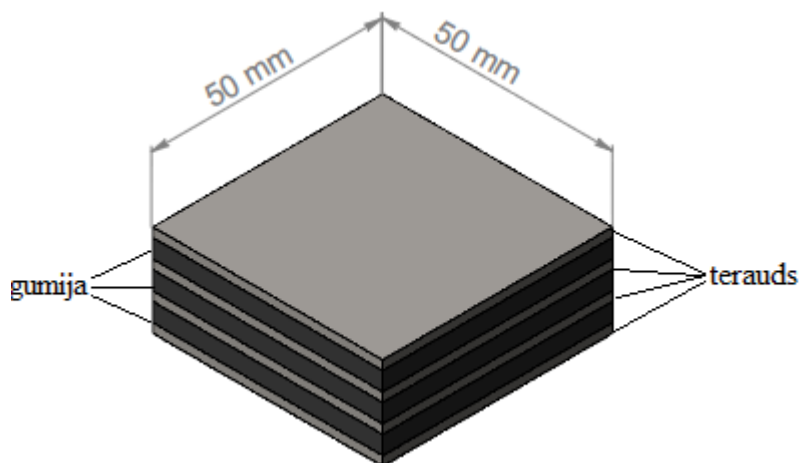
8.att. Parauga Nr.3. sloojuma shēma.

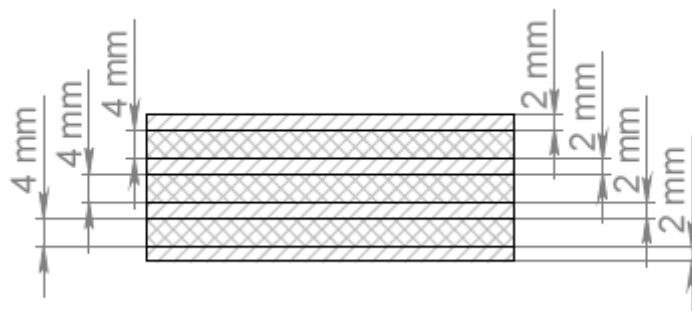


9.att. Sakarība „spēks - nosēde” paraugam Nr.3

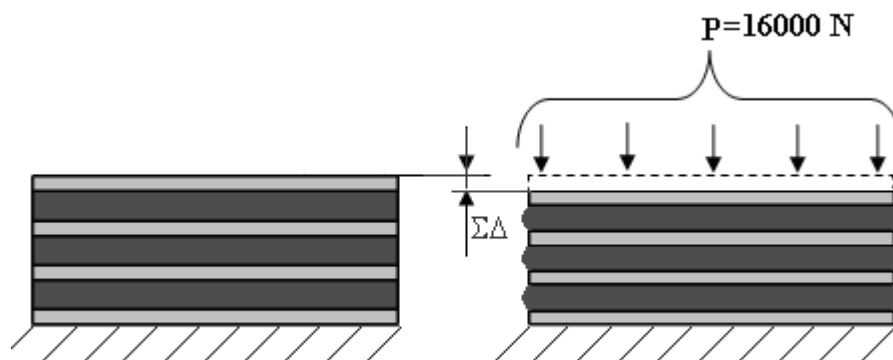
#### Paraugs Nr.4.

Paraugs Nr.4.:  $h_e = 4\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $a = 50\text{mm}$ ,  $b = 50\text{mm}$ ,  $E = 5\text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 16000\text{N}$

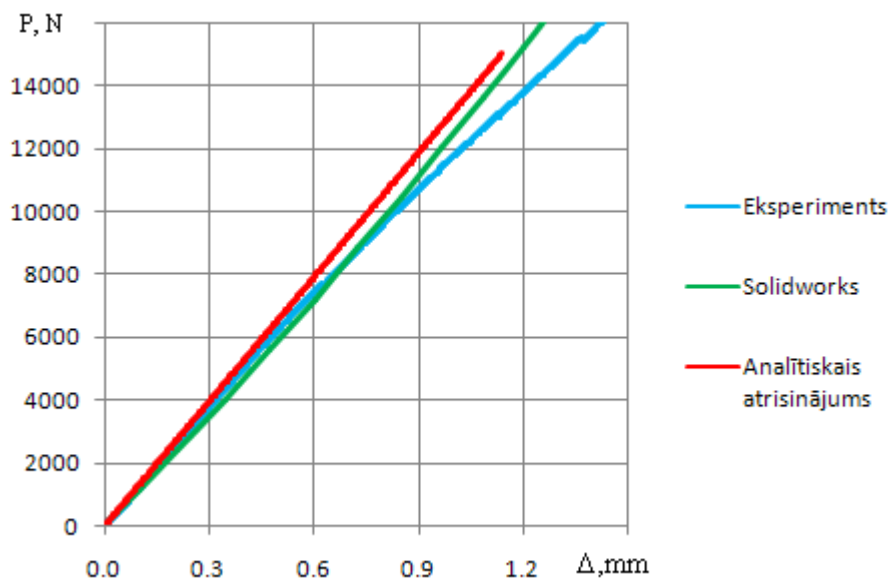




10.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.4.



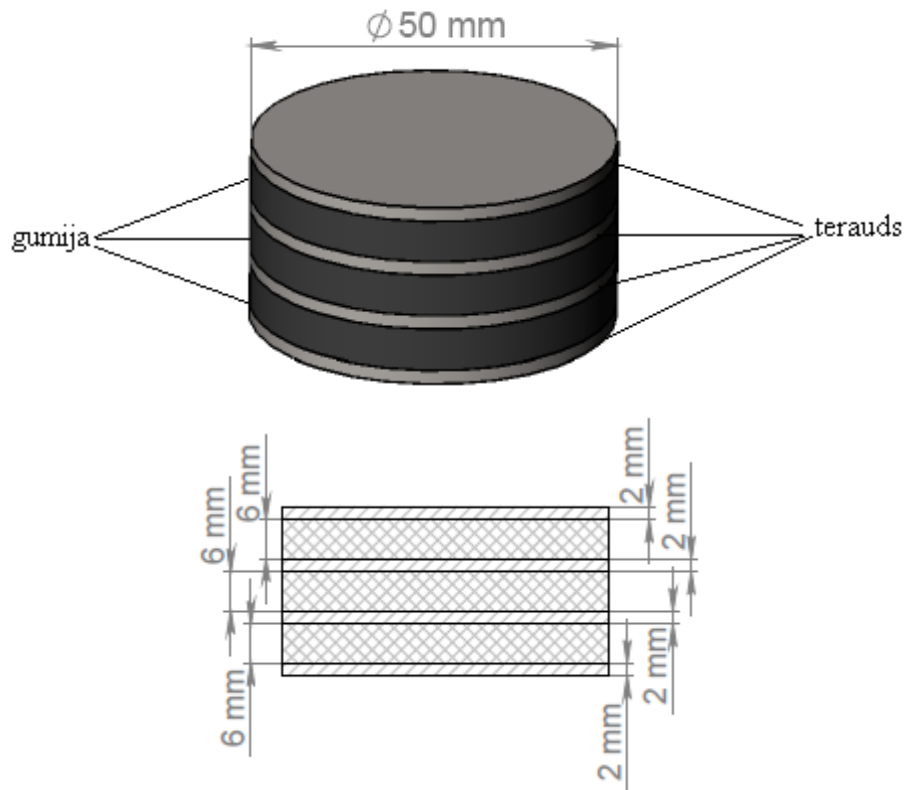
11.att. Parauga Nr.4. slodrojuma shēma.



