ELEKTROMAGNĒTISKO IERĪČU MAGNĒTISKO SISTĒMU UN TO ELEMENTU OPTIMIZĀCIJAS METODOLOĢISKIE PAMATI

METODOLOGICAL BASES OF OPTIMIZATION FOR MAGNETIC SYSTEM OF ELECTROMAGNETIC DEVICES AND THEIR ELEMENTS

A. Zviedris, R. Elmanis-Helmanis, A. Podgornovs

Atslēgas vārdi: optimizācija, elektromagnētiskās ierīces, magnētiskās sistēmas

Ievads

Magnētiskā sistēma ir jebkuras elektromagnētiskas ierīces (elektromašīnas, transformatora, elektromagnētiskā komutācijas aparāta u. tml.) raksturīga sastāvdaļa. To veido no feromagnētiska materiāla izgatavotu elementu kopums un daudzos gadījumos tā ietver arī nelielas gaisa spraugas.

Magnētiskā sistēma (šaurākā nozīmē to sauc arī par magnētvadu) paredzēta magnētiskās plūsmas koncentrēšanai, kā arī magnētiskā lauka vēlāmā sadalījuma nodrošināšanai.

Magnētiskās sistēmas konstruktīvais izveidojums un tās atsevišķu elementu forma un ģeometriskie izmēri būtiski ietekmē ierīces elektromagnētiskos raksturlielumus, kā arī tās tehniski ekonomiskos rādītājus.

Problēmas, kas saistītas ar magnētisko sistēmu un tās atsevišķu elementu izvēli, projektēšanu un izveidošanu visaktuālākas ir tieši dažādos elektroenerģijas pārveidotājos. Šādiem pārveidotājiem pieskaitāmas rotējošās elektromašīnas, transformatori, kā arī citas statiskas elektromagnētiskas ierīces, piem., magnētiskie pastiprinātāji, reaktori, u. tml. Tajā pašā laikā magnētisko sistēmu optimizācijas metodoloģiskie pamati, kā arī matemātiskais aparāts ir izmantojms arī visdažādākajām citām elektromagnētiskām ierīcēm.

Elektromašīnu un transformatoru magnētisko sistēmu galvenās īpatnības

Elektromašīnu un transformatoru magnētisko sistēmu izveidojums var būt ļoti daudzveidīgs un tas atkarīgs no vairākiem faktoriem, no kuriem galvenie ir:

- mašīnas tips, piem., līdzstrāvas mašīna, sinhronmašīna, asinhronmašīna;
- nominālie parametri, piem., jauda, rotācijas frekvence, fāžu skaits;
- materiāls un ražošanas tehnoloģija.

Rotējošās elektromašīnās parasti magnētiskā sistēma sastāv no vairākām konstruktīvi atdalītām daļām – statora un rotora. Savukārt, katra no šīm daļām var sastāvēt no vairākiem elementiem, piem., līdzstrāvas mašīnas stators no poliem un statnes. Atsevišķos gadījumos magnētiskās sistēmas daļas, kas konstruktīvi veido vienu veselumu, var tikt uzskatītas kā sastāvošas no atsevišķiem funkcionālā ziņā dažādiem elementiem. Tādas daļas, piem., ir transformatora magnētvada stieņi (magnētvada daļas, uz kurām novietotas tinuma spoles), un jūgi (magnētvada daļas, kas savieno stieņus, veidojot noslēgtu magnētisko ķēdi).

No funkcionālā viedokļa magnētiskās ķēdes atsevišķās daļas nosacīti var iedalīt aktīvajās un neaktīvajās daļās. Aktīvās daļas ir tās daļas, uz kurām novietotas tinumu spoles, bet neaktīvās

daļas - uz kurām šādu spoļu nav. Tā, piem., līdzstrāvas mašīnu un sinhronmašīnu poli un transformatora magnētserdes stieņi šajā nozīmē ir aktīvās daļas, bet līdztrāvas mašīnas vai sinhronmašīnas statora jūgi, kā arī transformatora magnētserdes jūgi ir neaktīvās daļas.
Tinumu spoles, kas paredzētas magnētiskā lauka radīšanai (kaut gan šīs spoles nav magnētvada daļas), magnētisko sistēmu optimizācijas uzdevumos jāaplūko kopsaistībā ar magnētiskās ķēdes feromagnētiskajiem elementiem, jo spoļu izmēri ir atkarīgi no serdes izmēriem un otrādi.

