

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Būvniecības inženierzinātņu fakultāte

Transportbūvju institūts

Andris Freimanis

Doktora studiju programmas “Būvniecība” doktorants

**PLAISU ATTĪSTĪBAS APLĒSE, IZMANTOJOT
MODĀLO ANALĪZI PERIDINAMIKAS TEORIJĀ**

Promocijas darba kopsavilkums

Zinātniskais vadītājs
profesors *Dr. sc. ing.*
AINĀRS PAEGLĪTIS

RTU Izdevniecība
Rīga 2019

Freimanis, A. Plaisu attīstības aplēse, izmantojot modālo analīzi peridnamikas teorijā. Promocijas darba kopsavilkums. Rīga: RTU Izdevniecība, 2019. 27 lpp.

Iespiests saskaņā ar Promocijas padomes P-06 2019. gada 20. augusta lēmumu, protokols Nr. 3-2019.

ISBN 978-9934-22-382-2 (print)
978-9934-22-383-9 (pdf)

PROMOCIJAS DARBS IZVIRZĪTS INŽENIERZINĀTŅU DOKTORA GRĀDA IEGŪŠANAI RĪGAS TEHNISKAJĀ UNIVERSITĀTĒ

Promocijas darbs inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai tiek publiski aizstāvēts 2019. gada 29. novembrī Rīgas Tehniskās universitātes Būvniecības inženierzinātņu fakultātē, Ķīpsalas ielā 6B, 422. auditorijā.

OFICIĀLIE RECENZENTI

Dr. sc. ing. Sandris Ručevskis,
Rīgas Tehniskā universitāte, Latvija

Profesors *Dr. sc. ing.* Jānis Andersons,
Latvijas Universitāte, Latvija

Profesors *Dr. sc. ing. Dariuss Bačinskas*,
Viļņas Ģedimina tehniskā universitāte, Lietuva

APSTIPRINĀJUMS

Apstiprinu, ka esmu izstrādājis šo promocijas darbu, kas iesniegts izskatīšanai Rīgas Tehniskajā universitātē inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai. Promocijas darbs zinātniskā grāda iegūšanai nav iesniegts nevienā citā universitātē.

Andris Freimanis

Datums:

Promocijas darbs ir uzrakstīts angļu valodā, tajā ir ievads, sešas nodaļas, secinājumi, literatūras saraksts, 54 attēli, 30 tabulu, divi pielikumi, kopā 114 lappušu. Literatūras sarakstā ir 120 nosaukumu.

SATURS

Saturs	4
1. Ievads.....	5
1.1. Novitāte	5
1.2. Promocijas darba mērķis un robežas	6
1.3. Promocijas darba uzdevumi	6
1.4. Darba praktiskais lietojums	6
1.5. Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes	7
1.6. Aprobācija konferencēs	7
1.7. Publikāciju saraksts	7
2. Teorijas pamati	9
2.1. Peridīnāmas teorija.....	9
2.2. Lineārā algebra un modālā analīze	10
3. Aprēķinu implementācija un optimizācija.....	12
3.1. Peridīnāmas implementācija	12
Modālais risinātājs.....	12
Peridīnāmas modelis	13
3.2. Galīgo elementu implementācija.....	13
3.3. Risinātāja parametru optimizācija.....	14
4. Paraugu izgatavošana un testa uzstādījumi	16
5. PD modālās analīzes verifikācija un validācija	17
PD pašsvārstību frekvenču verifikācijas un validācija.....	17
Frekvenču nobīde	18
PD modu formu verifikācija.....	19
PD modu formu validācija	20
6. Konverģences pētījumi	22
7. Peridīnāmas modālās analīzes lietojuma demonstrācija.....	24
8. Secinājumi	26

1. IEVADS

1.1. Novitāte

Konstrukciju bojājumus izraisa kļūdas projektā, nekvalitatīva būvniecība vai citi iemesli – nepareiza ekspluatācija, pārāk lielas slodzes, dabas katastrofas, agresīva vides ietekme utt. Ja bojājumus laikus neatklāj un ļauj tiem attīstīties, konstrukcijas nestspēja var samazināties, kas var novest pie dārgiem remontdarbiem vai – ekstrēmos gadījumos – pat konstrukcijas sabrukuma. Turklāt bojājumi palielinās dabīgā konstrukcijas novecošanās procesā. Situācijās, kad, piemēram, Latvijā 37 % no autoceļu tiltiem ir sliktā vai ļoti sliktā stāvoklī, vai Eiropā, kur 35 % no aptuveni pusmiljona dzelzceļa tiltu ir vecāki par 100 gadiem, precīzas bojājumu noteikšanas metodes var samazināt sabrukuma riskus, paildzināt konstrukciju kalpošanas laiku un dot izmērāmu ekonomisko ieguvumu.

Modālo analīzi plaši izmanto, lai noteiktu konstrukciju bojājumus, kvalitātes kontrolei ražošanā, aprēķinu modeļu validācijā utt. Modālās īpašības – pašsvārstību frekvences un modu formas – ir atkarīgas no objekta mehāniskajām un ģeometriskajām īpašībām. Kad konstrukcijā parādās bojājumi, piemēram, plaisas, tās ģeometriskie un/vai mehāniskie raksturlielumi mainās. Teorētiski inženieriem vajadzētu spētvarēt noteikt bojājumus, kas radušies šo izmaiņu rezultātā, bet praksē bojājumu noteikšana, izmantojot modālo analīzi, ir sarežģīta dažādu ierobežojumu dēļ.

Skaidru nepieciešamību pēc jaunām, atvērtā koda datormodelēšanas un simulāciju programmām ir atzīmējusi Eiropas Materiālu modelēšanas padome. Turklāt nepieciešamību pēc jaunām modelēšanas programmām, it sevišķi nenoteiktību kvantificēšanā, risku analīzē un lēmumu pieņemšana inženierijā, ir izteikusi Eiropas Savienības padome tās lēmumā, nodibinot pētniecības un inovāciju programmu “Apvārsnis 2020”.

Peridīnamikas teorija jeb peridīnamika (PD) ir nelokāls klasiskās kontinuma mehānikas teorijas pārformulējums. Pretēji klasiskajai teorijai peridīnamikas teorija aprēķina spēkus un pārvietojumus, izmantojot integrālvienādojumus, kas ir definēti arī pie deformāciju laukiem ar pārtraukumiem. Bojājumus PD ievieš, pārraujot saites saskaņā ar kādu noteiktu bojājumu likumu, tā nodrošinot plaisu “spontānu” rašanos. Tas nozīmē, ka sākotnēji ķermenī plaisu nebija, bet tās radās, kad kāds bojājumu kritērijs tika sasniegts. Tātad plaisu ceļam nav jābūt *a priori* noteiktam. Tādēļ plaisas ir dabīga PD risinājuma daļa nevis apgrūtinājums, tādējādi padarot to par pievilcīgu metodi bojājumu modelēšanai.

Autora sākotnēji pētījumi rādīja, ka PD modālais uzdevums rada lielus izaicinājumus. Pirmkārt, peridīnamikas stinguma matricas ir nesimetriskas, tādēļ nepieciešami nehermitiāni risinātāji (*non-Hermitian solvers*). Otrkārt, PD stinguma matricas ir vairāk nenulles locekļu un to josla ir platāka kā galīgo elementu (GE) ekvivalenta. Treškārt, PD modeļi parasti ir ar lielu punktu daudzumu, tātad arī matricu izmēri ir lieli. Šie faktori palielina PD modālo aprēķinu izmaksas un var radīt sliktas risinātāju konverģences. Turklāt šīm simulācijām bieži izmanto aprēķinu klasterus, kuriem nepieciešams masīvi paralēla datorprogrammas implementācija. Tādēļ ievērojamu pētniecības laika daļu aizņēma risinātāju kombinācijas, kas spēj efektīvi atrisināt PD modālo uzdevumu, atrašana un implementācija.

Šī pētījuma zinātniskā novitāte ir šāda:

- labi zināmā modālā analīze ir implementēta un pētīta jaunā mehānikas teorijā – peridinamikā, kur tā līdz šim nav detalizēti apskatīta. Atšķirībā no iepriekšējiem citu autoru darbiem šeit apskatīti 3D nevis 2D uzdevumi, kas nozīmē, ka rezultātos parādās ne tikai lieces modas un rezultāti ir verificēti un validēti vairākās plaisu konfigurācijās nevis tikai nebojātā un vienā konfigurācijā ar bojājumu, tādējādi nodrošinot detalizētāku analīzi;
- šajā promocijas darbā tika izstrādāts, implementēts un optimizēts pasaulē pirmais masīvi paralēls atvērtā koda PD modālais risinātājs. Tas ir atvērtā koda, tāpēc risinātājs būs brīvi pieejams pētniekiem akadēmiskajā vidē un industrijā, nodrošinot pētījuma rezultātu ilgtspēju.

1.2. Promocijas darba mērķis un robežas

Šī promocijas darba mērķis ir izstrādāt jaunu masīvi paralēlu atvērtā koda modālo risinātāju peridinamikas modālajiem uzdevumiem, verificēt tā rezultātus pret GE metodes modālās analīzes rezultātiem, validēt tos pret eksperimentālās modālās analīzes rezultātiem un nodemonstrēt, kā PD modālā analīze var tikt izmantota kopā ar PD bojājumu simulācijām, lai iegūtu bojātu konstrukciju modālos parametrus.

Šis promocijas darbs necentīsies parādīt, ka PD modālā analīze ir labāka par GE modālo analīzi un no šī brīža būtu jālieto tās vietā. Mērķis ir parādīt, ka PD analīze ir līdzvērtīga alternatīva, kad jāapskata konstrukcijas ar bojājumiem.

