

CELL-TO-CELL MAPPING FOR DRAWING OF BASIN OF ATTRACTION

ŠŪNAINA ATTĒLOJUMA METODE PIEVILKŠANAS APGABALU
KONSTRUĒŠANAI

Igor Schukin, lecturer

Riga Technical University, Daugavpils branch of RTU

Address: 90 Smilshu Street, Daugavpils, LV-5410, Latvia

Phone: +371 65442466

E-mail: igor@df.rtu.lv

Atslēgas vārdi: nelineāra dinamiska sistēma, pievilkšanas apgabals, šūnains attēlojums

1. Ievads

Viens no sarežģītu nelineāru dinamisku sistēmu analīzes uzdevumiem to daudzrežīmu darbībā ir pamatnosacījumu noteikšana, kas noved pie tā vai cita režīma. Risinot šo uzdevumu, fāžu plaknē tiek izcelti pamatnosacījumu apgabali, kas noved pie viena režīma, t.i. šī režīma pievilkšanas apgabala. Viena no pievilkšanas apgabalu konstruēšanas metodēm ir šūnaina attēlojuma metode (*cell-to-cell mapping*). Šī metode ir attiecināma pie „rupja spēka” („*brute force*”) klases un tās pielietošana prasa ievērojamu mašīnlaika tēriņu. Klasiskās metodes īstenošanā ir ieviestas dažas izmaiņas, kas dod iespēju paātrināt tās darbu.

Visu metožu pamatā, kas izmantojamas dinamisku sistēmu analīzei programmā *Spring*, ir diferenciālvienādojumu skaitliska risinājuma rezultāti vai, citiem vārdiem, modelēšanas rezultāti. Pie tam modeļa aprakstā tiek izmantotas fāžu koordinātes, kas ir atkarīgas no laika, un parametri, kas neizmainās laikā. Modelēšanas rezultātā no dotajiem sākuma nosacījumiem rodas fāžu trajektorija, ko apraksta divas funkcijas $x(t)$ un $v(t)$.

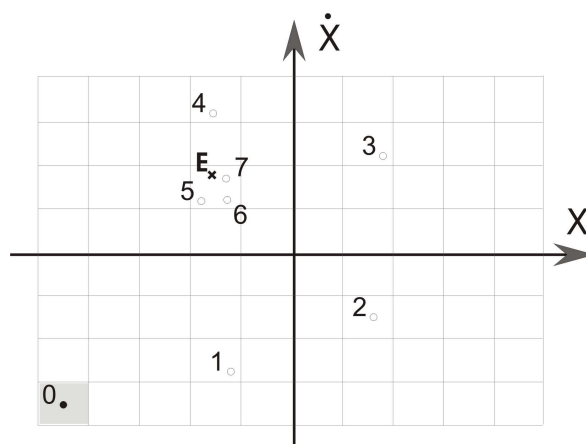
Nākamais uzdevums ir pārejas procesa atdalīšana no stacionāra režīma. Aplūkojamā uzdevuma ietvaros notiek tikai stacionāra režīma analīze, kaut arī informācija, kas ir saņemama pārejas procesa aprēķina laikā, turpmāk tāpat var tikt izmantota papildus analīzei. Tālākai analīzei tiek izmantota nevis visa fāžu trajektorija, bet gan tikai tās atsevišķie punkti. Parasti izmanto pa vienam punktam no katra perioda piespiedošā spēka tā nulles fāzē. Tāds attēlojums tiek dēvēts par Puankarē (Poincare) attēlojumu. Fāžu plaknē Puankarē attēlojums ļauj vienkāršāk nodalīt pāriešanas procesu no stacionāra periodiska režīma. Stacionāram periodiskam režīmam atbilst nekustīgs punkts uz diskrēta attēlojuma plaknes.

Pievilkšanas apgabalu konstruēšanas uzdevumam ir jēga tikai dažu stacionāru režīmu sistēmā noteiktu parametru vērtējumu esamības gadījumā, t.i., daudzrežīmu gadījumā. Piemēram, no diviem sākuma nosacījumiem pārejas procesu beigās var nonākt pie stacionāriem režīmiem ar atšķirīgām amplitūdām un periodiem. Uz diskrētas Puankarē plaknes daudzrežīmu gadījumā izceļas daži nekustīgi punkti, kas atbilst atšķirīgiem periodiskiem režīmiem. Tādējādi fāžu

plaknes katram punktam var noteikt vienu no stacionāriem režīmiem, ar kuru noslēgsies fāžu trajektorija, kas iesākās šajā punktā. Ja izkrāso punktus atkarībā no stacionāriem režīmiem, kuriem tie atbilst, iegūs pievilksanas apgabalu karti.