Optimizācijas uzdevuma nostādne

Optimizācija ir dažādu tehnisku un matemātisku problēmu labākā atrisinājuma meklēšanas metodes un procedūras. Tā ietver matemātiskos rezultātus un skaitliskās metodes, kas orientētas uz vislabākā varianta atrašanu un identifikāciju alternatīvu daudzveidībā. Optimizācijas process ir visas inženierdarbības pamatā, jo klasiskās inženieru funkcijas ir projektēt jaunas efektīvākas un lētākas tehniskā sistēmas un ierīces un izstrādāt pastāvošo sistēmu funkcionēšanas kvalitātes paaugstināšanas metodes. Optimizācijas metodes ļauj izvēlēties vislabāko variantu bez tiešas liela skaita visu iespējamo variantu pārbaudes un novērtēšanas. Tās ir cieši saistītas ar matemātisku metožu, loģisku procedūru un algoritmu izmantošanu, realizējot tos ar datortehnikas līdzekļiem.
Jebkuras optimizācijas pamatuzdevums ir noteikt ierīces vai procesa parametrus, kuri, vadoties no iepriekš pieņemtiem kritērijiem, nodrošina vislabākos funkcionēšanas apstākļus.
Praksē sastopamie optimizācijas uzdevumi parasti ir saistīti ar ierīces vai procesa optimizāciju. Ierīces optimizācijas gadījumā optimizācijas uzdevums reducējas uz ierīces parametru (ģeometrisko izmēru, elektrisko un magnētisko lielumu u. tml.) tādu izvēli, kas nodrošinātu kaut kāda šīs ierīces raksturlieluma vislielāko vai vismazāko vērtību, piem., minimālo masu, maksimālo jaudu, minimālās izmaksas u. tml.
Lai izmantotu optimizācijas teorijas matemātiskos rezultātus un skaitliskās metodes konkrētu inžniertehnisku uzdevumu risināšanai, iepriekš jāveic noteiktas secīgas darbības, kas būtībā ir optimizācijas uzdevuma nostādne. Optimizācijas uzdevuma nostādne ietver nepieciešamo nosacījumu formulēšanu un realizāciju optimizācijas uzdevuma sagatavošanas procesā [1]. Lai veiktu optimizāciju, ir nepieciešams:
- noteikt optimizācijai paredzētās sistēmas robežas;
- noteikt kvantitatīvo kritēriju (raksturkritēriju), uz kura pamata var veikt alternatīvo variantu analīzi, lai noskaidrotu vislabāko no tiem;
- izvēlēties iekšsistēmas mainīgos, kuri tiks izmantoti, lai noteiktu variantu raksturlielumus un veiktu to identifikāciju;
- izveidot matemātisko modeli, kas atspoguļo sakarības starp mainīgajiem.

Šo darbību secība tad arī veido optimizācijas uzdevuma saturu. Optimizācijas uzdevuma korekta nostādne ir pamats pētījuma panākumam un vairāk asociējas ar mākslu, nekā ar eksaktām zinātnēm. Uzdevuma nostādnes prasme veidojas praktiskajā darbībā un uz veiksmīgi īstenotu izstrādājumu piemēriem, kā arī pamatojas uz precīzu prioritāšu izpratni.
Aplūkosim augstāk minēto darbību saturu un būtību sīkāk.
Optimizējamās sistēmas robežu noteikšana. Šajā kontekstā pētāmā sistēma tiek aplūkota kā apakšsistēma, t. i., kā citas lielākas ārējas sistēmas izolēta daļa. Veicot uzdevuma analīzi, tiek pieņemts, ka savstarpējās sakarības starp pētāmo sistēmu un ārējo sistēmu ir fiksētas kaut kādā izvēlēto priekšstatu līmenī. Tā, piemēram, optimizējot līdzstrāvas mašīnas induktora magnētisko sistēmu, to uzskata par apakšsistēmu, kuras ārējā sistēma (austāka līmeņa sistēma) ir visa mašīna kopumā ar iepriekš noteiktiem un zināmiem enkura galvenajiem

izmēriem (diametru, garumu, gaisa spraugas platumu). Dažos gadījumos var izrādīties, ka sistēmas sākotnējā robeža ir pārāk stingra. Tādēļ, lai pilnībā veiktu pētāmās sistēmas analīzi, var rasties nepieciešamība paplašināt šīs noteiktās robežas, ieslēdzot citu apakšsistēmu, kas būtiski ietekmē pētāmās sistēmas funkcionēšanu. Protams, sistēmas robežu paplašināšana palielina šīs daudzkomponenšu sistēmas apjomu, padara to sarežģītāku un tādēļ apgrūtina analīzi. Acīmredzot, katrā konkrētā gadījumā, cik vien tas iespējams, jācenšas sarežģītas sistēmas sadalīt nosacīti nelielās apakšsistēmās, kuras var pētīt atsevišķi. Tomēr tādā gadījumā jābūt pilnīgai pārliecībai, ka šāda dekompozīcija nenoved pie reālās situācijas pārmērīgas vienkāršošanas.