1.3. Promocijas darba uzdevumi

Lai sasniegtu promocijas darba mērķi, jāizpilda šādi uzdevumi:

- 1) izstrādāt un implementēt modālo risinātāju, kas efektīvi darbotos masīvi paralēlā aprēķinu vidē uz aprēķinu klastera un varētu izrēķināt PD modālos uzdevumus;
- 2) izvēlēties testa paraugu un iegūt tā pašsvārstību frekvences un modu formas deviņās plaisu konfigurācijās, izmantojot PD, GE un eksperimentālo modālo analīzi; verificēt un validēt PD rezultātus pret GE un eksperimentālās analīzes rezultātiem;
- 3) apskatīt PD simulācijas ar vairākiem tīkla blīvumiem un horizonta garumiem, lai pētītu tīkla konvergenci;
- 4) nodemonstrēt PD modālās analīzes kopā ar noguruma bojājumu simulāciju lietojumu.

1.4. Darba praktiskais lietojums

Izstrādātais datora kods būs brīvi pieejams (atvērtais kods) pētniekiem un inženieriem visā pasaulē, nodrošinot, ka šī pētījuma rezultāti var tikt praktiski izmantoti turpmākos pētījumos, nevis pamesti gulst plauktā. Turklāt šī pieeja nodrošinās pētījuma ilgtspēju.

Peridinamikas teorijā spēkus un pārvietojumus iegūst ar integrālvienādojumiem, kas ir definēti pat, ja deformāciju lauks nav nepārtraukts, tā padarot bojājumu modelēšanu

vienkāršāku nekā klasiskajā kontinuma mehānikas teorijā. Apvienojot bojājumu modelēšanu un modālo analīzi, tiek uzlabotas pieejamās skaitlisko modeļu validēšanas, iekārtu un mašīnu projektēšanas, rūpniecības kvalitātes nodrošināšanas un konstrukciju bojājumu noteikšanas metodes.

1.5. Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes

- Izstrādātais peridīnāmas modālais risinātājs ir optimizēts izmantošanai masīvi paralēlā aprēķinu vidē un var atrisināt peridīnāmas modālos uzdevumus.
- PD pašsvārstību frekvences lieliski atbilst GE un eksperimentālajām modālajām frekvencēm gan konfigurācijās bez bojājumiem, gan konfigurācijās ar tiem.
- PD modu formas labi atbilst un ir tādā pat secībā, kādā ir GE modu formas katrā plaisu konfigurācijā. PD modu formas labi atbilst arī eksperimentālajām modu formām. Turklāt modu formu izmaiņas, kas radušās bojājumu dēļ, ir līdzvērtīgas abās analīzēs.
- PD modālā analīze var tikt apvienota ar PD bojājumu simulācijām, lai simulētu bojājumus un iegūtu bojātu objektu modālos raksturlielumus.

1.6. Aprobācija konferencēs

- 6th European Conference on Computational Mechanics, 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCM-ECFD 2018, Glāzgo, Apvienotā Karaliste, 2018. gada 11.–15. jūnijs. <http://www.eccm-ecfd2018.org/frontal/default.asp>.
- 2018 International Symposium of Rail Infrastructure Systems Engineering (i-RISE 2018), Brno, Čehija.
- International Modal Analysis Conference IMAC-XXXVI 2018, Orlando, Florida, ASV, 2018. gada 12.–15. februāris. <https://semimac.org/event/imac-xxxvi/>.
- The 3rd International Conference on Innovative Materials, Structures and Technologies IMST 2017, Rīga, Latvija, 2017. gada 27.–29. septembris. <https://imst.rtu.lv/node/46>.
- Modern building materials, structures, and techniques MBMST 2016, Viļņa, Lietuva, 2016. gada 26.–27. maijs. <http://mbmst.vgtu.lt/>.

1.7. Publikāciju saraksts

Šīs publikācijas tika publicētas promocijas darba izstrādes laikā. Tās ir sarindotas hronoloģiskā secībā, sākot ar visnesenāk publicētajām. Zvaigznīte (*) norāda rakstus, kas iekļauti *Scopus* vai *Web of Science* datubāzēs.

1. Freimanis, A.; Paeglītis, A. Modal Analysis of Healthy and Cracked Isotropic Plates in Peridynamics. Conf. Proc. Soc. Exp. Mech. Ser. 2019, 359–361, doi:10.1007/978-3-319-74700-2_41. *

2. A. Freimanis, S. Kaewunruen, and M. Ishida, "Peridynamic Modeling of Rail Squats," in Sustainable Solutions for Railways and Transportation Engineering: Proceedings of the 2nd GeoMEast International Congress and Exhibition on Sustainable Civil Infrastructures, 2019, pp. 108–118.
3. Freimanis, A.; Kaewunruen, S. Peridynamic Analysis of Rail Squats. *Appl. Sci.* 2018, 8, 2299, doi:10.3390/app8112299. *
4. Kaewunruen, S.; Janeliukstis, R.; Freimanis, A.; Goto, K. Normalised curvature square ratio for detection of ballast voids and pockets under rail track sleepers. *J. Phys. Conf. Ser.* 2018, 1106, 012002, doi:10.1088/1742-6596/1106/1/012002. *
5. S. Kaewunruen, A. Freimanis, and M. Ishida, "EFFECT OF EXTREME CLIMATE ON WHEEL-RAIL INTERACTION OVER RAIL SQUATS," in Proceedings of the 6th. European Conference on Computational Mechanics (Solids, Structures and Coupled Problems) ECCM 6, 7th. European Conference on Computational Fluid Dynamics ECFD 7, 2018, pp. 11–15.
6. Freimanis, A.; Kaewunruen, S.; Ishida, M. Peridynamics Modelling of Rail Surface Defects in Urban Railway and Metro Systems. *Proceedings* 2018, 2, 1147, doi:10.3390/proceedings2161147.
7. Freimanis, A.; Paeglītis, A. Mesh Sensitivity in Peridynamic Quasi-static Simulations. *Procedia Eng.* 2017, 172, 284–291, doi:10.1016/j.proeng.2017.02.116. *
8. Freimanis, A.; Paeglītis, A. Modal analysis of isotropic beams in peridynamics. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2017, 251, 012088, doi:10.1088/1757-899X/251/1/012088.*
9. Paeglītis, A.; Freimanis, A. Comparison of constant-span and influence line methods for long-span bridge load calculations. *Balt. J. Road Bridg. Eng.* 2016, 11, 84–91, doi:10.3846/bjrbe.2016.10. *
10. Freimanis, A.; Paeglītis, A. Analysis of Yearly Traffic Fluctuation on Latvian Highways. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2015, 96, 012064, doi:10.1088/1757-899X/96/1/012064. *

2. TEORIJAS PAMATI

2.1. Peridinamikas teorija

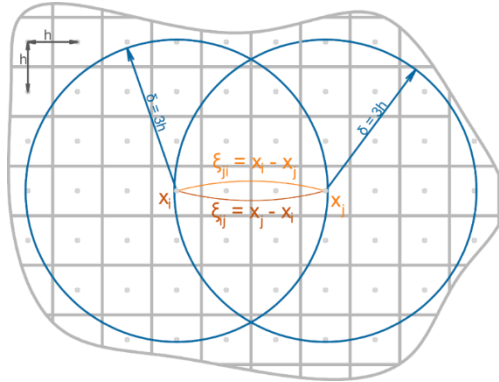
Peridinamikas ķermenis sastāv no kāda skaita punktiem, un katru no tiem unikāli apraksta tā tilpums V_i , blīvums ρ_i un pozīcijas vektors references konfigurācijā $\mathbf{x}_i$. 2D ķermeņa piemērs ir parādīts 2.1. attēlā. Punkts $\mathbf{x}_i$ iedarbojas uz citiem punktiem $\mathbf{x}_j$ ar saitēm (relatīvās pozīcijas vektoriem) $\boldsymbol{\xi}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$. Šīs iedarbības ir limitētas apgabalā, sauktā par horizontu δ . Punkti $\mathbf{x}_j$, kas ar saitēm savienoti ar $\mathbf{x}_i$, tiek saukti par $\mathbf{x}_i$ saimi, $\mathbf{H}_{\mathbf{x}_i}$.

Kad ķermenis deformējas, punkts $\mathbf{x}_i$ piedzīvo pārvietojumu $\mathbf{u}_i$ un pārvietojas uz tā deformēto pozīciju $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i$. Saite deformētajā konfigurācijā ir $\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i$. Šī deformācija rada saites spēka blīvuma vektoru $\mathbf{t}_{ij}$, kas ir atkarīgs no visu punktu, kas pieder iekš $\mathbf{H}_{\mathbf{x}_i}$, kolektīvās deformācijas, un pretēju saites spēka blīvuma vektoru $\mathbf{t}_{ji}$, kas ir atkarīgs no $\mathbf{H}_{\mathbf{x}_j}$ kolektīvās deformācijas. Saišu spēki ir spēku blīvumi (spēks uz tilpuma vienību) nevis spriegumi (spēks uz laukuma vienību), jo katrs punkts apraksta kādu tilpumu. Saišu deformāciju vektori tiek glabāti masīvā, sauktā par deformāciju stāvokli (*deformation state*):

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{x}_i} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_i \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_i \end{Bmatrix}, \quad (2.1.)$$

līdzīgi spēku blīvuma vektori tiek glabāti masīvā, ko sauc par spēku stāvokli (*force state*).

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}_i} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{in} \end{Bmatrix}. \quad (2.2.)$$



2.1. att. Diskretizēts divdimensionāls PD ķermenis B . Parādītas tikai divas saites – $\boldsymbol{\xi}_{ij}$ un $\boldsymbol{\xi}_{ji}$. Abas parādītas izliektas, lai novērstu to pārklāšanos.

Saišu spēka blīvuma vektori tiek aprēķināti, izmantojot saišu deformācijas:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{T}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}_i)), \quad (2.3.)$$

kur funkcija $\mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$ ir materiāla modelis. Pieņemts rakstīt $\mathbf{T}(\mathbf{x}_i)\langle\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\rangle$ vai $\mathbf{T}(\mathbf{x}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_{ij}\rangle$, kad jāatsaucas uz spēka blīvuma vektoru $\mathbf{t}_{ij}$ saitē $\boldsymbol{\xi}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, līdzīgi apzīmēji tiek lietoti deformāciju stāvokļa un deformēto saišu vektoriem. Peridinamikas kustību vienādojums integrāļa formā ir:

$$\rho(\mathbf{x}_i)\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t) = \int_{H_{x_i}} (\mathbf{T}(\mathbf{x}_i)\langle\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\rangle - \mathbf{T}(\mathbf{x}_j)\langle\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\rangle) dV_{x_j} + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i), \quad (2.4.)$$

kur $\rho(\mathbf{x}_i)$ – blīvums;

$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t)$ – paātrinājums;

$\mathbf{b}(\mathbf{x}_i)$ – ārējo spēku blīvums.