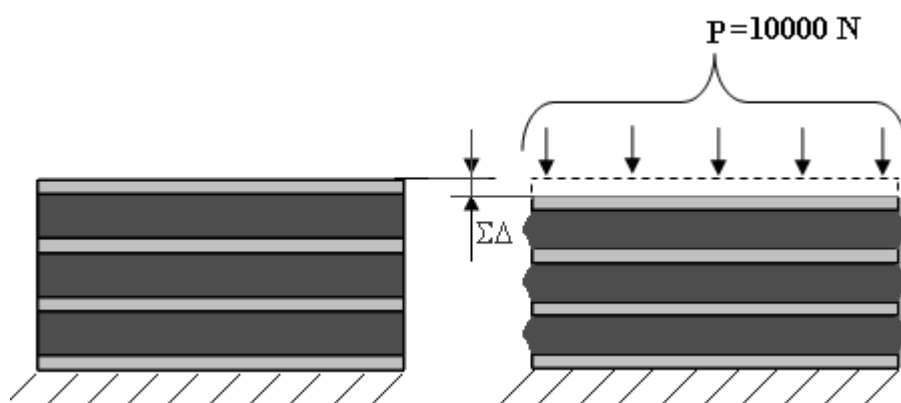
12.att. Sakarība „spēks - pārvietojums” paraugam Nr.4.

Paraugs Nr.5.

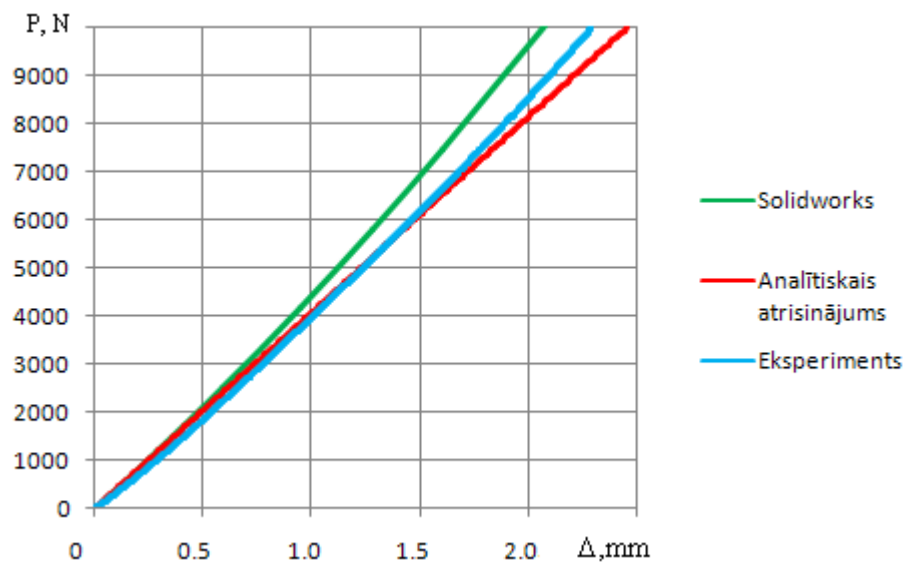
Paraugs Nr.5.:  $h_e = 6\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $R = 25\text{mm}$ ,  $E = 5\text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 10000\text{ N}$



13.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.5.