Raksturkritērija noteikšana. Inženiertehniskos uzdevumos parasti izvēlas ekonomiska rakstura kritērijus. Tomēr šādu kritēriju iespējamā formulējuma spektrs ir diezgan plašs, piem., masa, gabarīti, materiālu izmaksas, zudumi, lietderības koeficients. Citos gadījumos par pamatu kritērija izvēlei var ņemt tehnoloģiskos faktorus, vai arī dažādus tehniskos parametrus, piem., griezes momentu, patērēto jaudu, sasiluma temperatūru u. tml. Neatkarīgi no tā, kādu kritēriju izvēlas optimizācijā, vislabākajam variantam vienmēr jāatbilst šī izvēlētā kritērija minimālajai vai maksimālajai vērtībai. Svarīgi atzīmēt, ka, nosakot optimumu, var izmantot tikai vienu kritēriju, jo nav iespējams iegūt risinājumu, kas, piem., vienlaikus nodrošinātu ierīces minimālo masu un minimālos enerģijas zudumus. Šeit atkal sastopamies ar reālās situācijas būtisku vienkāršošanu, jo daudzos praktiskos gadījumos būtu ļoti vēlams rast risinājumu, kas izrādītos vislabākais no vairāku un dažādu kritēriju viedokļa. Tomēr pastāv iespējas daļēji šo pretrunu atrisināt. Viena no šādām iespējām ir tāda, ka kādu no kritērijiem izvēlas par primāro, bet pārējos uzskata par sekundāriem. Šajā gadījumā optimizācijas primāro kritēriju izvēlas sistēmas funkcionēšanas novērtēšanai, bet sekundārie kritēriji rada optimizācijas uzdevuma ierobežojumus, kas nosaka attiecīgo raksturlielumu izmaiņu diapazonu no minimālās līdz maksimālajai pieļaujamai vērtībai. Otra iespēja ir ieviest kompleksos vai relatīvos kritērijus, kuri ļauj novērtēt sistēmas optimumu vienlaikus no vairākiem viedokļiem. Piem., ja nepieciešams, lai ierīce attīstītu iespējami lielāku jaudu un vienlaikus tai būtu iespējami mazāka masa, par kritēriju var izvēlēties jaudu uz masas vienību.

Optimizējamās sistēmas mainīgo izvēle. Optimizācijas uzdevuma nostādnes trešajā posmā ir jāveic mainīgo izvēle, ar kuriem adekvāti aprakstāmi ierīces pieļaujamie varianti. Vispārīgā gadījumā var būt liels skaits šo mainīgo un tie var būt ļoti daudzveidīgi, piemēram, ierīces ģeometriskie izmēri, materiālu īpašību raksturojumi (fizikālas konstantes, raksturlīknes u. c. parametri), elektromagnētiskās noslodzes (magnētiskā indukcija, strāvas blīvums), dažādi ierīci raksturojoši fizikālie lielumi (spriegums, strāva, pretestība, magnētiskā plūsma, rotācijas frekvence), elektromagnētisko ierīču specifiski konstruktīvie parametri (tinuma vijumu skaits, tinuma solis, polu skaits). Svarīgi atzīmēt, ka visiem mainīgajiem, ar kuriem tiek aprakstīti sistēmas funkcionēšanas apstākļi, ir jābūt savstarpēji neatkarīgiem.

Neatkarīgo mainīgo izvēlē jāievēro vairāki svarīgi apstākļi.

Pirmkārt, jānoskaidro atšķirība starp dažādiem mainīgajiem, kuru vērtības var mainīties plašā diapazonā, un mainīgajiem, kuru vērtības ir fiksētas un noteiktas ar ārējiem apstākļiem. Tālāk ir svarīgi noteikt atšķirības starp tiem sistēmas mainīgajiem, kuru vērtības var uzskatīt par nemainīgām, un tādiem parametriem, kuru vērtības var mainīties ārēju vai nekontrolējamu faktoru ietekmē.

Otrkārt uzdevuma nostādnē jāfiksē visi galvenie mainīgie, kas ietekmē ierīces raksturlielumus vai sistēmas funkcionēšanu. Par neatkarīgiem mainīgajiem jāizvēlas tādi mainīgie, lai svarīgākie tehniski ekonomiskie risinājumi atspoguļotos uzdevuma formulējumā.

Treškārt, būtisks faktors, kas ietekmē mainīgo izvēli ir detalizācijas līmenis sistēmas izpētē. Ļoti svarīgi ir izskatīt visus neatkarīgos mainīgos, bet arī ne mazāk svarīgi ir nepārslogot