Saites pienesumu spēku blīvuma kādā punktā var izvērtēt, izmantojot ietekmes funkciju $\omega(\mathbf{x}_i)$. Ietekmes funkcijas vērtība var būt atkarīga no saites garuma, virziena un citiem raksturlielumiem. To arī var izmantot, lai ieviestu bojājumus, proti, pārtraucot iedarbību starp diviem punktiem – nomainot funkcijas vērtību uz 0, tas nozīmē “pārraujot” saiti, kad tiek sasniegts kāds bojājumu kritērijs. Visvienkāršākais bojājumu kritērijs varētu būt kritiskais izstiepums, kurā saite pārtrūkst, kad tikko ir izstiepta garāka par kādu kritisko vērtību s_c :

$$\omega(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1, & \text{ja } s_{ij} < s_c, \\ 0, & \text{ja } s_{ij} \geq s_c, \end{cases} \quad s_{ij} = \frac{|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i| - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} = \frac{|Y\langle\boldsymbol{\xi}_{ij}\rangle| - |\boldsymbol{\xi}_{ij}|}{|\boldsymbol{\xi}_{ij}|}, \quad (2.5.)$$

kur s_{ij} – saites izstiepums. Bojājumi punktā var tikt definēti kā attiecība starp pārrauto saišu skaitu un sākotnējo saišu skaitu:

$$\phi(\mathbf{x}_i) = 1 - \frac{\int_{H_{x_i}} \omega(\mathbf{x}_i) dV_{x_j}}{\int_{H_{x_i}} dV_{x_j}}. \quad (2.6.)$$

2.2. Lineārā algebra un modālā analīze

Kad sistēmas slāpēšana ir neliela, bieži vien tā netiek ņemta vērā, un kustības vienādojums ir formā:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (2.7.)$$

Masas matrica $\mathbf{M}$ apraksta katra ķermeņa punkta masu, stinguma matrica $\mathbf{K}$ apraksta spēku, ko punkts $\mathbf{x}_i$ rada uz punktu $\mathbf{x}_j$ un otrādi.

Vairāku brīvības pakāpju sistēmu brīvās vibrācijas izraisa kāds sākotnējs potenciāls vai kinētiskā enerģija, tāpēc $\mathbf{F} = 0$. Vienādojums (2.16.) var tikt pārrakstīts kā

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}. \quad (2.8.)$$

Lineārajā algebra vienādojumu (2.8.) sauc par vispārināto īpašvērtību problēmu. λ un $\mathbf{x}$ vērtības, kas apmierina šo vienādojumu, sauc par īpašvērtībām un īpašvektoriem. Īpašvektori

$\mathbf{x}$ ir arī modu formas. Īpašvērtības λ ir saistītas ar modālajām frekvencēm f ar vienādojumu (2.13.).

Vienādojumu risināšanas metodes ir vai nu tiešas, vai iteratīvas, un algoritmus, kas tās risina, sauc par risinātājiem (*solvers*). Tiešās metodes sasniegs precīzu risinājumu, ja tas eksistē kādā galīgā soļu skaitā. Iteratīvās metodes iegūst $\mathbf{x}$ aproksimāciju, kas ir pietiekami precīza praktiskam lietojumam. Iteratīvās metodes sāk no kādas sākotnējā minējuma $\mathbf{x}_0$ un katrā nākamajā solī rada jaunu minējumu $\mathbf{x}_{n+1}$, kas ir nedaudz tuvāk precīzam atrisinājumam. Kad atšķirība starp $\mathbf{x}_n$ un $\mathbf{x}_{n+1}$ (atlikums) ir zem kādas noteiktas tolerances vērtības, aprēķinu pārtrauc un saka, ka rezultāts ir sakonverģējis. Iteratīvās metodes lielākoties izmanto mazāk atmiņu, jo nav jāsaglabā visa matrica.

Priekškondicionēšana (*preconditioning*) ir metode, ko izmanto iteratīvos risinātajos, lai modificētu oriģinālo uzdevumu tā, ka tas kļūst vieglāk atrisināms. Vislabāk zināmā ir tā sauktā *shift-invert* metode. Vispārīgais īpašvērtību uzdevums (2.8.) tiek transformēts par

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \theta\mathbf{x}, \quad (2.9.)$$

kur gan $\mathbf{C}$, gan θ ir substitūcijas,

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A} - \sigma\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} \quad (2.10.)$$

un

$$\theta = (\lambda - \sigma^2)^{-1}, \quad (2.11.)$$

kur σ – *shift* vērtība. Tagad (2.9.) ir standarta īpašvērtību uzdevums. Ja *shift* vērtība σ ir izvēlēta labi, tad matricas $\mathbf{C}$ īpašvērtības ir labāk atdalītas kā $\mathbf{K}$ īpašvērtības, kas rada ātrāku konverģenci. Ja risinātājs sakonverģē, tad iegūtie īpašvektori $\mathbf{x}$ ir tādi paši kā oriģinālā uzdevumi īpašvektori, bet īpašvērtības nepieciešams pārvērst atpakaļ, izmantojot:

$$\lambda = \frac{1}{\theta} + \sigma^2. \quad (2.12.)$$

Tad iegūtie īpašvektori $\mathbf{x}$ ir oriģinālā uzdevuma (2.8.) modu formas, savukārt pašsvārstību frekvences f tiek izrēķinātas no īpašvērtībām, kas jāinvertē un jānobīda atpakaļ:

$$f = \frac{+\sqrt{\frac{1}{\theta} + \sigma^2}}{2\pi}. \quad (2.13.)$$

3. APRĒĶINU IMPLEMENTĀCIJA UN OPTIMIZĀCIJA

PD simulācijas tika veiktas uz aprēķinu klastera “Vasara” Rīgas Tehniskajā universitātē. Izmantoti tika dažāda skaita *Dell EMC PowerEdge R640* mezgli (*nodes*) katra ar $2 \times \text{Intel(R) Xeon(R) Gold 6154}$ 3,00 GHz procesoru ar 36 kodoliem. Maksimālā operatīvā atmiņa katrā mezglā bija 348 GB, un katrs aprīkots ar 240 GB SSD. Tie bija savienoti ar *Infiniband EDR* 100 Gb/s savienojumu. Uz klastera bija uzstādīta *Centos 7.5* operētājsistēma un *Torque 6.1.1.1* resursu menedžeris. Modālais risinātājs tika implementēts *Peridigm 1.5.0* programmā, kas rakstīšanas laikā bija pieejama <https://github.com/peridigm/peridigm>.

3.1. Peridinamikas implementācija

Modālais risinātājs

Priekšizpētes un promocijas darba izstrādes laikā kļuva skaidrs, ka PD modālā uzdevuma atrisināšanai ir vairāki nozīmīgi izaicinājumi.

- Pirmkārt, peridinamikas stinguma matricas ir nesimetriskas, tādēļ nepieciešami nehermitiāni risinātāji. Nesimetriskas matricas lielākoties aizņem vairāk datora atmiņas, jo jā saglabā visa matrica nevis tikai puse. Turklāt nesimetrisku uzdevumu īpašvērtības var nebūt reālas, tāpēc risinājumi iekļaus kompleksos skaitļus.
- Otrkārt, punkts peridinamikā parasti ir saistīts ar vairāk citiem punktiem nekā GE analīzē, tāpēc stinguma matricas satur vairāk nenulles elementus un to joslas ir platākas. Palielinoties nenulles elementu skaitam, palielinās nepieciešamā atmiņa, kā arī vairāk nenulles elementu rada sliktāku konverģenci, jo uzdevumā ir jāapsver vērtību.
- Treškārt, praktisku uzdevumu PD modeļi sastāv no liela skaita punktu, iespējams, miljonus. Mazos modeļos (ar lielu starppunktu attālumu) plaisas spice pārvietosies ar lieliem lēcieniem, kas slikti aprakstīs plaisas patieso uzvedību. Pieņemamu tīkla konverģenci var sasniegt tikai ar lieliem modeļiem un, ja starppunktu attālumi ir lieli, robežnoteikumiem var būt pārāk liela ietekme uz modeļa uzvedību, tādējādi neizpildīsies Senvenāna princips (*Saint-Venant's principle*).

Modālais risinātājs tika implementēts atvērtā koda programmā *Peridigm*. Tā ir atvērtā koda programma, tāpēc autors vēlāk varēja dalīties ar savu kodu, padarot šo analīzi pieejamu citiem pētniekiem un inženieriem. Turklāt vairākas *Peridigm* daļas – materiālu modeļi, stinguma matricas izveides funkcijas, diskretizācija – jau bija izveidotas, tādējādi samazinot laiku, kas jāpavada, rakstot kodu, lai iegūtu darbojošos modālo risinātāju.

Modālais risinātājs tika izveidots, apvienojot *ILU* priekškondicionētāju, mainīgo bloku *GMRES* lineāro risinātāju (*flexible block-GMRES linear solver*) un bloku Krilova–Šūra īpašvērtību risinātāju (*block Krylov-Schur eigenvalue solver*). Risinātāja implementācijā tika izmantotas *Trilinos* bibliotēka, jo:

- *Peridigm* ir uzrakstīts, izmantojot vairākas *Trilinos* daļas, tāpēc turpmākā integrācija bija vienkāršāka;

- *Trilinos* ir radīts masīvi paralēliem aprēķiniem, lai tas ir piemērots darbam aprēķinu klasteros;
- visi trīs – lineārais risinātājs, īpašvērtību risinātājs un priekškonkicionētājs – ir pieejami *Trilinos*, tāpēc implementācijai varēja izmantot tikai vienu bibliotēku.