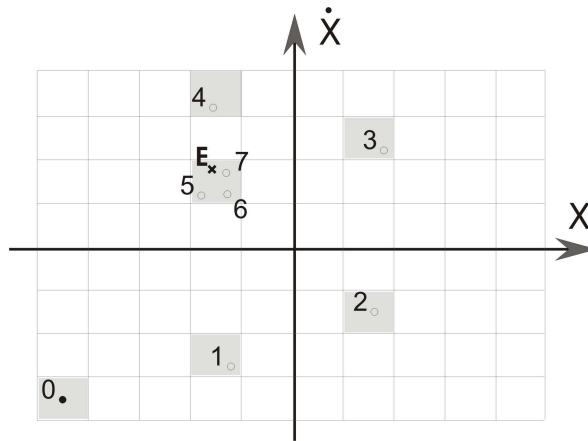
2. Šūnaina attēlojuma metode

No iepriekš teiktā izriet pievilksanas apgabalu uzbūves pamatmetode. Fāžu izplatījuma pētāmais apgabals sadalās sietā ar pastāvīgiem soļiem pa asīm (1. attēls). Katrai šūnai aprēķina fāžu trajektoriju, kas sākas no šūnas centra. Pārejas procesa beigās izejošā šūna ir aizkrāsājama saskaņā ar stacionāro beigu režīmu. Šī metode pieder pie „rupja spēka” (*“brute force”*) klases metodēm, un tai tāpat kā visām šīs klases metodēm ir liela noturība, bet tā prasa nozīmīgu mašīnlaiku. Pievilksanas apgabalu detalizētas kartes konstruēšanas laiks var būt mērāms dienās vai pat nedēļās.



1. attēls. Šūnaina attēlojuma klasiskās metodes piemērs

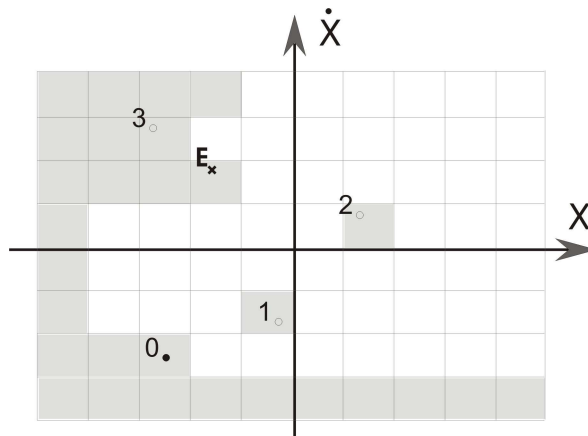
Viens no pievilksanas apgabalu kartes konstruēšanas procesa paātrināšanas veidiem ir pārejas procesa aprēķinos saņemtās informācijas izmantošana. No acīmredzamiem apsvērumiem izriet, ka pārejas procesa diskrēta attēlojuma punkti pieder tam pašam pievilksanas apgabalam, kam sākuma nosacījumu sākumpunkts (2. attēlā). T.i., pārejas procesa un stacionāra režīma definēšanas aprēķina nobeigumā var aizkrāsot ne tikai sākuma šūnu, bet arī visas šūnas, kas atbilst pārejas procesa punktiem. Tādu pieeju nosauksim par asti (*tail*). Ilgstošos pārejas procesos (piemēram, sistēmām ar mazu disipāciju) astes izmantošana ļauj būtiski paātrināt analīzi.