uzdevumu ar liela skaita nebūtiskām detaļām. Izvēloties neatkarīgos mainīgos, lietderīgi izskatīt tikai tos mainīgos, kuri būtiski ietekmē sistēmas analīzei izvēlētos raksturkritērijus.
Sistēmas matemātiskā modeļa izveide. Pēdējais posms optimizācijas uzdevuma nostādnē ir sistēmas matemātiskā modeļa izveidošana. Šim modelim ir jāatspoguļo mijsakarības starp neatkarīgajiem mainīgajiem un mainīgo ietekme uz mērķa sasniegšanas pakāpi, ko nosaka optimizācijas raksturkritērijs. Principā optimizāciju var veikt, eksperimentējot ar sistēmu tieši. Šim nolūkam nepieciešams fiksēt dažādas mainīgo vērtības, veikt sistēmas funkcionēšanas novērojumus un, reģistrējot sistēmas raksturojumus, novērtēt raksturkritērija vērtības. Pēc tam, izmantojot optimizācijas metodes, var izdarīt šo mainīgo korekciju un turpināt eksperimentu sēriju. Tomēr praksē optimizācijas pētījumus parasti veic, izmantojot vienkāršotus priekšstatus par sistēmu, t. i., aprakstot šo sistēmu ar tuvinātām matemātiskām sakarībām. Tas nozīmē, ka reālas sistēmas vietā analīzei tiek pakļauts tās matemātiskais modelis, kas iegūts, izdarot virkni pieņēmumu un vienkāršojumu. Modeļa izmantošanu attaisno tas apstāklis, ka eksperimentiem ar reālām sistēmām parasti nepieciešams liels līdzekļu un laika patēriņš. Vispārīgā gadījumā modeļa struktūra ietver ierīci vai procesu aprakstošos pamatvienādojumus. Tā, piem., risinot magnētisko sistēmu optimizācijas uzdevumus, matemātiskā modeļa veidošanā var izmantot elektromagnētiskā lauka jeb Maksvela vienādojumus [2] vai magnētisko ķēžu teorijas pamatsakarības. Pēdējā gadījumā modelis ir vienkāršāks un līdz ar to ir vienkāršāks viss optimizācijā izmantojamais matemātiskais aparāts. Jebkurā gadījumā modelim jāsatur visa informācija, ko izmanto ierīces vai procesa aprēķinos. Matemātiskā modeļa izveide bieži vien ir diegan darbietilpīgs un vienlaikus ļoti atbildīgs process, kurā nepieciešama izvērtējamās sistēmas specifisko īpatnību precīza fizikālā izpratne.

Optimizācijas uzdevumu struktūra

Neraugoties uz to, ka optimizācijas uzdevumi attiecas uz ļoti daudzām un dažādām inženiertehniskajām nozarēm, tiem ir kopīga vispārējā struktūra. Visus šos uzdevumus var klasificēt kā vektoriāla N dimensionāla argumenta $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ funkcijas $f(\bar{x})$ minimizācijas uzdevumus. Turklāt vektora $\bar{x}$ komponentes apmierina vienādojumu sistēmu

$$u_k(\bar{x}) = 0\,,$$

nevienādību sistēmu

$$v_j(\bar{x}) > 0\,,$$

kā arī šis komponentes ir ierobežtas ar apakšējo $x_{i\min}$ un augšējo $x_{i\max}$ robežu, t. i.,
$x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max}$.
Funkciju $f(\bar{x})$ optimizācijas teorijā sauc par mērķfunkciju.
Vispārīgā gadījumā optimizācijas uzdevumu var formulēt šādi: minimizēt funkciju $f(\bar{x})$, ja ir spēkā ierobežojumi

$$u_k(\bar{x}) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,K\,, \tag{1}$$

$$v_j(\bar{x}) > 0 \qquad j = 1,2,\ldots,J\,, \tag{2}$$

$$x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max} \qquad i = 1,2,\ldots,I\,. \tag{3}$$

Šādu uzdevumu sauc par nosacītās optimizācijas uzdevumu. Ja uzdevums nesatur ierobežojumus, t. i., $K = J = 0$ un $-\infty \le x_i \le +\infty$, tad to sauc par beznosacījumu optimizācijas uzdevumu.
Piem., var būt šāda optimizācijas uzdevuma struktūra: minimizēt trīs argumentu (N = 3) mērķfunkciju

$$f(\bar{x}) = x_1 x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 + \frac{x_1}{x_2 + x_3}$$

ar diviem ierobežojumiem (K = 2), kas izteikti ar vienādojumiem

$$u_1(\bar{x}) = x_1 x_2 - A = 0\,,$$
$$u_2(\bar{x}) = x_1 + 2x_3 - B = 0\,,$$

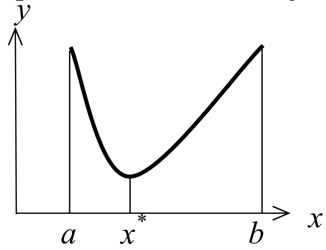
trīs ierobežojumiem (J = 3), kas izteikti ar nevienādībām

$$v_1(\bar{x}) = x_1 + x_2 > 0\,,$$
$$v_2(\bar{x}) = x_2 + x_3 > 0\,,$$
$$v_3(\bar{x}) = x_1 + x_3 > 0\,,$$