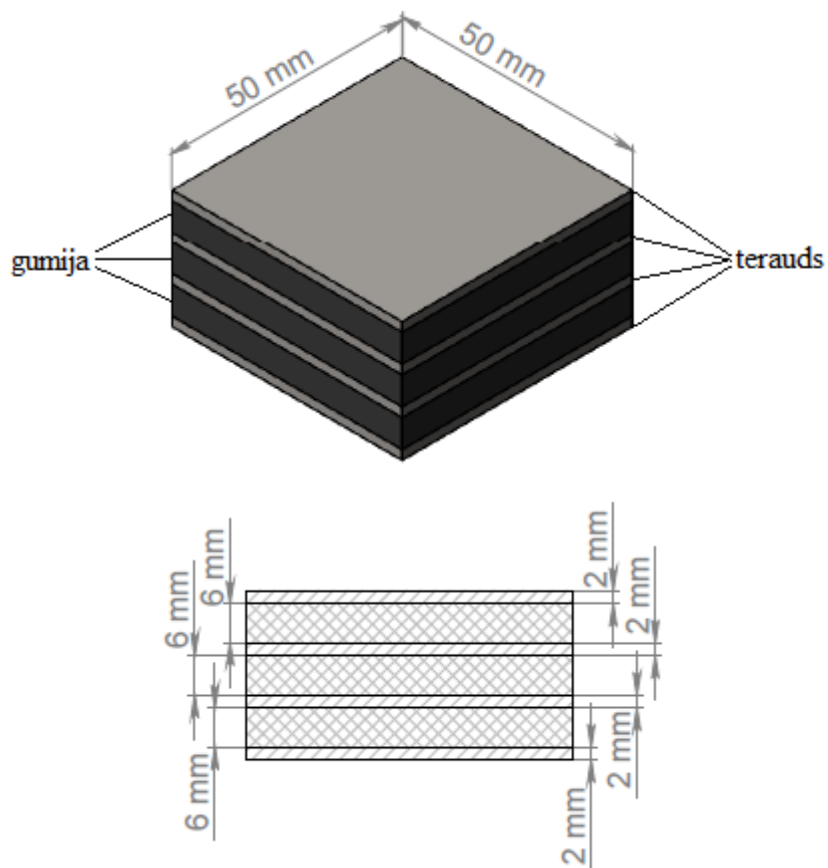
14.att. Parauga Nr.5. slojojuma shēma



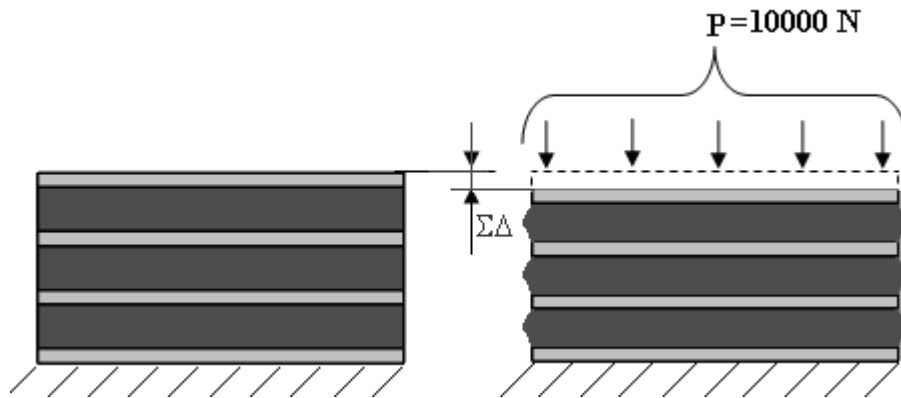
15.att. Sakarība „spēks -pārvietojums” paraugam Nr.5.

### Paraugs Nr.6.

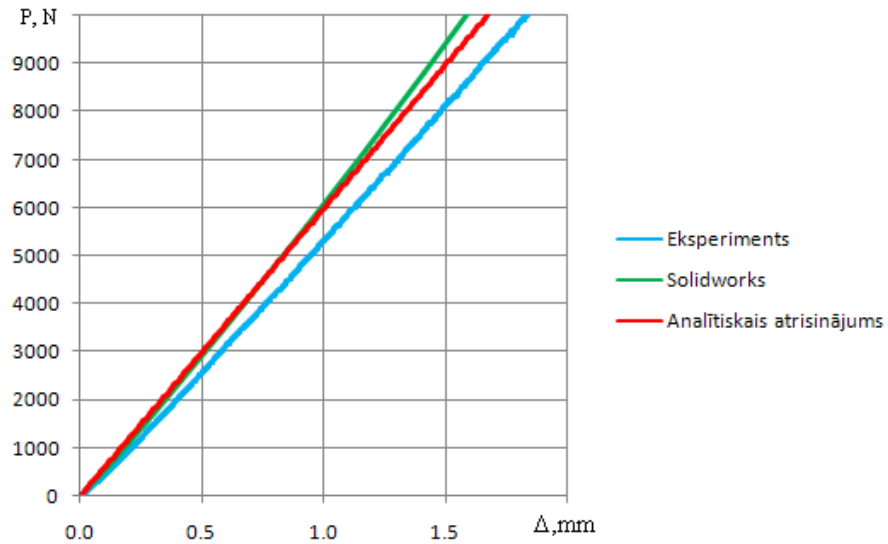
Paraugs Nr..6:  $h_e = 6\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $a = 50\text{mm}$ ,  $b = 50\text{mm}$ ,  $E = 5\text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 10000\text{N}$



16.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.6.



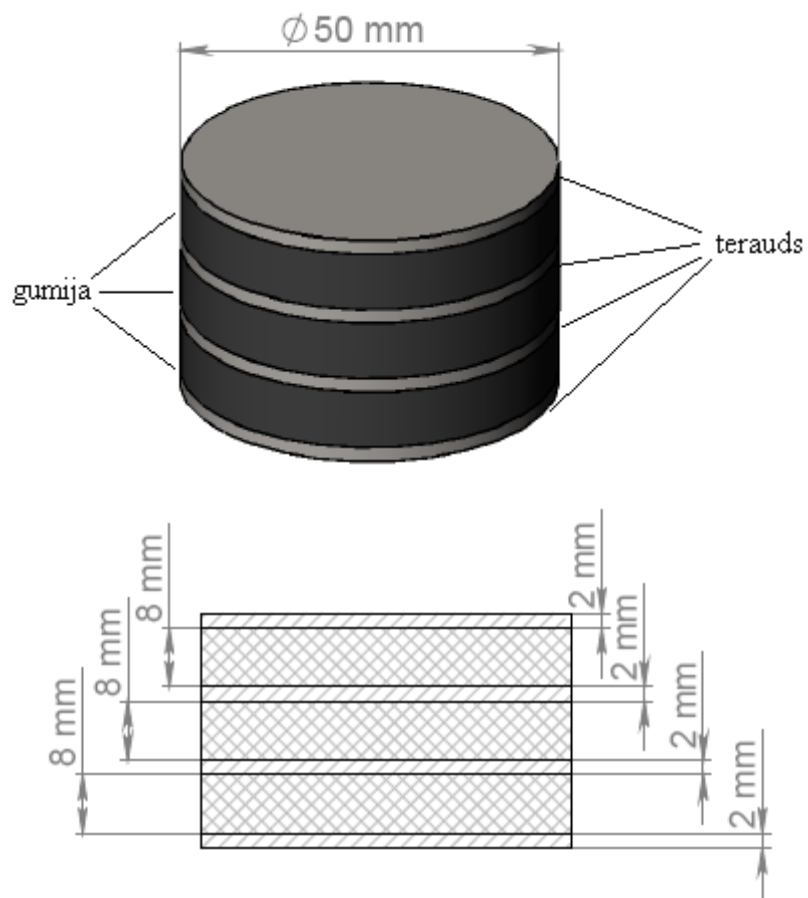
17.att. Parauga Nr.6. slojuma shēma.