2. attēls. Šūnaina attēlojuma metodes piemērs, ievērojot pārejas procesa punktus

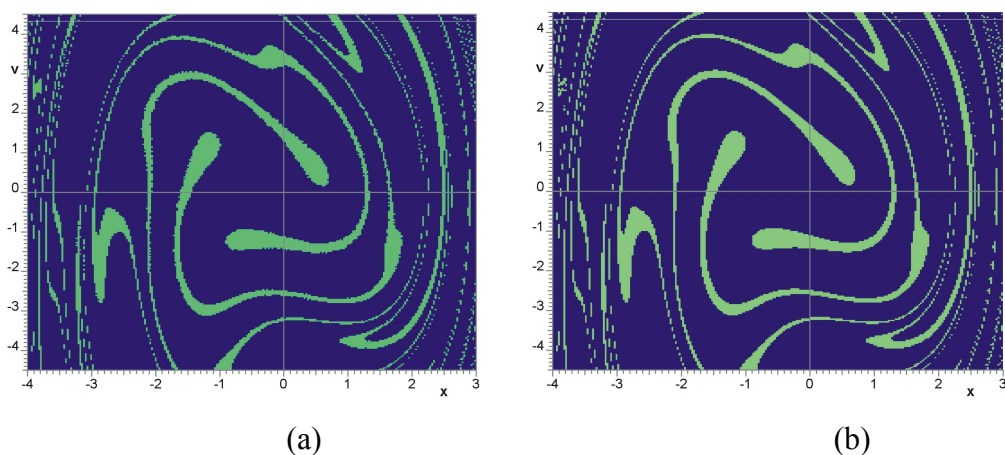
Vēl viens acīmredzams apsvērumš ļauj paātrināt aprēķinu, izmantojot jau aprēķināto kartes daļu. Var saīsināt pārejas procesa aprēķinu un pārtraukt to, nesagaidot stacionāru režīmu, ja kārtējais punkts nonāk jau aprēķinātājā E režīma pievilkšanas apgabalā (3. attēlā). Šajā gadījumā pēc definīcijas pārejas process noslēgsies ar stacionāru E režīmu. Tādu pieeju nosauksim par saistīšanu (*attract*).

Vairumā gadījumu astes un saistīšanas algoritmu izmantošana nenoved pie pievilkšanas apgabalu kartes sagrozījuma, toties būtiski paātrina aprēķina procesu.



3. attēls. Šūnaina attēlojuma metodes piemērs ar pievilkšanu

Piemēram, kartes, kas ir parādītas 4. attēlā, ir aprēķinātas ar un bez paātrinājuma algoritmiem, un tām nav vizuālas atšķirības. Bet, kā tiks parādīts tālāk, sarežģītajos gadījumos paātrinātie algoritmi var sagrozīt kopainu.



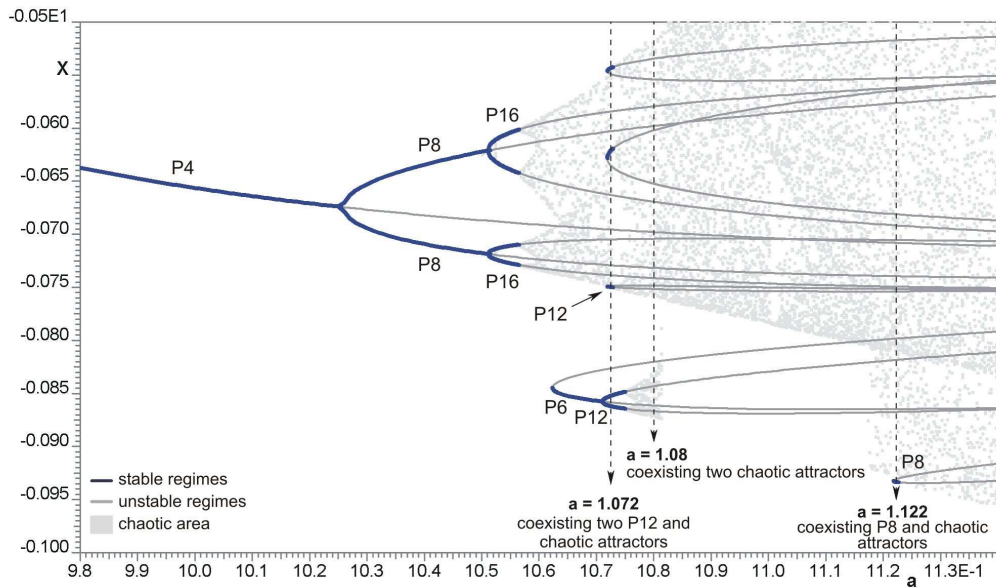
4. attēls. Pievilšanas apgabalu karšu salīdzinājums, izmantojot klasisko metodi (a) un ar paātrināto algoritmu (b)