un argumentu x_1, x_2 un x_3 apakšējām un augšējām robežām, kas izteiktas kā

$$a_1 \le x_1 \le b_1\,,$$
$$a_2 \le x_2 \le b_2\,,$$
$$a_3 \le x_3 \le b_3\,.$$

Optimizācijas uzdevumi, kuros optimālitātes raksturkritērijs izteikts ar viena argumenta funkciju (viendimensijas optimizācijas uzdevumi), pieskaitāmi vienkāršākā tipa uzdevumiem. Tomēr šādu uzdevumu analīze optimizācijas pētījumos ieņem svarīgu vietu gan teorētiskajā, gan praktiskajā ziņā. Tas saistīts ar to, ka tieši šādi uzdevumi ļoti bieži risināmi praksē, kā arī ar to, ka viendimensijas optimizācijas metodes bieži lieto analizējot apakšuzdevumus, kuri rodas iteratīvās procedūrās, kas orientētas uz vairākdimensijas uzdevumu atrisināšanu. Teorētisko un praktisko viendimensijas optimizācijas uzdevumu svarīgums ir veicinājis liela skaita algoritmu izstrādi šādu uzdevumu risināšanai [1].
Viendimensijas optimizācijas uzdevumu risināšanas metožu klasifikācija būtībā balstās uz dažādām viena argumenta funkcijas īpašībām.
Viena no šādām īpašībām ir funkcijas unimodalitāte.
Funkcija $f(x)$, kas sasniedz savu minimumu punktā $x = x^*$ un kura ir monotona uz abām pusēm no minimuma punkta, sauc par unimodālu funkciju (1. att.).



1. attēls. Unimodāla funkcija

Funkcija $f(x)$ intervālā [a; b] ir unimodāla vienīgi tajā gadījumā, ja x^* ir vienīgais minimuma punkts šajā intervālā, t. i., ja izpildās šādi nosacījumi:

$$x^* < x_1 < x_2 \ , \ f(x^*) < f(x_1) < f(x_2)$$

un

$$x^* > x_1 > x_2 \ , \ f(x^*) > f(x_1) > f(x_2) .$$

Optimalitātes kritēriji

Analizējot optimizācijas uzdevumus, parasti rodas divi vispārēja rakstura jautājumi:

- kā noteikt, vai kaut kāds izvēlētais punkts x ir uzdevuma optimālais risinājums $x = x^*$;
- kādas darbības jāveic, lai atrastu optimuma punktu x^*, ja izvēlētais punkts x nav šis optimuma punkts.

Vispārīgā gadījumā funkcijai $f(x)$ var būt globālais minimums (vai maksimums) un lokālie minimumi (vai maksimumi). Apgabalā A definētai funkcijai $f(x)$ ir globālais minimums punktā x^{**}, ja visiem $x \in A$ izpildās nosacījums

$$f(x^{**}) \leq f(x) .$$

Apgabalā A definētai funkcijai $f(x)$ ir lokālais minimums (nosacītais minimums) punktā x^*, ja visiem $x \in A$, kas atrodās no x^* pietiekami mazā attālumā ε, kur, ja $\left|x - x^*\right| < \varepsilon)$ izpildās nosacījums

$$f(x^*) < f(x) .$$

Ja funkcija ir unimodāla, tad lokālais minimums vienlaikus ir arī globālais minimums. Ja funkcija ir multimodāla, tad iespējami vairāki lokālie minimumi (maksimumi), turklāt globālo minimumu var noteikt, atrodot visus lokālos minimumus un izvēloties mazāko no tiem.
Nepieciešamo nosacījumu lokālā minimuma vai maksimuma esībai var izteikt kā

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} = 0 . \tag{4}$$

Viena argumenta funkcijas minimizācijas metožu vispārīgs raksturojums

Visas optimālā risinājuma meklēšanas metodes nosacīti var iedalīt divās grupās:

1) metodes, kuras balstās uz vairākkārtēju funkcijas vērtību izskaitļošanu pēc noteiktas sistēmas izvēlētos meklēšanas punktos;
2) metodes, kurā izmanto funkcijas atvasinājumu.

No algoritma viedokļa vienkāršākas ir pirmās grupas metodes, taču parasti to izmantošana ir saistīta ar lēnu konverģenci un tātad ar risināšanas laika palielināšanos. Otrās grupas metodēs par pamatu ņem izteiksmi (4), saskaņā ar kuru vispirms atrod funkcijas pirmo atvasinājumu $F(x) = f^{'}(x)$ un pēc tam, atrisinot vienādojumu

$$F(x^*) = 0 , \tag{5}$$

atrod optimālo vērtību x^*.

Tomēr daudzos praktiskos uzdevumos vienādojums (5) ir nelineārs vienādojums, tāpēc nevar iegūt tā analītisku atrisinājumu, bet jāizmanto dažādas tuvinātas skaitliskās metodes [3]. Turklāt mērķfunkcija $f(x)$ var būt uzdota netiešā vai parametriskā formā, vai kā funkcionālu sakarību virkne, kas sastāv no vairākām funkcijām ar savstarpēji atkarīgiem mainīgajiem, piem., $f(x, x_1, x_2)$, kur $x_1 = f_1(x_1, x_2)$, $x_2 = f_2(x, x_1)$. Risinot elektromagnētisku ierīču optimizācijas uzdevumus, minētājā funkcionālo sakarību virknē atsevišķas sakarības var būt uzdotas grafiski vai tabulas veidā, piem.,feromagnētisko materiālu magnetizēšanas līkne $B = f(H)$, un tādēļ funkcijas atvasinājumu analītiskā veidā nav iespējams atrast. Tad jāizmanto tāds vai citāds šādu funkciju aproksimēšanas veids, kas, savukārt, var ienest papildus kļūdas. Tāpat arī, ja atvasinājuma aproksimācijai izmanto procedūras ar galīgajām diferencēm, piem., Ņūtona interpolācijas polinomus, aktuāls kļūst jautājums par soļa izvēli saistībā ar aproksimācijas precizitāti. Līdz ar to izmantojamā metode pētniekam katrā atsevišķā gadījumā ir jāpielāgo risināmā uzdevuma konkrētam raksturam. Visas šis minētās īpatnības, risinot reālus magnētisko sistēmu optimizācijas uzdevumus, rada būtiskus ierobežojumus to mērķfunkcijas minimizācijas metožu praktiskā lietošanā, kurās izmanto funkcijas atvasinājumu.