Peridīnamikas modelis

Modelis bija vienkārša četrstūra plāksne. Reālām konstrukcijām forma būtu sarežģītāka, bet šāda vienkārša forma ir pietiekama rezultātu verifikācijai un validācijai, kā arī tā bija laba izvēle, jo dažādu veidu modas parādījās rezultātos

Peridigm izmanto *meshfree* diskretizāciju. Tā tīkls tiek definēts ar teksta failiem, kuros katra līnija apraksta vienu punktu, un kas jāuztaisa lietotājam. Vajadzīgie dati ir punkta x, y, z koordinātas, bloka ID un tilpums. Bloks ir punktu grupa, kurai ir viens materiāla, bojājumu un kontakta modelis. Tika izmantoti četri dažādi modeļi ar 40 000, 135 000, 320 000, 625 000 punktiem. Starppunktu attālumi bija 0,001 m, 0,000667 m, 0,0005 m un 0,0004 m. Modeļa izmērs bija 0,10 m $\times$ 0,05 m $\times$ 0,008 m, un tika izmantoti četri dažādi horizonta garumi: $\sqrt{2}h, 2h, 3h, 4h$.

Simulācijas izmantoja *Linear Peridynamic Solid* materiāla modeli, kas ir PD ekvivalents elastīgam materiāla modelim klasiskajā teorijā. Lai radītu *free-free* testa uzstādījumus, netika pielikti nekādi robežnoteikumi. Materiālu raksturlielumi bija: elastības modulis – 5,35 GPa, Puasona koeficients – 0,33, blīvums – 1200 kg/m³. Plaisas modelī tika radītas, definējot plaisas plakni un pārraujot visas saites, kas to šķērso. Plaisu konfigurācijas ir parādītas 4. nodaļā.

Tika aprēķinātas pirmās 12 modas. Pirmās sešas bija cietķermeņa kustības (*rigid-body motion*) modas, tāpēc ar GE un eksperimenta rezultātiem tika salīdzinātas tikai otrās sešas. Kopā tika veiktas 144 simulācijas.

3.2. Galīgo elementu implementācija

Modālā analīze galīgo elementu metodē ir labi saprasta un tiek plaši lietota gan pētniecībā, gan inženierijā, tādēļ tā bija pirmā izvēle PD rezultātu verifikācijai. Četrstūra plāksnes modelis ar tiem pašiem izmēriem kā PD modelim tika izveidots GE programmā *Ansys*. Tika izmantots elastīga materiāla modelis ar tādām pašām materiāla īpašībām kā PD simulācijās. GE modelis tika izveidots, izmantojot *SOLID185* astoņu punktu kubiskus elementus un sastāvēja no 664 146 punktiem.

Šādu uzdevumu varētu modelēt ar čaulas elementiem, kas būtu “lētāki” aprēķinu ziņā. *Solid* elementi tika izvēlēti divu iemeslu dēļ:

- autors vēlējās, lai GE un PD tīkliem būtu līdzīgs punktu skaits;
- bija iespējams radīt plaisas GE modeļa tilpumā, kas nebūtu iespējams, ja modelis būtu veidots ar čaulas elementiem. Plaisas GE modelī bija izveidotas, nesavienojot *solid* elementu punktus plaisas plaknē.

3.3. Risinātāja parametru optimizācija

Risinātāja parametri ietekmē risināšanas laiku, atmiņas patēriņu un simulācijas konverģenci. Matemātiskā optimizācija ir definējama kā labākā elementa (attiecībā pret kādu kritēriju) izvēle no kādas pieejamo alternatīvu kopas. Šajā promocijas darbā ir divi mērķi, ko optimizēt, – maksimālais atmiņas patēriņš un rēķināšanas laiks. Maksimālais atmiņas patēriņš tika iegūts, izmantojot “*tracejob*” komandu, kas pieejama *Torque* resursu menedžmenta sistēmā, savukārt simulācijas ilgumu mērīja *Peridigm* iebūvēts taimeris.

Parasti vairākmērķu optimizācijas uzdevumiem izmanto Pareto optimizāciju. Pašreizējā gadījumā Pareto optimāla būtu tāda risinātāja parametru kombinācija, kurā nav iespējams izmainīt kādu parametra vērtību tā, lai nepieaugtu atmiņas patēriņš vai nepalēninātos aprēķinu ātrums. Lielākoties tiek atrasta Pareto optimālu punktu kopa, saukta par Pareto fronti.

3.1. tabula

Testa grupas un to parametri

Grupa	NEV	Horizonts	Eksperimentu skaits	Sakonverģēja	Nesakonverģēja	Pārsniedza atmiņu
A	1	$\sqrt{2}h$	180	131	15	34
B	10	$\sqrt{2}h$	150	105	7	38
C	1	$3h$	150	142	0	8
D	10	$3h$	150	124	0	26

Modeļa izmēri, materiāla modelis, materiāla raksturlielumi un robežnosacījumi bija tādi paši, kā aprakstīts iepriekš. Modelis bija diskretizēts ar 135 000 punktiem, starppunktu attālums bija $h = 0,000667$ m.

Testējamās vērtības tika izvēlētas ar *Latin-Hypercube* metodi. Tika izdalītas četras grupas – A, B, C un D. Tās atšķīrās ar meklējamo īpašvērtību skaitu (NEV) – 1 vai 10 – un horizonta garumu – vai nu $\delta = \sqrt{2}h$, vai $\delta = 3h$. Konkrētas vērtības ir parādītas 3.1. tabulā. Risinātāju tolerances bija $1e^{-6}$ un $1e^{-4}$ attiecīgi lineārajam un īpašvērtību risinātājam.

Kopējais simulāciju skaits, sakonverģējušās, nesakonverģējušās un simulāciju, kas pārsniedza pieejamo atmiņas daudzumu, skaits ir parādīts 3.1 tabulā. A grupā bija vairāk testu, jo lielākā daļa pārsniedza pieejamo atmiņas daudzumu, tādēļ operētājsistēma tos pārtrauca. 73 %, 70 %, 95 % un 83 % no visām grupu A līdz D simulācijām sakonverģēja.

Peridīnāmas modālajā analizē izmantotie risinātāju parametri

Parametrs	Vērtība
<i>ILU level of fill</i>	1
<i>ILU Drop tolerance</i>	$1e^{-6}$
<i>ILU Overlap level</i>	0
<i>Linear Solver Max Restarts</i>	10
<i>Linear Solver Number of Blocks</i>	1000
<i>Linear Solver Block Size</i>	6
<i>Eigensolver Max Restarts</i>	10
<i>Eigensolver Number of Blocks</i>	12
<i>Eigensolver Block Size</i>	3

Varēja atrast vairākas sakarības starp risinātāju parametriem, simulācijas ilgumu un izmantoto atmiņas daudzumu. Detalizēti šie jautājumi ir apskatīti promocijas darba pilnā tekstā. 3.2 tabulā ir parādītas disertācijas modālajās simulācijās izmantotās parametru vērtības.

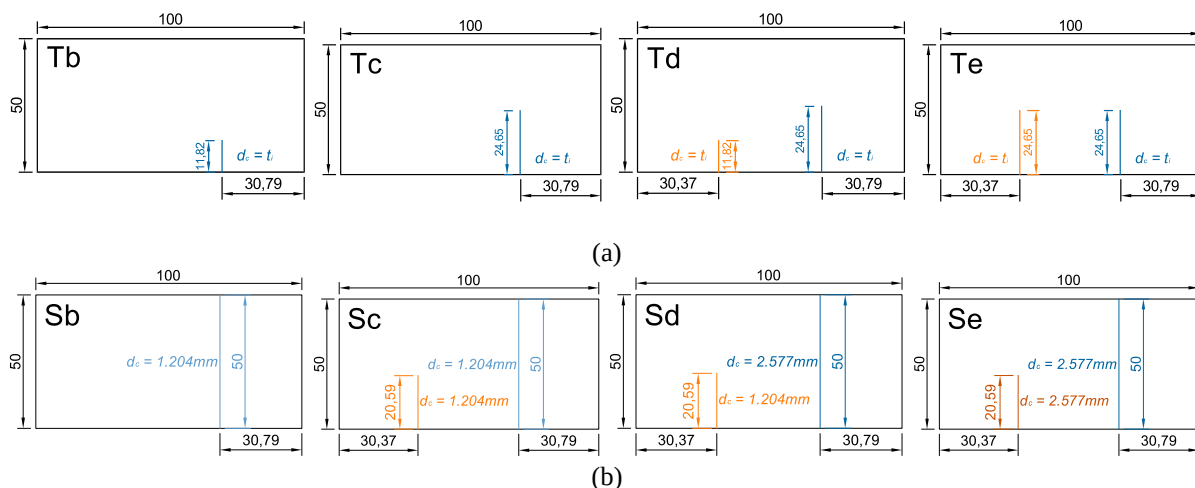
4. PARAUGU IZGATAVOŠANA UN TESTA UZSTĀDĪJUMI

Tika izmantoti divu veidu paraugi: stiepes paraugi, lai noteiktu mehāniskās īpašības, un četrstūra plāksnes, lai noteiktu modālos raksturlielumus. Visi paraugi bija izgriezti no 8 mm polimetilmetakrilāta (PMMA) plāksnēm, izmantojot lāzergriešanu. PMMA tika izvēlēts, jo tas ir izotrops, lēts, to ir viegli iegādāties un izgriezt nepieciešamajā formā, kā arī ar to ir viegli strādāt (tas nav smags kā betons, smakojošs kā asfalts, abrazīvs kā stiklašķiedra).

Stiepes testi tika veikti atbilstoši ASTM D638 standartam. Tika testēti deviņi paraugi, to vidējās vērtības izmantoja par ieejas datiem simulācijās.

Modālajiem testiem izmantoja desmit $0,1\text{ m} \times 0,05\text{ m} \times 0,008\text{ m}$ lielus plāksnes formas paraugus. To blīvums bija $1187,34\text{ kg/m}^3$. Tika apskatīti divi dažādi plaisu tipi deviņās dažādās plaisu konfigurācijās. Tās parādītas 4.1. attēlā. Katrā plaisu konfigurācijā testēja piecus paraugus. Konfigurāciju nosaukumu veidoja plaisas tips un burts alfabēta secībā, piemēram, Sd. Burts “a” bija rezervēts *Healthy* konfigurācijai:

- paraugi bez bojājumiem – saukti par *Healthy* konfigurāciju;
- paraugi ar plaisu cauri to biezumam – saukta par T plaisu konfigurāciju;
- paraugi ar plaisu uz to aizmugurējās virsmas – saukta par S plaisu konfigurāciju.