3. Pievilšanas apgabalu karšu piemēri

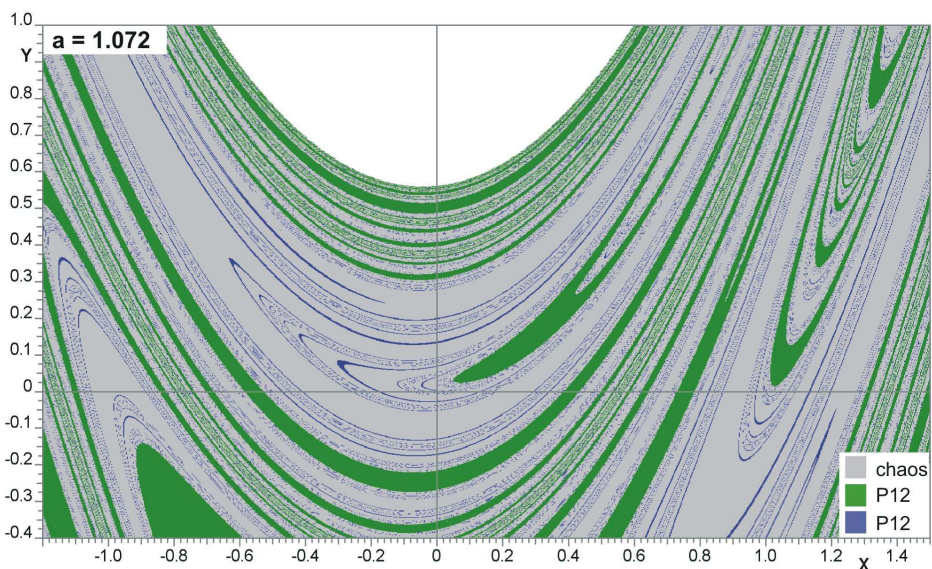
Pāriesim pie pievilšanas apgabalu karšu konstruēšanas piemēru izklāsta atšķirīgām sistēmām. Pirmais piemērs ir Henona diskretā sistēma, kas ir aprakstāma ar rekursīviem vienādojumiem.

$$\begin{cases} x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + y_i \\ y_{i+1} = bx_i \end{cases} \quad (1)$$

Pievilšanas apgabalu pētījumam izvēlēts parametra a diapazons, kurā ir iespējama daudzrežīmu darbība. Tas ir diapazons a no 1 līdz 1.2. Izvēlētajā parametra diapazonā ir atrastas dažas parametra nozīmes, kas noved pie daudzrežīmu svārstībām (5. attēlā). Pie $a = 1.072$ koeksistē divi periodiski režīmi 12. kārtā un haotisks atraktors, $a = 1.08$ – divi atšķirīgi haotiskie atraktori, $a = 1.122$ – periodisks režīms 8. kārtā un haotisks atraktors. Palielinātais fragments ilustrē pievilšanas apgabalu fraktālo struktūru. 6. attēlā ir parādīts periodisku režīmu un haotiska atraktora diskreta attēlojuma nekustīgu punktu kārtojums.



5. attēls. Henona vienādojuma bifurkācijas diagramma. Ilustrētas daudzrežīmu iespējas