Lai labāk izprastu iepriekš minētās problēmas, kas rodas ar atvasinājuma izmantošanu analizēsim vienkāršu piemēru. Aplūkosim magnētiskā ķēdes elementu, ko veido cilindriskas formas magnētserde, un magnētisko lauku rada uz šīs serdes uztīta cilindriska spole ar strāvu (2. att.). Pieņemsim, ka pārējā noslēgtās magnētiskās ķēdes daļa ir izgatavota no materiāla, kura magnētiskā caurlaidība μ_2 ir daudzkārt lielāka par aplūkojamā elementa magnētisko caurlaidību μ_1 ($\mu_2 >> \mu_1$) un tāpēc var pieņemt, ka $\mu_2 = \infty$. Tinumam jānodrošina noteikta lieluma magnētiskā plūsma Φ, turklāt optimizācijas gaitā jāatrod serdes diametra *D* vērtība, lai magnētserdes elementa tilpums V būtu vismazākais, t. i., jāveic mērķfunkcijas $V = f(D)$ minimizācija.

Magnētiskā indukcija serdē

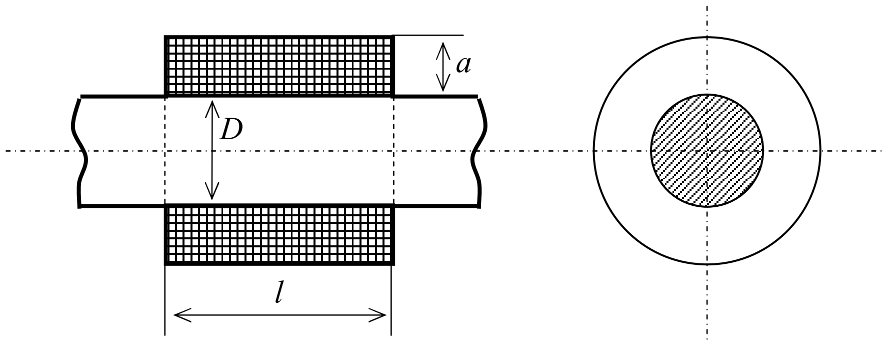
$$B = \frac{4}{\pi D^2}\Phi . \tag{6}$$

Magnētserdes, spoles un visa elementa kopējo tilpumu var izteikt attiecīgi kā

$$V_{\mathrm{Fe}} = \frac{\pi D^2}{4} l , \tag{7}$$

$$V_{\mathrm{Cu}} = \left[\frac{\pi (D+2a)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4}\right] l = \pi a (a+D)\, l , \tag{8}$$

$$V = V_{\mathrm{Fe}} + V_{\mathrm{Cu}} = \frac{\pi (D+2a)^2}{4} l . \tag{9}$$



2. attēls. Magnētvada elements ar tinumu

Serdes magnētiskās īpšības raksturo tās materiāla magnetizēšanas līkne, ko izsaka grafiski vai tabulas veidā uzdota nelineāra sakarība

$$H = f(B), \tag{10}$$

kur H – magnētiskā lauka intensitāte.
Spoles malas škērsgriezuma laukums

$$S_{\mathrm{Cu}} = a\,l. \tag{11}$$

Spoles biezums a nav neatkarīgs mainīgais, un to var izteikt, izmantojot pilnās strāvas likumu

$$Hl = iw, \tag{12}$$

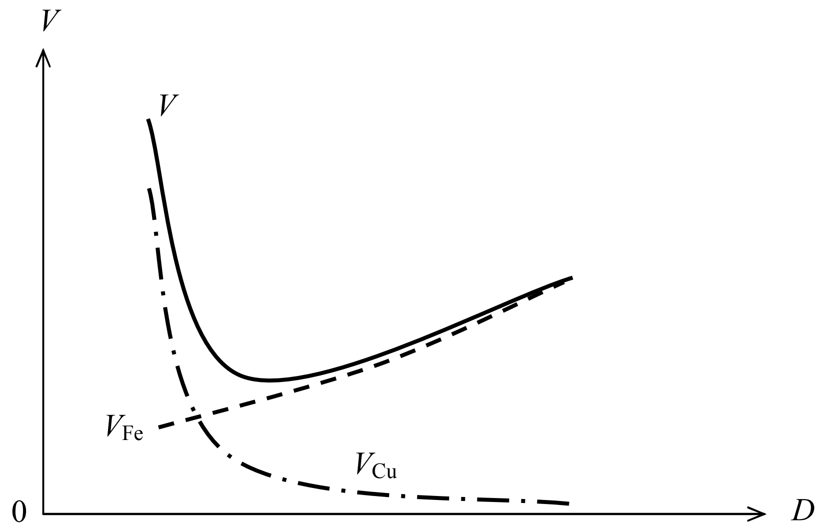
kur i – strāva spolē; w – spoles vijumu skaits.
Vienkāršības dēļ pieņemot $w = 1$, un strāvu i izsakot ar strāvas blīvumu j, no izteiksmēm (11) un (12) iegūstam