4.1. att. Plaisu atrašanās vietas, garumi un dziļumi. d_c – plaisas dziļums, t_i – plāksnes biezums. a – T plaisu konfigurācija, b – S plaisu konfigurācija.

Tika apsvērtas četras plaisu izveides pieejas – lāzergriešana, juveliera zāģa izmantošana, asas žiletas izmantošana, noguruma plaisas izaudzēšana. Metodei bija jābūt ātrai, precīzai, kā arī bija nepieciešams, lai plaisu vēlāk būtu iespējams pagarināt. Ar juveliera zāģi, žileti un noguruma plaisas audzēšanu varēja iegūt aptuveni, bet ne pilnībā, vienādu plaisas ceļu. Turklāt plaisas garums nebija pietiekami vienāds visos piecos paraugos. Vienīgi lāzergriešana izpildīja visas prasības.

Modālā testa paraugi tika iekārti divās kokvilnas diega cilpās, lai ļautu tiem pēc iespējas brīvi kustēties, tā radot *free-free* robežnosacījumus. Mērījumus veica ar 2D *Polytec PSV-400* lāzera vibrometru. Uz paraugu virsmas tika uzlīmēta papīra līmlenta, lai lāzera stars nespīdētu paraugiem cauri. Paraugus iesvārstīja ar skaļruni. Mērījumu diapazons bija no 1000 Hz līdz 8000 Hz ar mērījumu soli $\Delta f = 2,5\text{ Hz}$.

5. PD MODĀLĀS ANALĪZES VERIFIKĀCIJA UN VALIDĀCIJA

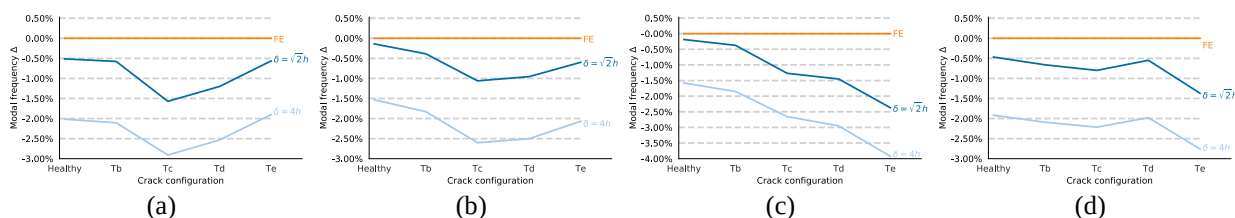
Rezultāti tika sagrupēti par to plaisu konfigurācijām – *Healthy*, Tb līdz Te, un Sb līdz Se. Modu secība bija atšķirīga dažādās plaisu konfigurācijās, tāpēc nav iespējams atsaukties uz modām pēc to kārtas numura, tāpēc modas apzīmēs pēc to veida un kārtas numura tajā, piemēram, 2. lieces moda, 1. vērpes moda utt. Kopā ar PD modālo analīzi ieguva 864 modas, ar GE analīzi – 54 modas, ar eksperimentālo modālo analīzi – 240 modas. Precīzas pašsvārstību frekvenču vērtības, lūdzu, skatiet pilnajā promocijas darba tekstā.

Tikai 1. un 2. lieces un 1. un 2. vērpes moda ar PD un GE analīzi tika iegūta visās T un S plaisu konfigurācijās. Visās S konfigurācijās tika iegūta arī 1. šķērsvirziena lieces moda. Tikai šīs modas izmantos verifikācijai un validācijai. Citas modas tika aprēķinātas tikai dažās konfigurācijās, jo modu secība tajās mainījās. Tiks izmantoti tikai tie rezultāti, ko aprēķināja ar īsāko horizontu $\delta = \sqrt{2}h$ un garāko horizontu $\delta = 4h$. Tie parāda salīdzinājumu starp vislokālākajiem un visnelokālākajiem rezultātiem, vienlaikus neradot pārbāztus attēlus.

Lai vizualizētu PD, GE un eksperimentālās modu formas, tika izmantotas trīs dažādas datorprogrammas – *Paraview*, *Ansys* un *Polytec Scan Viewer*. Programmas izmantoja līdzīgas, bet ne identiskas, krāsu shēmas, tāpēc krāsu sadalījums var izskatīties nedaudz atšķirīgs.

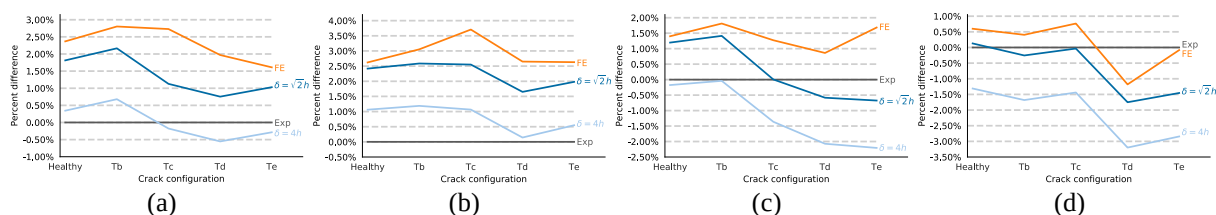
PD pašsvārstību frekvenču verifikācijas un validācija

Starpība procentos starp PD un GE pašsvārstību frekvencēm *Healthy* un T plaisu konfigurācijās ir parādīta 5.1. attēlā. S konfigurāciju attēli ir skatāmi pilnajā promocijas darba tekstā. Atšķirības starp PD un GE rezultātiem tika gaidītas, jo viens uzdevums atrisināts, izmantojot divas dažādas mehānikas teorijas, bet rezultāti ļoti labi saskan. Lielākā starpība starp pašsvārstību frekvencēm ar horizontu $\sqrt{2}h$ ir 2,37 % (Te plaisu konfigurācijā 2. vērpes modai). Kad $\delta = 4h$, lielākā starpība ir –3,92 % (Te plaisu konfigurācijā 2. vērpes modai). S plaisu konfigurācijās redzams, ka PD un GE modālo analīžu rezultāti ļoti labi saskan. Procentu atšķirība starp tiem ir robežās no –2,02 % līdz +1,47 %.



5.1. att. Starpība procentos starp PD un GE pašsvārstību frekvencēm T plaisu konfigurācijās.
a – 1. lieces moda, b – 1. vērpes moda, c – 2. vērpes moda, d – 2. lieces moda.

Healthy un visās T plaisu konfigurācijās PD pašsvārstību frekvences bija zemākas nekā GE pašsvārstību frekvences. Atšķirības aprēķinātajās pašsvārstību frekvencēs, visticamāk, radās atšķirīgo stinguma matricu dēļ. PD aprēķina stingums bija zemāks nekā GE aprēķina stingums. Lielākajā daļā plaisu konfigurāciju PD rezultāti, ja horizonts $\delta = \sqrt{2}h$, ar GE rezultātiem saskanēja labāk nekā tad, ja horizonts $\delta = 4h$. Šādi rezultāti bija sagaidāmi, jo nelokālais PD atrisinājums tiecas uz lokālo atrisinājumu, kad horizonts sarūk līdz nullei.



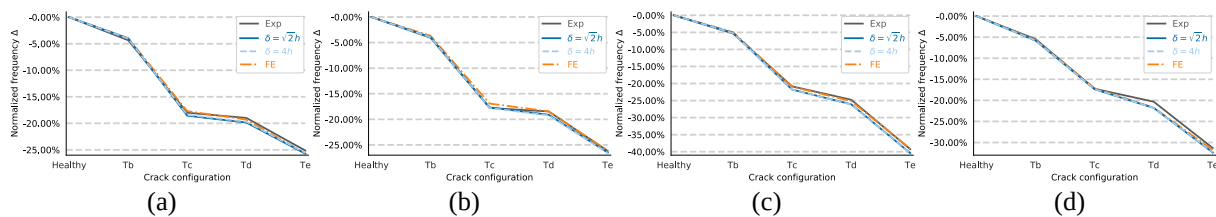
5.2. att. Starpība procentos starp PD, eksperimenta un GE pašsvārstību frekvencēm T plaisu konfigurācijās. a – 1. lieces moda, b – 1. vērpes moda, c – 2. vērpes moda, d – 2. lieces moda.

Procentu starpība starp PD, eksperimenta un GE pašsvārstību frekvencēm *Healthy* un T plaisu konfigurācijās ir parādīta 5.2. attēlā. S plaisu konfigurāciju rezultāti ir parādīti pilnajā promocijas darba tekstā. Izmantotajiem testa uzstādījumiem PD modālā analīze ir vismaz tikpat precīza kā GE modālā analīze. Atšķirības starp PD rezultātiem un eksperimenta rezultātiem ir ļoti mazas, kas parāda, ka PD modālā analīze labi ataino testa paraugu modālo uzvedību. T plaisu konfigurācijās starpība starp PD un eksperimenta rezultātiem ir robežās no $-3,20\%$ līdz $2,59\%$, starp GE un eksperimenta rezultātiem – no $-1,20\%$ līdz $3,57\%$. S plaisu konfigurācijās atšķirības starp PD un eksperimenta rezultātiem bija robežās no $-1,81\%$ līdz $3,06\%$, starp GE un eksperimenta rezultātiem – no $-1,26\%$ līdz $2,96\%$.

Frekvenču nobīde

Frekvenču nobīde ir pašsvārstību frekvenču izmaiņa objekta stinguma izmaiņu dēļ. To rada dažādas ietekmes, piemēram, bojājumi. Pašsvārstību frekvences bija robežās no 1000 Hz līdz 7000 Hz, tāpēc, lai rezultāti būtu vieglāk savstarpēji salīdzināmi, izmantotas relatīvās frekvenču nobīdes.