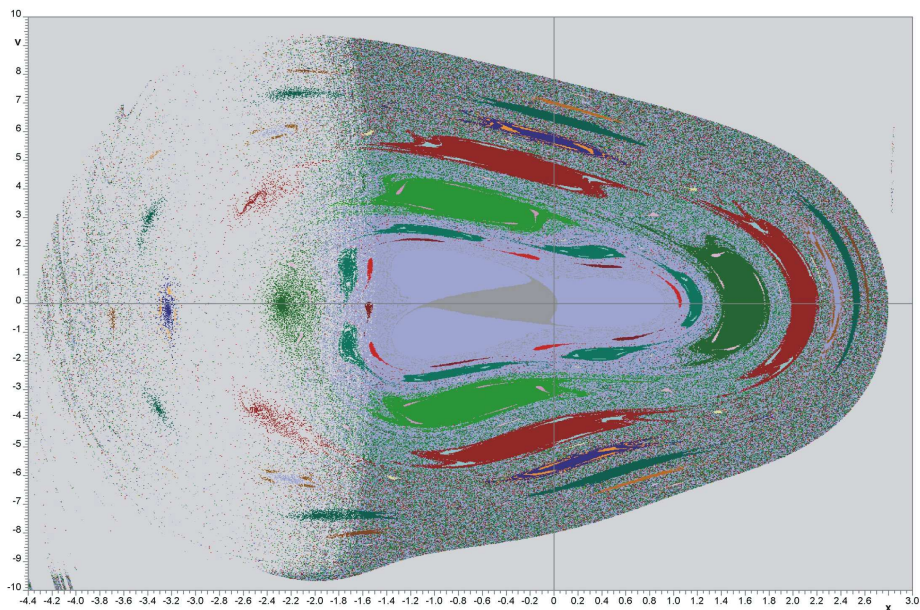


6. attēls. Henona vienādojuma pievilksanas apgabalu karte (a = 1.072, b = 0.3)

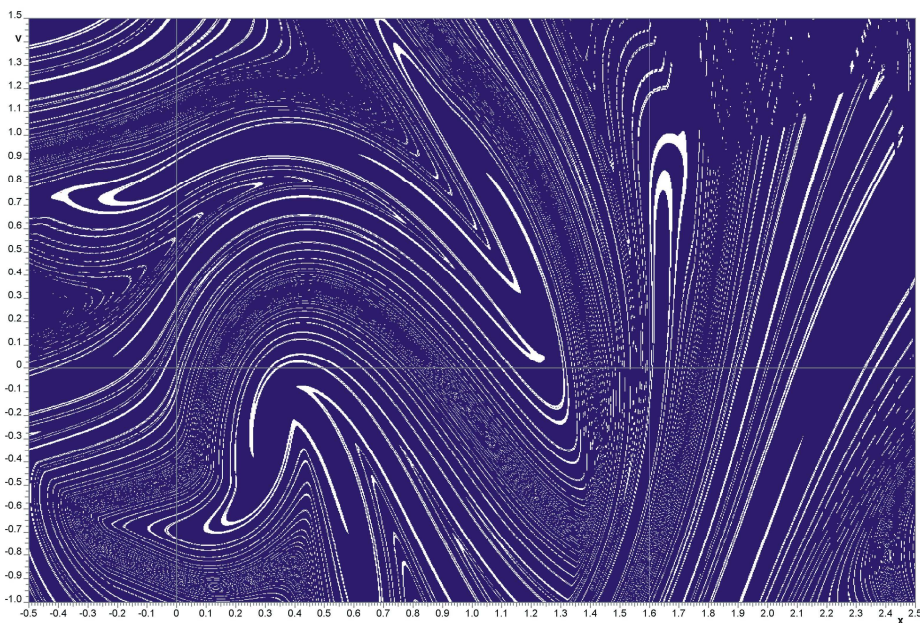
Otrais piemērs skar sistēmu ar kuba elastīgu raksturojumu.

$$\ddot{x} + b\dot{x} + (x + x^3) = h \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Pie izvēlētās parametru nozīmes šai sistēmā eksistē milzīgs atšķirīgu periodisku režīmu daudzums. Sistēmā ir atrasti 27 periodiski režīmi. To nekustīgie punkti ir parādīti 7. attēlā. Parādīti divdesmit septiņu atšķirīgu periodisku režīmu pievilksanas apgabali un nekustīgu punktu kārtojums.



7. attēls. Kuba vienādojuma pievilšanas apgabalu karte ($b = 0.005$, $h = 6$, $\omega = 4$, $\varphi = 0$)



8. attēls. Bilineāra vienādojuma pievilšanas apgabalu karte
($b = 0.05$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $h = 1$, $\omega = 0.82$)

Pēdējais piemērs skar sistēmu ar bilineāru elastīgu raksturojumu.

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \begin{cases} c_1 x, & \text{if } x \leq 0 \\ c_2 x, & \text{if } x > 0 \end{cases} = h \cos(\omega t) \quad (3)$$

8. attēlā ir parādīti periodiska un haotiska atraktora pievilšanas apgabali, kas koeksistē pie dotās parametru nozīmes. Šo pievilšanas apgabalu fraktālā struktūra neļauj vienlaikus izmantot aprēķina paātrināšanai astes (*tail*) un saistīšanas (*attract*) algoritmus.