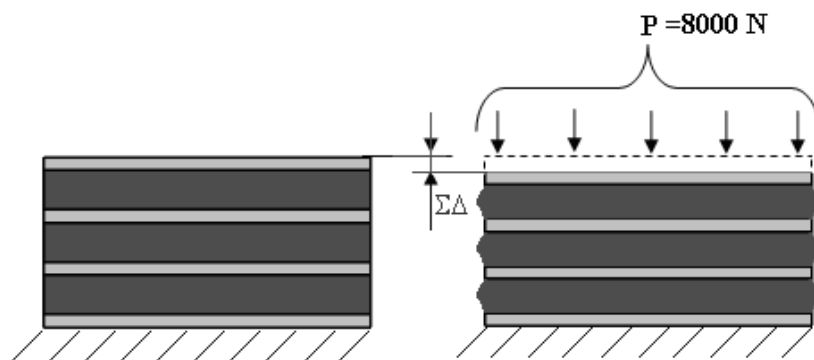
18.att. Sakarība „spēks -pārvietojums” paraugam Nr.6.

### Paraugs Nr.7.

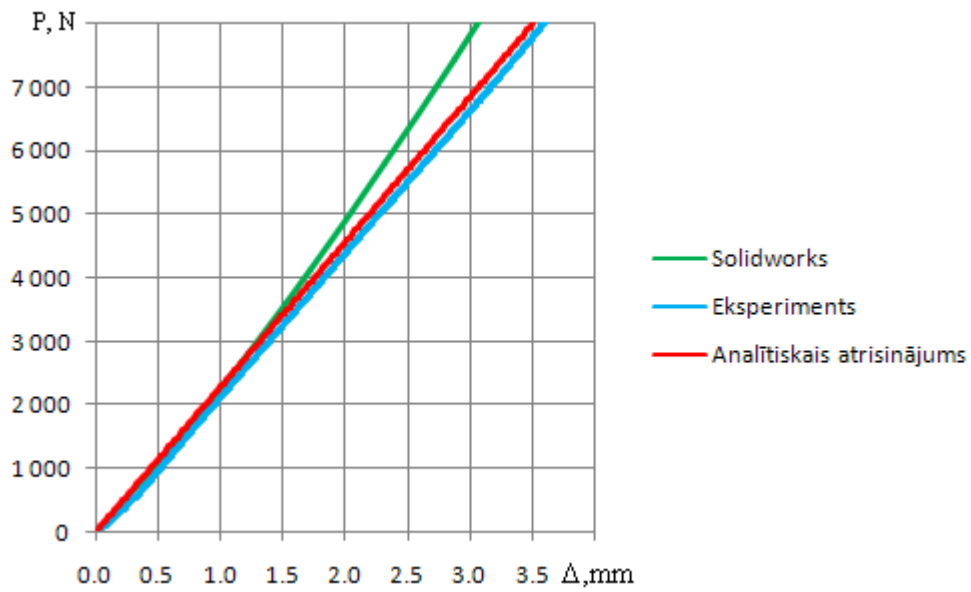
Paraugs Nr.7.:  $h_e = 8\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $R = 25\text{mm}$ ,  $E = 5 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 8000 \text{ N}$



19.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.7.



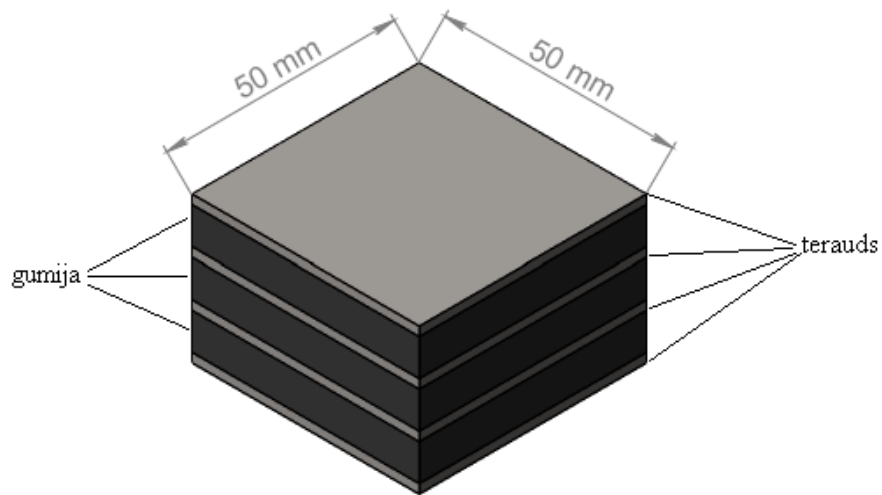
20.att. Parauga Nr.7. slojuma shēma

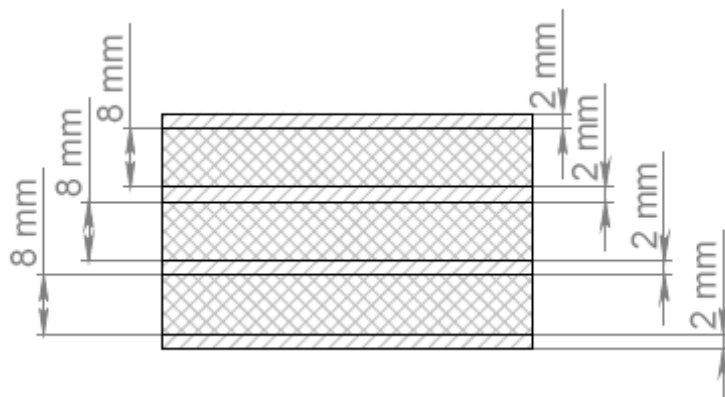


21.att.2 Sakarība „spēks – pārvietojums” paraugam Nr.7.