$$a = \frac{H}{j}. \tag{13}$$

Tad saskaņā ar (9)

$$V = \frac{\pi}{4}\left(D + \frac{2H}{j}\right)^2 l. \tag{14}$$

3. attēlā paraādīti mērķfunkcijas $V(D)$, kā arī tās sastāvdaļu $V_{\mathrm{Fe}}(D)$ un $V_{\mathrm{Cu}}(D)$ grafiki.
No attēla redzams, ka palielinoties serdes diametram, tās tilpums palielinās. Savukārt palielinoties diametram, samazinās magnētiskā indukcija serdē un dotās magnētiskās plūsmas radīšanai vajadzīgs mazāks magnetizētājspēks, tāpēc spoles tilpums samazinās.



3. attēls. Mērķfunkcijas un tās sastāvdaļu izmaiņas līknes

Kā redzams no izteiksmām (14), (10) un (6), mērķfunkcija V ir uzdota ar funkcionālu sakarību virkni $V = f_1(D, H)$, $H = f_2(B)$ un $B = f_3(D)$, turklāt saliktu un apslēptu funkciju veidā. Šis apstāklis tad arī ir nopietns šķērslis, lai lieluma D optimālās vērtības atrašanai izteiksmi (4) varētu izmantot tiešā veidā, par ko var pārliecināties, izsakot funkcijas V atvasinājumu pēc D. No izteiksmes (14)

$$\frac{dV}{dD} = \frac{\pi}{2} l \left(D + \frac{2H}{j} \right) \frac{d}{dD} \left(D + \frac{2H}{j} \right). \tag{15}$$

Bet tā kā H apslēptā veidā ir atkarīgs no D, t. i. $H = f(D)$, tad

$$\frac{d}{dD} \left(D + \frac{2H}{j} \right) = 1 + \frac{2}{j} \frac{dH}{dD}. \tag{16}$$

Savukārt, saskaņā ar (6) un (10) funkcijas $H = f(D)$ kā saliktas funkcijas atvasinājums ir

$$\frac{dH}{dD} = -\frac{8\Phi}{\pi} \frac{1}{D^3} \frac{dH}{dB}. \tag{17}$$

Ievietojot $\frac{dH}{dD}$ no (17) izteiksmē (16) un pēc tam $\frac{d}{dD}\left(D + \frac{2H}{j} \right)$ no (16) izteiksmē (15), pēc pārveidojumiem iegūstam

$$\frac{dV}{dD} = \frac{\pi}{2} l \left(D + \frac{2H}{j} \right) \left(1 - \frac{16\Phi}{\pi j} \frac{1}{D^3} \frac{dH}{dB} \right). \tag{18}$$

Saskaņā ar (4), pielīdzinot šo izteiksmi nullei, iegūstam nelineāru vienādojumu optimālā diametra D_{opt} noteikšanai:

$$\left(D_{opt}+\frac{2H}{j}\right)\left(1-\frac{16\Phi}{\pi j}\frac{1}{D_{opt}^{3}}\frac{dH}{dB}\right)=0. \qquad (19)$$

Vienādojuma (19) risināšanas algoritms ir ļoti sarežģīts sakarā ar to, ka:

- tas ir nelineārs vienādojums;
- vienādojums apslēptā veidā satur funkcionālo sakarību $H = f(D)$;
- tas satur nelineāru sakarību $H = f(B)$, kas uzdota grafiski vai tabulas veidā;
- satur atvasinājumu dH/dB;
- nelineārās sakarības raksturs ir tāds, ka šīs sakarības aproksimēšanai ar pietiekamu precizitāti jāizmanto gabaliem paraboliska aproksimācija, kas, savukārt, rada nepieciešamību bez aritmētiskām operācijām skaitļošanas procesā izmantot arī loģiskās operācijas.

Minēto īpatnību dēļ metodes, kurās minimizācijai izmanto funkcijas atvasinājumu magnētisko sistēmu optimizācijā, vairumā gadījumu sevi neattaisno. Izņēmumi varētu būt nepiesātinātas magnētiskās sistēmas, kurā sakarība $B = f(H)$ ir praktiski lineāra, kā tas, piemēram, ir magnetizēšanas līknes sākuma daļā.