Literatūra

1. Ueda Y. The Road to Chaos. Aerial Press Inc. - Santa Cruz, 1993 - 223 p.
2. Zakrzhevsky M., Ivanov Y., Frolov V., Schukin I., Smirnova R. NLO: Software for Local and Global Analysis of Nonlinear Oscillations. // In: Proceedings of the International Symposium "Analysis and Synthesis of Nonlinear Systems in Mechanics" - Riga, 1996 - p. 172-179.
3. Guttalu R.S. Cell Mapping Analysis of Hydrodynamic Instability Model. // In: Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillations Conference - Prague, 1996, v. 2 - p. 67-70.
4. Hsu C. S. Cell-to-Cell Mapping: A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems. Springer-Verlag. - New York, 1987.
5. Щукин И. Развитие методов и алгоритмов моделирования задач нелинейной динамики. Бифуркации, хаос и редкие аттракторы. Диссертация - Рига-Даугавпилс, РТУ, 2005 – 205с.

Ščukins I. Šūnaina attēlojuma metode pievilksanas apgabalu konstruēšanai

Viens no sarežģītu nelineāru dinamisku sistēmu analīzes uzdevumiem to daudzrežīmu darbībā ir pamatnosacījumu noteikšana, kas noved pie tā vai cita režīma. Risinot šo uzdevumu fāžu plaknē tiek izcelti pamatnosacījumu apgabali, kas noved pie viena režīma, t.i., šī režīma pievilksanas apgabala. Fāžu plaknes katram punktam var noteikt vienu no stacionāriem režīmiem, ar kuru noslēgsies fāžu trajektorija, kas iesākās šajā punktā. Ja izkrāso punktus atkarībā no stacionāriem režīmiem, kuriem tie atbilst, iegūs pievilksanas apgabalu karti. Viena no pievilksanas apgabalu konstruēšanas metodēm ir šūnaina attēlojuma metode (cell-to-cell mapping). Šī metode ir attiecināma pie „rupja spēka” (“brute force”) klases un tās pielietošana prasa ievērojamu mašīnlaiku. Klasiskās metodes īstenošanā ir ieviestas dažas izmaiņas, kas dod iespēju paātrināt tās darbu. Rakstā doti pievilksanas apgabalu konstruēšanas algoritmu apraksti un daudzrežīmu analīzes rezultāti trīs sistēmās: Henona diskrētajā sistēmā, sistēmā ar kuba elastīgu raksturojumu un sistēmā ar bilineāru elastīgu raksturojumu.

Schukin I. Cell-to-cell mapping for drawing of basin of attraction

One of the tasks of a complex nonlinear dynamic system analysis in the case of multistability there is determination of initial conditions, corresponding to one or another oscillation regime. At the decision of this task the areas of initial conditions corresponding to one oscillation regime are selected on a phase plane, i.e. constructing of basins of attraction of this regime. One of the basins of attraction construction methods is a method of cellular mapping (cell-to-cell mapping). This method behaves to the class of “brute force” and its application requires the considerable expenses of machine time. Some changes, allowing accelerating his work, are made in realization of classic method. In the paper descriptions of algorithms of basins of attraction construction and results of multistability analysis are presented for three systems: discrete system of Henon, system with cube elastic force, system with bilinear elastic force.

Щукин И. Метод ячеистого отображения для построения областей притяжения

Одной из задач при анализе сложных нелинейных динамических систем в случае многорежимности является определение начальных условий, приводящих к тому или иному режиму. При решении этой задачи на фазовой плоскости выделяются области начальных условий приводящих к одному режиму, т.е., области притяжения этого режима. Одним из методов построения областей притяжения является метод ячеистого отображения (cell-to-cell mapping). Этот метод относится к классу “brute force” и его применение требует значительных затрат машинного времени. В реализацию классического метода внесены некоторые изменения, позволяющие ускорить его работу. В статье приводятся описания алгоритмов построения областей притяжения и результаты анализа многорежимности в трех системах: в дискретной системе Хенона, в системе с кубической упругой силой, в системе с билинейной упругой силой.