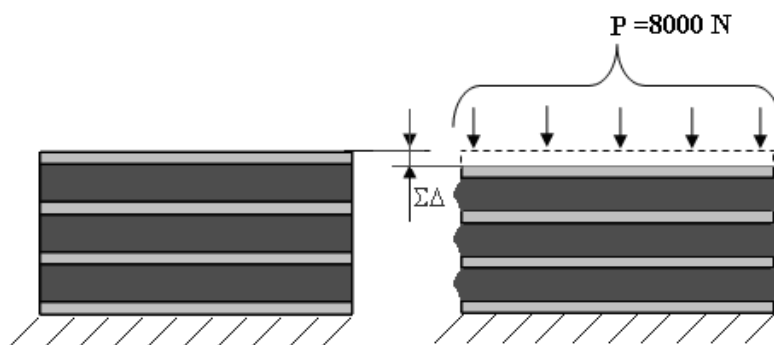
### Paraugs Nr.8

Paraugs Nr.8.:  $h_e = 8\text{mm}$ ,  $h_m = 2\text{mm}$ ,  $a = 50\text{mm}$ ,  $b = 50\text{mm}$ ,  $E = 5\text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.49$ ,  $P = 8000\text{N}$

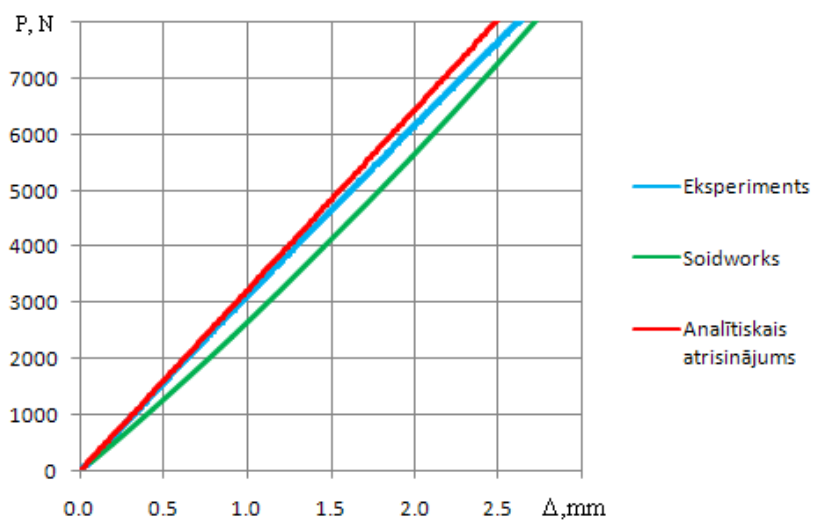




22.att. Plānslāņa gumijas - metāla kompensators. Paraugs Nr.8.



23.att. Parauga Nr.8. slojuma shēma.



24.att. Sakarība „spēks - pārvietojums” paraugam Nr.8.

Patents



LATVIJAS REPUBLIKA

Latvijas Republikas Patentu valde apliecina, ka

PATENTS

Nr. 14409

*ir piešķirts saskaņā ar Latvijas Republikas Patentu likumu, pamatojoties uz ierakstu Valsts patentu reģistrā un ar šajā dokumentā uzrādītajiem izgudrojuma nosaukumu, autoru, īpašnieku, izgudrojuma aprakstu, zīmējumiem, pretenzijām un kopsavilkumu. Patents ir spēkā Latvijā Republikā 20 gadus no 13.07.2011., ja šis termiņš likumā paredzētā gadījumā nebeidzas agrāk.*

Rīga

20.04.2012.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'R. Bērziņš'.

Patentu valdes  
direktors

R. Bērziņš

19



LATVIJAS REPUBLIKAS  
PATENTU VALDE

11 LV 14409 B

51 Int.Cl F16F3/10

Latvijas patents uz izgudrojumu  
2007.g. 15.februāra Latvijas Republikas likums

12

## Īsziņas

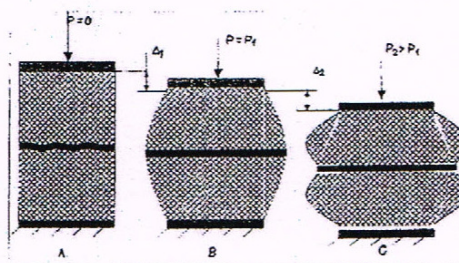
21	Pieteikuma numurs:	P-11-95
22	Pieteikuma datums:	13.07.2011
41	Pieteikuma publikācijas datums:	20.09.2011
45	Patenta publikācijas datums:	20.04.2012

73 Īpašnieks(i):  
RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE;  
Kalķu iela 1, Rīga LV-1658, LV

72 Izgudrotājs(i):  
Vladimirs GONCA (LV),  
Artūrs MAČANOVSKIS (LV),  
Juris ŠVABS (LV)

54 Virsraksts: **GUMIJAS AMORTIZATORA KONSTRUKCIJA AR MAINĪGU STINGUMU UN TĀ STINGUMA NOTEIKŠANAS PAŅĒMIENS**

57 Kopsavilkums: Izgudrojums attiecas uz mašīnbūves un mehānikas nozarēm. To var izmantot transportlīdzekļos un rūpnieciskās iekārtās, kur ir nepieciešami amortizatori ar mainīgu stingumu, kas ir atkarīgs no amortizatora nosēdēs. Piedāvātā izgudrojuma mērķis ir vienkāršot gumijas amortizatora ar mainīgu stingumu konstrukciju un projektēšanu. Piedāvātais amortizators sastāv no amortizatora balsta 1 un gumijas slāņa 2, kurā ir ievulkanizēta plāna gofrēta neelastomēra kārtiņa 3, piem., no metāla, tekstila, polimēra u.c. materiāliem. Tādas konstrukcijas amortizatora darbības shēma, kas parādīta 3. zīm., sastāv no diviem etapiem.