T plaisu konfigurāciju nobīdes parādītas 5.3. attēlā, S plaisu konfigurāciju nobīdes – pilnajā promocijas darba tekstā. Te plaisu konfigurācijā lielākā nobīde ir $-40,46\%$, mazākā ir $-25,61\%$, savukārt Se konfigurācija lielākā nobīde ir $-7,82\%$, mazākā ir $-0,24\%$. Rezultāti rāda 14,85 un 7,58 procentpunktu atšķirību starp lielāko un mazāko frekvenču nobīdi attiecīgi T un S konfigurācijās. Tas nozīmē, ka plaisu ietekme uz PD modeļu stingumu ievērojami mainās atkarībā no modas veida.



5.3. att. Relatīvā frekvenču nobīde T plaisu konfigurāciju paraugiem. a – 1. lieces moda, b – 1. vērpes moda, c – 2. vērpes moda, d – 2. lieces moda.

PD, GE un eksperimenta frekvenču nobīdes lieliski saskanēja viena ar otru. Te plaisu konfigurācijā atšķirības starp PD un GE frekvenču nobīdēm bija starp $-1,38$ un $-0,04$ procentpunktiem, bet starp PD un eksperimenta relatīvajām frekvenču nobīdēm starp $-1,47$ un $+0,34$ procentpunktiem. Se plaisu konfigurācijā atšķirības starp PD un GE frekvenču nobīdēm bija starp $-0,19$ un $+1,30$ procentpunktiem, savukārt starp PD un eksperimenta nobīdēm starp $-0,70$ un $+1,95$ procentpunktiem.

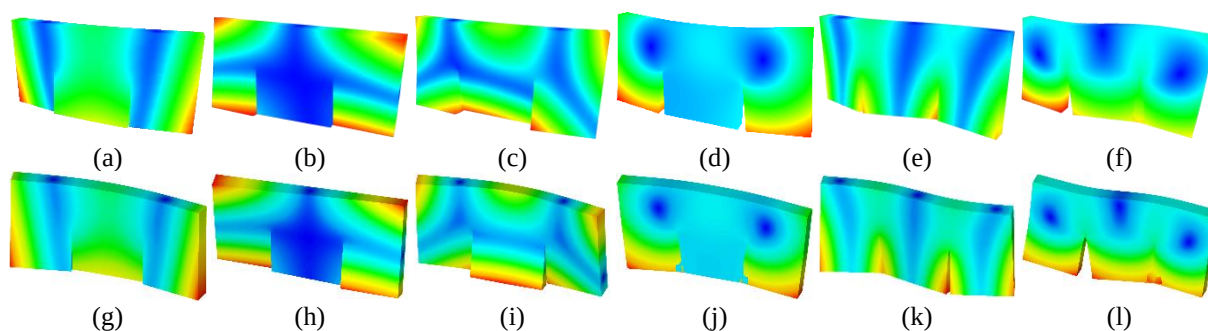
PD modu formu verifikācija

Te un Se plaisu konfigurāciju modu formas ir parādītas attiecīgi 5.5. un 5.6. attēlos. Citas modas ir parādītas pilnajā promocijas darba tekstā. Krāsu lēģenda ar skaitliskām vērtībām nevar tikt parādīta, jo modu forma ir bezdimensionāla konstrukcijas, kas vibrē ar kādu pašsvārstību frekvenci, reprezentācija. Visa krāsu shēma ir parādīta 5.4. attēlā.

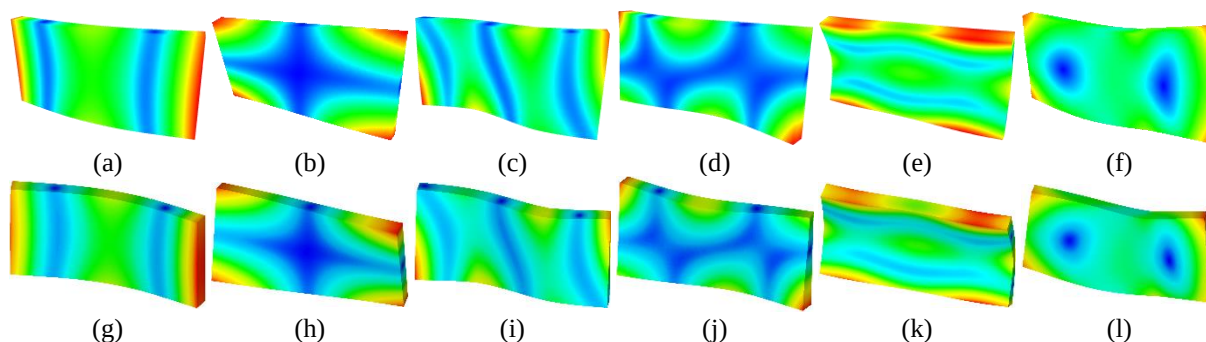


5.4. att. Krāsu shēma, kas izmantota 5.5 un 5.6 attēlos.

PD modālā analīze deva tādas pat modu formas kā GE modālā analīze katrā atsevišķajā plaisu konfigurācijā. Te plaisu konfigurācijā (5.5. att.), modu secība bija: 1. lieces moda, 1. vērpes moda, 2. vērpes moda, 1. lieces plaknē moda, 2. lieces moda, 2. lieces plaknē moda. Se plaisu konfigurācijā (5.6. att.), modu secība bija: 1. lieces moda, 1. vērpes moda, 2. lieces moda, 2. vērpes moda, 1. šķērsvirziena lieces moda, 1. lieces plaknē moda.



5.5. att. PD un GE modu formas Te konfigurācijā. Augšā – PD modu formas, apakšā – GE modu formas. a, g – 1. lieces moda, b, h – 1. vērpes moda, c, i – 2. vērpes moda, d, j – 1. lieces plaknē moda, e, k – 2. lieces moda, f, l – 2. lieces plaknē moda.



5.6. att. PD un GE modu formas Se konfigurācijā. Augšā – PD modu formas, apakšā – GE modu formas. a, g – 1. lieces moda, b, h – 1. vērpes moda, c, i – 2. lieces moda, d, j – 2. vērpes moda, e, k – 1. šķērsvirziena lieces moda, f, l – 1. lieces plaknē moda.

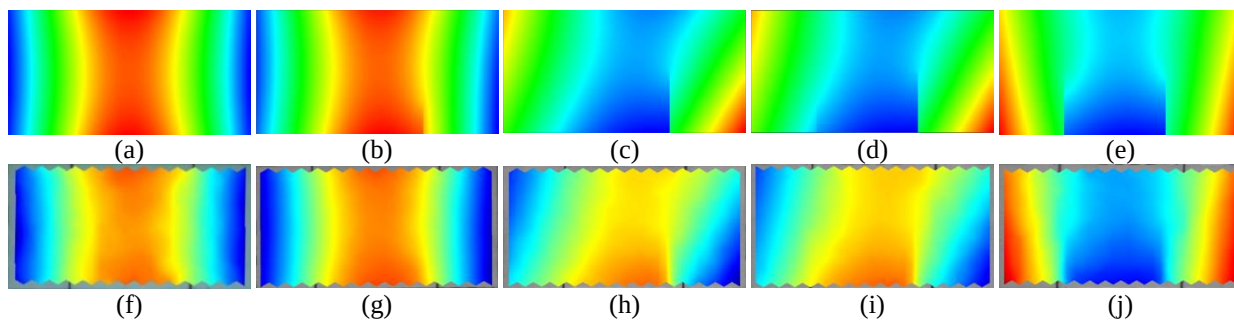
Ieviestās plaisas radīja pēkšņu pārtrauktību deformāciju laukā, tādēļ deformāciju lauks izmainījās. Šo var redzēt gan T, gan S plaisu konfigurāciju modu formās. Piemēram, 1. vērpes modas Te plaisu konfigurācijā – 5.5. b un 5.5. h attēlos – maksimālie pārvietojumi atrodas augšējos stūros, kā arī visā apakšējā malā pa kreisi no kreisās plaisas un pa labi no labās plaisas. Se plaisu konfigurācijā nav redzamu izmaiņu 1. lieces, vērpes, šķērsvirziena lieces un lieces plaknē modu formās. 2. vērpes modas formā kreisajā pusē esošā zona bez pārvietojumiem ir manāmi pārvietojusies uz leju bet 2. lieces modas formā visas trīs zonas bez pārvietojumiem vairs nav paralēlas plāksnes īsajām malām. T plaisu konfigurācijās plaisas bija redzamas visās PD un GE modu formās, bet ne visās S konfigurāciju modu formās, jo tajās plaisas bija novietotas uz modeļa aizmugurējās virsmas.

PD modu formu validācija

5.8. un 5.9. attēlos parādīti 1. lieces modas rezultāti visās plaisu konfigurācijās. Citu modu formas ir parādītas pilnajā promocijas darba tekstā. Tikai 2D modas bija iespējams iegūt ar laboratorijā pieejamo testu aprīkojumu, tāpēc autors izvēlējās arī PD modas parādīt divās dimensijās, lai tās būtu vieglāk salīdzināmas ar eksperimenta datiem. Izmantotā krāsu lēģenda ir parādīta 5.7. attēlā.

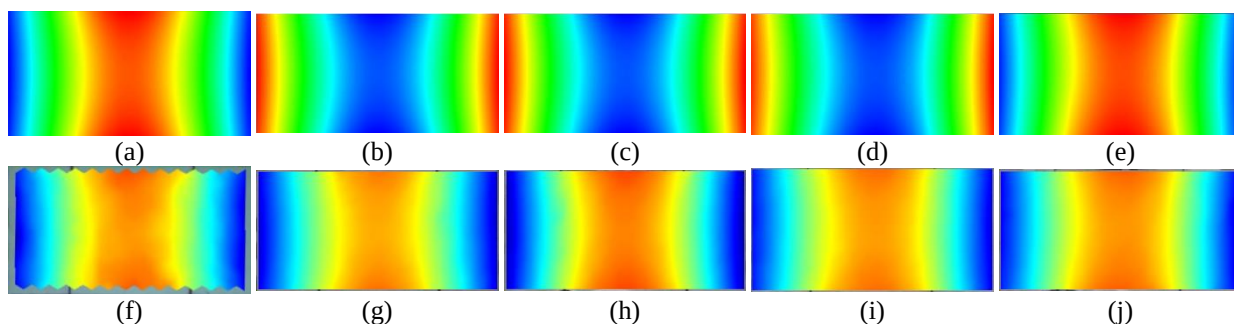


5.7. att. Krāsu shēma, kas izmantota 5.8. un 5.9. attēlos.



5.8. att. 1. lieces modas formas. Augšā – PD, apakšā – eksperimenta modas formas. a, f – *Healthy*; b, g – Tb; c, h – Tc; d, i – Td; e, j – Te konfigurācija.

PD un eksperimenta modas formas cita citai lieliski atbilst. T plaisu konfigurācijās ekstrēmie pārvietojumi atrodas plāksnes vidū un abos galos. Kad tiek ieviestas plaisas, pārvietojumi nobīdās un plaisas ir skaidri redzamas visās PD modas formās, bet ne visās eksperimenta modas formās. Plaisas S konfigurācijās tika iestrādātas paraugu aizmugurējā virsmā, tāpēc tās neparādījās uz parauga virsmas, kā arī pēc plaisu ieviešanas redzami nenobīdījās 1. lieces modas pārvietojumu lauks.



5.9. att. 1. lieces modas formas. Augšā – PD, apakšā – eksperimenta modas formas. a, f – *Healthy*; b, g – Sb; c, h – Sc; d, i – Sd; e, j – Se konfigurācija.

6. KONVERĢENCES PĒTĪJUMI

Katrai pieņemamai skaitliskai metodei vajadzētu konverģēt uz precīzu lokālu vai nelokālu risinājumu. Tikliem ar lielāku punktu skaitu (tātad – mazāku starppunktu attālumu) vajadzētu dot precīzākus rezultātus, bet izmantot vairāk aprēķinu resursus. Tīkla konverģence tiek apskatīta, lai noteiktu zemāko punktu skaitu, kas dod pieņemamu diskretizācijas kļūdu.

Modelī ir kāds noteikts punktu skaits m , un inversais lielums ir starppunktu attālums h . Diskretizācijas kļūda rodas, kad nepārtraukta mainīgā funkcija tiek aprakstīta ar galīga skaita novērtējumu. Kad starppunktu attālums samazinās, t. i., $h \rightarrow 0$, diskretizācijas kļūdai vajadzētu asimptotiski tiekties uz nulli un atliktu tikai datora noapaļošanas kļūdas.

PD var definēt trīs dažādus konverģences veidus:

- δm konverģence, kurā $\delta \rightarrow 0$ un m palielinās, kamēr δ samazinās, turklāt m palielinās ātrāk nekā δ samazinās; skaitliskais PD atrisinājums konverģēs uz analītisko PD atrisinājumu un uz lokālo kontinuma mehānikas atrisinājumu;
- m konverģence, kurā δ ir konstanta un $m \rightarrow \infty$; šajā gadījumā PD atrisinājums konverģēs uz precīzu nelokālu PD risinājumu konkrētajai δ ;
- δ konverģence, kurā $\delta \rightarrow 0$ un m ir konstants vai palielinās līdz ar sarūkošu δ ; šajā gadījumā PD risinājums konverģē uz kontinuma mehānikas atrisinājuma aproksimāciju.

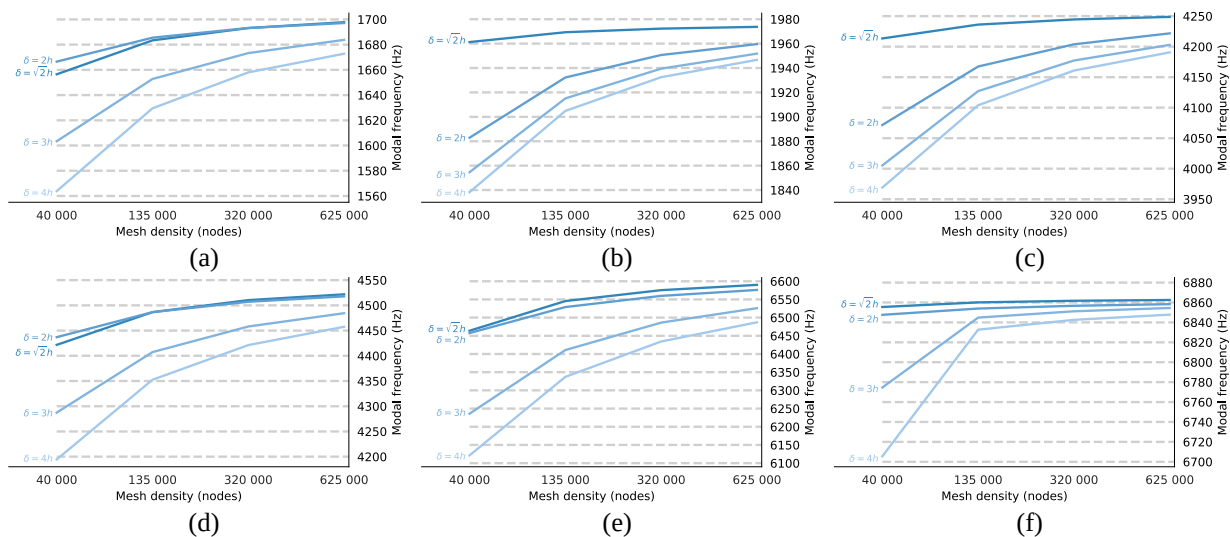
Jāatzīmē, ka aprēķinu modelī horizontam δ ir jānosiedz vairāk nekā viens punkts, tāpēc tas nevar sarukt līdz nullei. Šajā promocijas darbā īsākais izmantotais horizonta garums ir $\delta = \sqrt{2}h$.

Tika apskatītas divas konverģences – δ un δm . δ konverģences pētījumā tīkla blīvums bija konstants – 40 000, 135 000, 320 000 vai 625 000 punkti, un horizonts saruka no $\delta = 4h$ līdz $\delta = \sqrt{2}h$. δm konverģences pētījumā horizonta garums bija konstants – $\delta = \sqrt{2}h$, $\delta = 2h$, $\delta = 3h$ vai $\delta = 4h$, un tīkla blīvums palielinājās no 40 000 līdz 625 000 punktiem.

Konverģence tika pētīta *Healthy* konfigurācijas paraugiem, un pirmo sešu modu δm konverģences attēli ir parādīti 6.1. attēlā. Visi attēli rāda, ka aprēķinātās pašsvārstību frekvences asimptotiski tiecas uz kontinuma vērtību, kad tīkla blīvums palielinās.

Aprēķinātās δm konverģences pakāpes rāda, ka visos gadījumos konverģences nav lineāra, bet gan augstākas pakāpes $p > 1$. Tas nozīmē, ka pat neliels tīkla blīvuma palielinājums dod lielu precizitātes pieaugumu. Lielākoties konverģences pakāpes ir starp 1 un 2, tātad – nesasniedz kvadrātisku konverģenci.

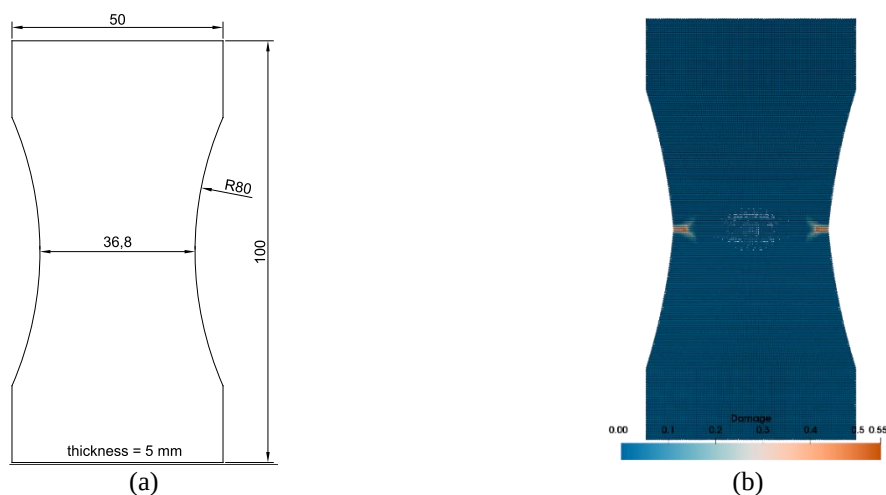
δ konverģences attēli ir parādīti pilnajā promocijas darba tekstā. Jāatzīmē, ka tīkla blīvums δ konverģencē nesarūk, tāpēc tai noteikti nav jābūt asimptotiskai. Pirmajām divām lieces modām un 1. šķērsvirziena lieces modai vērtības strauji konverģēja, līdz horizonts sasniedza $\delta = 2h$ un nemainījās vērā ņemami, kad horizonts samazinājās līdz $\delta = \sqrt{2}h$. 1. un 2. vērpes modas rezultāti bez izņēmumiem tiecās uz vienu vērtību pie $\delta = \sqrt{2}h$. Un 1. lieces plaknē moda konverģēja tāpat kā citas modas.



6.1. att. *Healthy* konfigurācijas paraugu δm konverģence. a – 1. lieces moda, b – 1. vērpes moda, c – 2. vērpes moda, d – 2. lieces moda, e – 1. šķērsvirziena lieces moda, f – 1. lieces plaknē moda.

7. PERIDINAMIKAS MODĀLĀS ANALĪZES LIETOJUMA DEMONSTRĀCIJA

Modālā analīze tika apvienota ar PD noguruma simulāciju. Vispirms modālā analīze tika veikta modelim bez bojājumiem, tad sekoja noguruma simulācija, kurai sekoja vēl viena modālā analīze. Tika aprēķinātas pirmās 12 modas, un abās modālajās analīzēs netika definēti nekādi robežnosacījumi. Pirmās sešas bija cietķermeņa kustības modas, kas tālāk apskatītas netiks.