## LITERATŪRAS SARAKSTS

- [1] Anand L.A. *A constitutive model for compressible elastomeric solids. // Comput. Mech.* -1996. -Nr.18. -p.339.-355.
- [2] Baklanov V.S. *Low-frequency vibroisolation mounting of power plants for new generation airplanes with engines of extra-high bypass ratio. J. Of Sound and Vibration*, 2007, V.308, Nr. 3-5, p.709 – 720.
- [3] Brackbill C.R., Lesieutre G.A., Smith E.C. and Ruhl L.E. *Characterization and modelling of the low strain amplitude and frequency dependent behavior of elastomeric damper materials.// J. Am. Helicopter Soc.- 2000. -Nr.45.(1.) -p.34.-42.*
- [4] Brown R. *Psychical Testing of Rubber. New York. 2006. – 387 p.*
- [5] Bruni S. and Collina A. *Modelling of viscoelastic behaviour of elastomeric components: An application to the simulation of train-track Interaction.// Vehicle Syst. Dyn. -2000. -Nr.34. -p.283.-301.*
- [6] Chalhoub M.S., Kelly J.M., *Effect of bulk compressibility on the stiffness of cylindrical isolation bearings.// International Journal of Solids and Structures. - 1990. –Nr.26. – p. 734.-760.*
- [7] Chang C.-H. *Modeling of laminated rubber bearings using an analytical stiffness matrix.// International Journal of Solids and Structures. -2002. -Nr39. –p. 6055–6078*
- [8] Constantinou M.C., Kartoum A., Kelly J.M., *Analysis of compression of hollow circular elastomeric bearings.// Engineering Structures. - 1992. –Nr.14. –p.103.-111.*
- [9] Davey, A. B., Payne A. R. *Rubber in Engineering Practike. London, 1993. - 375 p*
- [10] Deladi. E.L., de Rooij M.B., Schipper D.J. *Modelling of static friction in rubber–metal contact.// Tribology International. -2007. -Nr.40. -p.588.–594.*
- [11] Dymnikov S.I., Lavendelis E.E. *Calculations of rigidity of rubber elastic elements of arched and conical rubber-metal shock absorbers.// Scientific Proceedings of Riga Technical University. Series 6: Transport and Engineering, -2002. -vol.7 (Mechanics) -p.164. – 169.*
- [12] Dymnikov, S.I., Lavendelis, E.E. *Diagram's of calculations of compression of rubber shock absorber of large course. – Scientific Proceedings of IUTAM/IFTOMM Symposium “Elastomers'99”, Dnepropetrovsk, Ukraine, 1999, p.37*
- [13] Euler M., Beigholdt H.A. *Determination of creep functions for the viscoelastic material behavior of the tensile test Holf. LACER, Universitat Leipzig, 1999, no.4, p.319-334. (in German).*

- [14] Fletcher W.P. and Gent A.N. *Non-Linearity in the dynamic properties of vulcanised rubber compounds.*// *I.R.I. Transactions.* -1953. -Nr.29. -p. 266.-280.
- [15] Gent A.N. *On the relation between indentation hardness and Young's modulus* // *Trans. Inst. Rubber Ind.* -1958. -Vol. 34. -Nr. 2. p. 46. – 57.
- [16] Gent A.N. *Load-deflection relations and surface strain distributions for flat rubber pads* // *Rubber Chem. Techn.* -1958. -Vol. 31. Nr.2.-p. 395.-414.
- [17] Gent A. N. *Elastic stability of rubber compression spring.*// *Journal Mechanical Engineering Sciens. London:* -1984. -vol. 6. –Nr. 4. –p.236.-243.
- [18] Hlavachek J. *Applikace matematiky*,12,1. 1967
- [19] Horton J.M., Gover M.J.C. and Tupholme G.E. *Stiffness of spherical rubber bush mountings.* *Int. J. Solids Struct.*- 2005. -Nr.42. -p.3289.-3297.
- [20] Jain S.K., Thakkars S.K. *Quasi-static testing of laminated rubber bearings.*// *Journal of the Institution of Engineers. India.Civil Engineering Division.* -2003. -Nr. 84. - p.110.-115.
- [21] Keys W.C. *Rubber springs design calculations—some representative uses* // *J. Mech. Engn.* -1937. Nr.59.- p.345.- 350.
- [22] Koh C.G., Kelly J.M., *Compression stiffness of bonded square layers of nearly incompressible material.*// *Engineering Structures.* -1989. –Nr.11. p.9.-15.
- [23] Koh C.G., Lim H.L. *Analytical solution for compression stiffness of bonded rectangular layers.*// *International Journal of Solids and Structures.* -2001. –Nr.38. -p. 445.–455.
- [24] Penn R.W. *Volume Changes Accompanying the Extension of Rubber.* *Trans. Soc. Rheol.*, 14:4, 1970, 507-517.
- [25] Meirovics I. *Organiskā ķīmija. Rīga: Zvaigzne*, 1992. – 80. – 82., 252.-254. lpp
- [26] Mullins L. *Softening of rubber by deformation.* // *Rubber Chem. Tech.*, -1969. -Nr.42. - p.339.-362.
- [27] Murnagan F. *Finite deformation of the elastic solids.*// *New York*, 1951. 205 p.
- [28] Nagarajaiah S., Ferrell K. *Stability of elastomeric seismic isolation bearings.*// *Journal of Structural Engineering* -1999. –Nr.125, -p.946.–954.
- [29] Reissner E., *Problems of Continuum Mechanics (Muschelivili Anniversary Volume).* Philadelphia pp. 370-381
- [30] Rogovoy A. *Effect of elastomer slight compressibility.*// *Eur. J. Mech. A/Solids.* -2001. –Nr.20. -p.757–775

- [31] Rogovoy A.A., 1997. A model for slightly compressible and incompressible elastic body under finite deformations, in: Moshev, V.V. (Ed.), *Structural Mechanisms for Formation of Mechanical Properties of Polymeric Composites*. Russian Academy of Sciences, Ural Department, Institute of Continuous Media Mechanics, Ekaterinburg, - p. 375–442 (in Russian).
- [32] Roeder C.W. Stanton J.F. *Elastomeric bearings: State – of – the Art // J. Struct. Engn.* 1983. Vol. 109, Nr.12, P.2853-2871.
- [34] Tonti E. *Variational principles in elastostatics. Mechanica* 2. Nr.4 1967
- [35] Treloar L. R. G. *The physics of rubber elasticity*. NY.: Oxford, 2005 – 310 p.
- [36] Tsai H.-C. *Flexure analysis of circular elastic layers bonded between rigid plates.// International Journal of Solids and Structures*. -2003. –Nr.40. -p.2975.–2987.
- [37] Tsai H.C., Hsueh S.J. *Mechanical properties of isolation bearings identified by a viscoelastic model.// International Journal of Solids and Structures*. -2001. –Nr.38. – p.53.-74.
- [38] Tsai H.-C., Kelly J.M. *Buckling load of seismic isolators affected by flexibility of reinforcement.// International Journal of Solids and Structures*. -2005. –Nr.42. p. 255.–269.
- [39] Tsai H.-C., Lee C.-C. *Compressive stiffness of elastic layers bonded between rigid plates.// International Journal of Solids and Structures*. -1998. -Nr.35. –p. 3053.–3069.
- [40] Tsai H.-C., Lee C.-C. *Tilting stiffness of elastic layers bonded between rigid plates.// International Journal of Solids and Structures*. -1999. -Nr. 36. -p.2485.–2505.
- [41] Wood L.A. *Values of physical constants of different rubbers.// Smith Physical Tables* 9 –th rev. Ed. Washington., 1956, P.234 – 235.
- [42] Yeoh O.H. *On hardness and Young's modulus of rubber // Plast. Rubber Proc. Appl.* - 1984, -Vol. 4. -Nr.2, -p.141. – 144.
- [43] Башта Т. М., *Машиностроительная гидравлика*. «Машиностроение», 1971, стр. 672.
- [44] Бартенев Г.М., Новиков В.И. *О модулях резины при статическом сжатии. // Докл. АН. СССР*. -1953. -Т. 91. -Nr.5. -с. 1027.– 1030.
- [45] Бартенев Г.М. *О законах сжатия и растяжения резины. // Докл. АН. СССР*. - 1952. -Т. 84. -Nr. 4. -с. 689. – 692.
- [46] Бартенев Г. М., Френкель С. Я. *Физика полимеров*. Л.: Химия, 1990 – 432 с.

- [47] Белкин А.И. К расчету амортизаторов, работающих на сжатие. -Сб. Прикладная механика. №9. Киев: 1990.
- [48] Бидерман В.Л., Мартьянова Г.В. Влияние малой сжимаемости резины на жёсткость низких резинометаллических амортизаторов. //Изв. Вузов. Машиностроение. -1980. -с. 5.-14.
- [49] Бидерман В.Л. Сжатие низких резинометаллических амортизаторов и прокладок // Изв. АН СССР. Мех. И Маш. -1962. -№3. -с. 154.-158.
- [50] Бидерман В.Л., Мартьянова Г.В. Сжатие и изгиб тонкослойных резинометаллических элементов.//Расчёты на прочность. 1983. Вып.23. с.32.-47.
- [51] Бидерман В.Л., Мартьянова Г.В. Напряжённое состояние металлической арматуры при сжатии тонкослойных резинометаллических элементов. //Расчёты на прочность. М.; -1985. -Вып. 26. - с.52.-65
- [52] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер. с англ.. М.: Мир, 1987, 542с
- [53] Гаврилов А.Н., Гонца В.Ф. Вариант алгоритма МКЭ при расчёте тонкослойных резинометаллических элементов-пакетов.// Вопросы динамики и прочности. - 1990. -Вып. 52. с. 100.-115.
- [54] Герман Л.Р. Вариационный принцип для уравнений упругости несжимаемых и почти несжимаемых материалов.//Ракетная техника и космонавтика. -1965. - №10. -с.139.-144.
- [55] Гозман Е.А. Исследование сжатия резинометаллического амортизатора арочного типа методом конечных элементов // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинанте, 1982.—Вып .40.-с.54-57.
- [56] Гонца В.Ф. Об одном методе расчёта тонкослойных резинометаллических изделий.// Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинанте, 1982.—Вып.40. -с.42.-46.
- [57] Гонца В. Ф., Гусятинская Н. С. Исследование жесткости сжатия ТРМЭ. -Сб. Вопросы динамики и прочности. Рига: 1974
- [58] Гонца В.Ф. Расчёт жёсткости ТРМЭ при сжатии с учётом физической нелинейности.//Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинанте, 1983. -Вып. 42. - с.90.- 96.
- [59] Гонца В. Ф. Влияние слабой сжимаемости на решение задач теории упругости

- для сжимаемого материала.//Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1970. -Вып. 20.
- [60] Григорьев Е. Т. Расчет и конструирование резиновых амортизаторов. М.: 1990, 160 с
- [61] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965. 456 с.
- [62] Гусятинская Н.С. Применение тонкослойных резинометаллических элементов (ТРМЭ) в станках и других машинах. М., 1975. 82 с.
- [63] Дак Э. Пластмассы и резины. – Москва: Мир, 1976. – 148с.
- [64] Дашевский М.А. Инженерный метод расчёта нелинейного расчёта резинометаллических виброизоляторов для зданий.// Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. -2006. -№7. с.64.-66.
- [65] Дунаев И.М. Термовязкоупругость эластомеров II. Науч. тр. / Краснодарский политехнический институт, 1978. вып. 268, Механика эластомеров, с.27-46.
- [66] Дунаев И.М., Фролов Н.Н. Решение контактных задач для тел из высокоэластических материалов при конечных деформациях // Механика эластомеров. -Сб. научн. тр. /Краснодар. Политехи, ин-т. -1985.-С.21-36
- [67] Дунаев И.М. Термовязкоупругость эластомеров I. Науч. тр. Краснодарский политехнический институт, 1977, вып. 242, Механика эластомеров, с.22-35.
- [68] Дунаев И.М., Фролов Н.Н. Решение контактных задач для тел из высокоэластических материалов при конечных деформациях // Механика эластомеров. -Сб. научн. тр. /Краснодар. Политехи, ин-т. -1985.-С.21-36
- [69] Дунаев И.М. Термовязкоупругость эластомеров III. Науч. тр. / Краснодарского политехнического института, 1980, вып. 101, Механика эластомеров, с.30-47
- [70] Дунаев И.М. Об одном варианте нелинейной теории термовязкоупругости эластомеров. - Ив. АН СССР, Мех. Твёрдого тела, 1985, №1, с 101-121.
- [71] Дымников С.И., Лавендел Э.Э., Павловские А.С., Сниегс М.И. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов.- Рига:Зинатне, 1960, 238 с.
- [72] Дымников С.И. Расчёт резиновых элементов конструкций. Рига, Зинатне, 1991, 277с.
- [73] Закржевский М., Смирнова Р., Щукин И., Евстегнеев В., Фролов В., Клоков А., Шилван Э. Нелинейная динамика и хаос. Бифуркационные группы и редкие