7.1. att. Demonstrācijas modelis. a – modelis ar tā izmēriem, b – bojājumi modelī pēc 870 000 noguruma cikliem.

Demonstrācijai tika izmantots stiepes testa paraugs, tā izmēri parādīti 7.1. a attēlā. Horizonta garums bija 0,0015001 m, modelī bija 204 000 punkti. Simulācijās tika izmantots elastīga materiāla modelis ar šādām materiāla īpašībām: blīvums – 7850,0 kg/m³; Puasona koeficients – 0,30; Junga modulis – 189,9 GPa. Noguruma simulācijā abiem parauga galiem tika pielikts konstants $9e^{-5}$ m pārvietojums pretējos virzienos pa y asi. Robežnosacījumi tika pielikti punktu grupām viena horizonta attālumā no abiem galiem, kā arī bojājumi tika aizliegti punktu grupām trīs horizontu no parauga galiem attālumā, lai izvairītos no nefizikālas uzvedības robežnosacījumu tuvumā. Noguruma modeļa parametri ir parādīti 7.1. tabulā. Noguruma simulācija bija 870 000 ciklu gara, modelis simulācijas beigās ir parādīts 7.1. b attēlā. Noguruma simulācijas laikā parauga šaurākās daļas abās pusēs viena pretim otrai izauga divas plaisas, kas vēlāk sadalījās vēl divās plaisās.

7.1. tabula

Noguruma bojājumu modeļa parametri

Parametri	Vērtība
A_I	426,00
m_I	2,77
A_{II}	25 237,48
m_{II}	4,00
ϵ_∞	0,00186
Φ_C	0,385



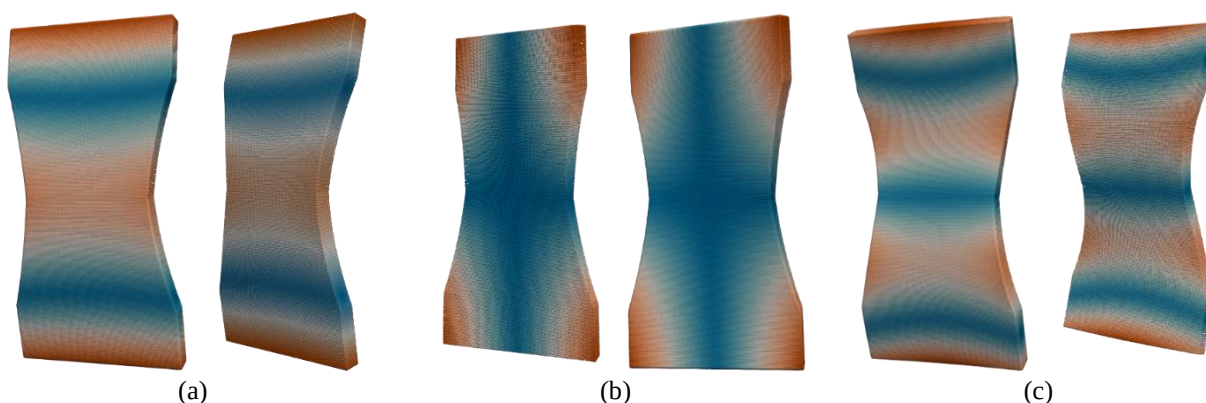
7.2. att. Krāsu shēma, izmantota 7.3. attēlā.

Pašsvārstību frekvences ir parādītas 7.2. tabulā, modu formu krāsu shēma – 7.2. attēlā, pirmās trīs modu formas – 7.3. attēlā. Citas modu formas var apskatīt pilnajā promocijas darba tekstā. Visām pašsvārstību frekvencēm radās frekvenču nobīde pēc noguruma plaisu rašanās. Lielākā frekvenču nobīde bija –2,91 % 1. lieces modai. Pārējām modām tās bija mazākas gan absolūtajās, gan relatīvajās vērtībās. Tas parāda, ka peridinamikas teorijā iespējamās reālistisku un dabīgi attīstošos bojājumu simulācijas, kas apvienotas ar modālo analīzi, šo bojājumu aplēsei. Radušies bojājumi modu formas redzami neizmainīja. Lai noteiktu atšķirību starp modu formām pirms un pēc noguruma simulācijas, būtu jāveic kvantitatīva nevis kvalitatīva analīze. Tāds pētījums ir ārpus promocijas darba robežām.

7.2. tabula

Modeļa bez bojājumiem un modeļa ar bojājumiem pēc 870 000 noguruma cikliem pašsvārstību frekvences

Moda	Modelis bez bojājumiem (0 cikli)		Modelis ar bojājumiem (870 000 ciklu)		Δf , %
	Modas veids	f , Hz	Modas veids	f , Hz	
1.	1. lieces	2446,38	1. lieces	2377,17	–2,91 %
2.	1. vērpes	2949,17	1. vērpes	2911,42	–1,30 %
3.	2. lieces	6855,98	2. lieces	6820,82	–0,52 %
4.	2. vērpes	7608,84	2. vērpes	7547,12	–0,82 %
5.	1. šķērsvirziena lieces	11 092,60	1. šķērsvirziena lieces	11 042,50	–0,45 %
6.	3. vērpes	11 883,34	1. lieces plaknē	11 533,59	–



7.3. att. Modeļa bez bojājumiem (pa kreisi) un modeļa ar bojājumiem (pa labi) modu formas.
a – 1. lieces moda; b – 1. vērpes moda; c – 2. lieces moda.

8. SECINĀJUMI

Promocijas darbs ir oriģināls pētniecības projekts, kurā apskatīts jauna pieceja modālajai analīzei peridīnamikas teorijā. Jauns modālais risinātājs, kas var atrisināt peridīnamikas modālos uzdevumus, tika implementēts un optimizēts masīvi paralēlai aprēķinu videi. Ar to tika veiktas peridīnamikas modālās simulācijas, kurās modelis apskatīts deviņās dažādās plaisu konfigurācijās. Pēc tam rezultāti tajās pašās deviņās plaisu konfigurācijās tika iegūti ar galīgo elementu metodes palīdzību. Tika izgatavoti un testēti eksperimentālo testu paraugi, lai iegūto to mehāniskās un modālās īpašības. Peridīnamikas pašsvārstību frekvences un modu formas tika verificētas pret GE rezultātiem un validētas pret eksperimentu rezultātiem. Beigās tika demonstrēts PD modālās analīzes lietojums, to apvienojot ar noguruma bojājumu simulāciju. No šī pētījuma izriet vairāki secinājumi.

1. Izstrādātais modālais risinātājs tika optimizēts un var strādāt masīvi paralēlā aprēķinu vidē un atrisināt peridīnamikas modālos uzdevumus. Optimāla parametru izvēle ir atkarīga no konkrētā uzdevuma, optimizācija parādīja vairākas sakarības starp īpašvērtību risinātāja, lineārā risinātāja un priekškondicionētāja parametriem un simulāciju ilgumu un atmiņas patēriņu. Tās var izmantot par sākuma punktu, lai noteiktu optimālos parametrus citos gadījumos.
2. Peridīnamikas un GE rezultāti lieliski atbilda cits citam visās plaisu konfigurācijās. Starpība starp aprēķinātajām pašsvārstību frekvencēm bija starp 0,00 % un –4,00 %. Peridīnamikas pašsvārstību frekvences bija zemākas pie garāka horizonta. Tas ir izskaidrojams ar lielāku “virsma efektu”. PD rezultāti arī labi atbilda eksperimentu rezultātiem. Pašsvārstību frekvences bija $\pm 3,2$ % robežās no eksperimenta rezultātiem. Turklāt PD frekvenču nobīde bija līdzīga kā frekvenču nobīde GE un eksperimentālajās analīzēs. Lielākā atšķirība starp PD un GE frekvenču nobīdēm bija –1,38 un 1,30 procentpunkti attiecīgi T un S plaisu konfigurācijās, savukārt starp PD un eksperimenta frekvenču nobīdēm –1,47 un 1,95 procentpunkti attiecīgi T un S konfigurācijās. PD un GE modu formas cita citai labi atbilda un bija tādā pašā secībā katrā plaisu konfigurācijā. Arī PD un eksperimentu modu formas labi atbilda cita citai, kā arī modu formu izmaiņas ieviesto bojājumu dēļ bija līdzīgas abās analīzēs.
3. Tika apskatītas divas konverģences – δm un δ . δm konverģences pētījumā, pieaugot tīkla blīvumam, rezultāti asimptotiski tuvojās vienai vērtībai. Konverģence bija ātrāka nekā lineāra, taču lēnāka nekā kvadrātiska. Lielākoties konverģences pakāpe bija starp 1 un 2. Promocijas darbā tika parādīts, ka ar 625 000 punktu modeli tiek sasniegts asimptotiskais konverģences apgabals un – ar dažiem izņēmumiem – modeļos ar mazu tīkla blīvumu aprēķinātās frekvences ir zemākas, ja horizonts ir garāks. δ konverģence nebija asimptotiska un rādīja, ka atšķirība starp nelokālo un lokālo risinājumu, horizontam sarūkot, nesamazinās vienmērīgi.
4. Tika parādīts PD modālās analīzes implementācijas praktiskais lietojums. Modālais risinātājs tika apvienots ar peridīnamikas noguruma bojājumu simulāciju, lai demonstrētu, kā iespējams aplēst izmaiņas modālajās īpašībās noguruma bojājumu dēļ. Vispirms tika veikta modālā analīze, tad simulēti 870 000 noguruma cikli, un

vēlreiz atkārtota modālā analīze. Modu formas nerādīja manāmas pirms un pēc noguruma simulācijas, taču tika veikts tikai kvalitatīvs salīdzinājums, kvantitatīvs salīdzinājums ir ārpus šī promocijas darba robežām. Atšķirības starp vienas modas pašsvārstību frekvencēm bija robežās no $-2,91\%$ līdz $-0,45\%$. Tas parāda, ka noguruma simulācija radīja bojājumus, ko var izmērīt ar modālo analīzi. Šādus mērījumus var izmantot modeļu validācijā, kvalitātes nodrošināšanā rūpniecībā un konstrukciju bojājumu noteikšanā.