- аттракторы. - Riga : Riga Technical University, 2012. - 181 lpp.*
- [74] Зуев Ю.С. *Разрушение эластомеров в условиях характерных для эксплуатации. Москва: Химия, 1980. - 287 с.*
- [75] Игнатенко Ю. В., Веницкий А. Е. *Механические свойства резины при объемном сжатии в амортизаторах удара. "Резина - конструкционный материал современного машиностроения. "Химия". 1982.*
- [76] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости. - М.: Наука, 1970, 280 с.*
- [77] Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк В.П. *Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении,- К.: Наукова думка, 1985, 288 с.*
- [78] Кедрова Г.Л., Теуш Б.Л. *Исследование эффективности резиновых элементов виброизоляторов различной формы. //Исследования по динамике сооружений. М.: 1987. 56-68с*
- [79] Колокольчиков В.В. *Принцип соответствия и метод аппроксимаций для некоторых нелинейных наследственных сред. -Механика полимеров. 1971. № 1, с.66-73.*
- [80] Колтунов М.А., Трояновский И.Я. *Постановка задачи геометрически нелинейной теории вязкоупругости.- Механика полимеров, 1975, №2, с.234-240.*
- [81] Колтунов М.А., Трояновский И.Е. *Геометрически нелинейная задача теории вязкоупругости.- Механика эластомеров. Научные труды лубан.гос.ун-та, 1977, вып.1, т.1, с.36.-46.*
- [82] Круглякова В.И., Мальков В.М., Милякова Л.В. *Смешанная краевая задача для тонкого слоя из малосжимаемого материала. VI Всесоюз. Съезд по теор. и прикл. мех. Ташкент, 1986, 386с.*
- [83] Курант Р., Гильберт Д *Методы математической физики. Т. I, II, М,-Л., 1951*
- [84] Кузнецова В.Г., Роговой А.А. *Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. МТТ. 1999.№ 4. с.64-77*
- [85] Кузнецова В.Г., Роговой А.А. *Эффект учета слабой сжимаемости эластомеров. Осесимметричная задача. Аналитическое решение // Изв. РАН. МТТ. -2000. -№ 6. -с.25.-37.*
- [86] Лавендел Э.Э. *Расчёт резинотехнических изделий. - Москва: Машиностроение, 1976. - 232 с.*

- [87] Лавендел Э.Э., Хричикова В.А. Пределы применимости гипотез о несжимаемости и отсутствии формоизменения резины при расчёте сжатия тонкослойных элементов //Всесоюз. Научно-техн. конф. «Методы расчёта изделий из высокоэластичных материалов».Рига, 1977, 113-115с.
- [88] Лейканд М.А., Лавендел Э.Э., Львов С.В. Экспериментальное исследование изменения объёма резины при сжатии и растяжении // Вопросы динамики и прочности. Вып. 38 Рига, 1982., с.49-54
- [89] Лепетов В.А., Юрцев Л.Н. Расчёты и конструирование резиновых изделий. Л., 1977, 408 с
- [90] Лейбензон Л.С. –Вариационные методы решения задач теории упругости. М. 1992г
- [91] Лозовой С.Б. Температурные зависимости физико-механических параметров и функций релаксации структурно—неоднородных эластомеров.//Механика полимеров: Сб. научн. тр./Краснодарского политехнического института.-1985. с.37-46.
- [92] Мальков В.М. Деформация тонкого слоя из малосжимаемого материала //Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1987. №3, 87-93с
- [93] Мальков В.М. Механика многослойных эластомерных конструкций. – С.-Петербург: Издательство С.-Петербургского университета, 1998.- 320 с.
- [94] Мальков В.М., Круглякова В.И. Критические нагрузки многослойных резинометаллических элементов //Докл. АН СССР 1988. Т. 298. №5. 1090- 1093с
- [95] Малый В.И., Гусятинская Н.С. Об экспериментальном определении упругих характеристик резин. // Вопросы динамики и прочности. Вып. 36 Рига, 1980., с.181 – 184
- [96] Милованова О. Б. Определение коэффициента Пуассона по кривизне изгибаемой балки. - Прикладная механика, 1961, т. 7, вып. 2,с. 197 - 202.
- [97] Милякова Л.В. Жёсткость на сжатие плоского имитатора.// Механика эластомера. Краснодар, 1981. с.76-79
- [98] Милякова Л.В., Черных К.Ф. Общая линейная теория тонкослойных резинометаллических элементов. // Изв. АН СССР. Механика деформируемого тела. 1986. Н.3, с.110-120
- [99] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1957
- [100] Новожилков В.В. Теория упругости. Л., 1958. 370 с.

- [101] Победря Б.Е. Методы нелинейной вязкоупругости.- В кн.: Научн.труды ин-та Механики МГУ, 1971, №8, с.47-74
- [102] Подольский Г.Ш. Об оценке энергетической нормы погрешности метода Рунца. Строительная механика и расчёт сооружений, №2, 1972
- [103] Подольский Г.Ш. Об улучшении шодимости аппроксимирующих рядов в двусторонних приближениях при решение краевых задач строительной механики с помощью вариационных методов. В. Сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 17, Стройиздат, 1969
- [104] Полинг Л. Общая химия. Москва: Мир, 1974. - 846 с
- [105] Потураев В.Н., Дырда В.И. Резиновые детали машин. – Москва: Машиностроение, 1977.г.
- [106] Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. Киев Наукова думка 1975. 216 с
- [107] Потураев В. Н. резиновые и резинометаллические детали машин. М., 1966. 314 с.
- [108] Прагер В. Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях. Механика. Сб. Переводов, М./Nr. 5, 1970
- [109] Резниковский М.М., Лукомская А.И. Механические испытания каучука и резины. М., 1962, 525 с.
- [110] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., Мир, 1985, 590 с.
- [111] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.- М., 1966, 572 с.
- [112] Сливкер В.И. Вариационные методы в строительной механике.
- [113] Сливкер В.И. Метод Рунца в задачах теории упругости, основанный на последовательной минимизации двух функционалов //Известия АН СССР. Механика твёрдого тела, №2, 1982, 57-64с.
- [114] Слободянский М.Г. О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. ДАН СССР, т. 9, Nr. 4, 1953
- [115] Степаненко Б.Н. Органическая. -Москва: Медицина, 1970. - с.53-59
- [116] Тихонов В.А Асимптотика в задачах для тонкого резинового слоя //Вопросы динамики и прочности. Вып.48. Рига 1987. 60-71
- [117] Тихонов А.Н., Арсеньев В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука.

1979.285 с.

- [118] *Трелоар Л. Физика упругости каучука. - М.: Иностранная литература, 1953, 240 с.*
- [119] *Треффтиц Е. Математическая теория упругости. М. 1934.*
- [120] *Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. Л., 1986. 336 с.*
- [121] *Черных К.Ф, Милякова Л.В. Тонкие резинометаллические элементы.// Вестник ленинградского университета. Сер.1.1981. Вып.4. №19. С.88-96*
- [122] *Черных К.Ф, Шубина И.М. Об учете сжимаемости резины.-Механика эластомеров. Науч.труды кубанского государственного университета, 1978, вып.2, с. 56-62.*