Viena argumenta funkcijas minimizācija ar intervālu izslēgšanas metodi

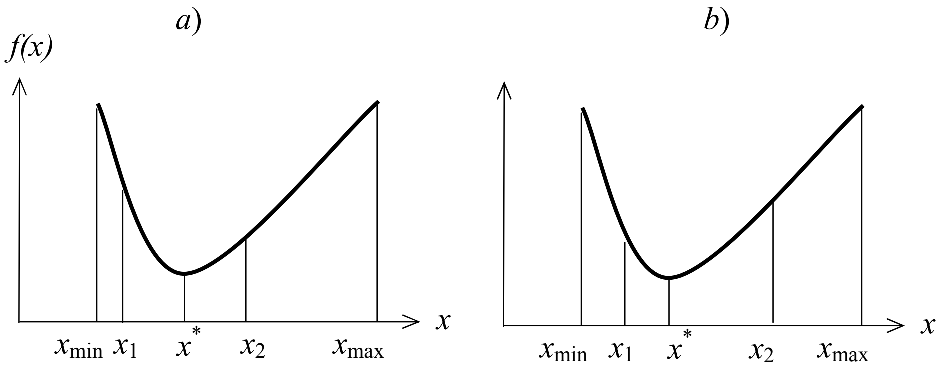
Mērķfunkcijas minimizācijas metode, ko sauc par intervālu izslēgšanas metodi, ir balstīta uz funkcijas vērtību izskaitļošanu pēc noteiktas sistēmas izvēlētos mēģinājuma punktos un šo vērtību salīdzināšanu. Šī metode ļauj ievērojami vienkāršot optimizācijas algoritmu, kurš zināmā mērā ir universāls tādā nozīmē, ka nav atkarīgs no minimizājamās funkcijas rakstura. Kā trūkumu intervālu izslēgšanas metodei var minēt to, ka optimizācijas procesā var būt nepieciešams liels iterāciju skaits. Tomēr šis apstāklis, ja ievēro mūsdienu datortehnikas ātrdarbību, nav uzskatāms par būtisku.

Intervālu izslēgšanas metodē tiek izmantota funkcijas unimodalitātes īpašība. Šī īpašība, salīdzinot funkcijas $f(x)$ vērtības divos dažādos meklēšanas intervāla punktos, ļauj noteikt, kurā no minēto punktu veidotajiem apakšintervāliem funkcijas minimuma punkts neatrodas. Intervālu izslēgšanas metodes pozitīvā īpašība ir tā, ka, lietojot šo metodi, nepieciešama tikai funkcijas vērtību izskaitļošana, turklāt nav nepieciešams, lai pētāmā funkcija būtu difrencējama, kā arī pieļaujami gadījumi, kad funkciju nevar uzdot analītiskā veidā. Vienīgā prasība ir funkcijas $f(x)$ vērtību izskaitļošanas iespējamība izvēlētajos meklēšanas punktos.

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir unimodāla intervālā $[x_{min}; x_{max}]$ un tās minimums ir punktā x^* (4. att.).

Aplūkosim šajā intervālā punktus x_1 un x_2, kuri izvēlēti tā, ka $x_{min} < x_1 < x_2 < x_{max}$. Salīdzinot funkcijas vērtības punktos x_1 un x_2, iespējami šādi raksturīgi gadījumi:

- ja $f(x_1) > f(x_2)$ (4. att. a), tad minimuma punkts neatrodas apakšintervālā $[x_{min}; x_1]$, šo intervālu nākošajā meklēšanas solī var izslēgt, par jauno meklēšanas intervālu pieņemot $[x_1; x_{max}]$;



4. attēls. Intervālu izslēgšanas metodes grafiskā interpretācija

- ja $f(x_1) < f(x_2)$ (4. att. b), tad minimuma punkts neatrodas apakšintervālā [x_2; x_{max}], un nākošajā meklēšanas solī var izslēgt šo intervālu, par jauno meklēšanas intervālu pieņemot [x_{min}; x_2].

Izmantojot intervālu izslēgšanas principu, var realizēt meklēšanas procedūru, kura ļauj noteikt minimuma punktu ar pakāpenisku sākotnējā intervāla apakšintervālu izslēgšanu. Meklēšanas procedūru beidz, kad atlikušā apakšintervāla garums samazinās līdz pietiekami mazai vērtībai. Kārtējā solī izslēdzamā apakšintervāla garums ir atkarīgs no mēģinājuma punktu x_1 un x_2 novietojuma sākotnējā meklēšanas intervāla [x_{min}; x_{max}] iekšienē. Vēlams, lai katrā kārtējā iterācijā mēģinājuma punktu veidotie intervāli samazinātos vienādā attiecībā. Turklāt, lai paaugstinātu algoritma efektivitāti, vēlams, lai šī attiecība būtu maksimāla. Viena no šādām metodēm, kas vienlaikus apmierina abas šīs prasības, ir intervālu izslēgšanas bisekciju metode. Šī metode ļauj katrā iterācijā izslēgt tieši pusi no intervāla, t. i., katrā iterācijā intervālu samazinot divas reizes.

Intervālu izslēgšanas metodes algoritms ir šāds.

1. solis. Aprēķina intervāla viduspunkta koordinātu

$$x_m = \frac{x_{min} + x_{max}}{2} \tag{20}$$

un meklēšanas intervāla garumu

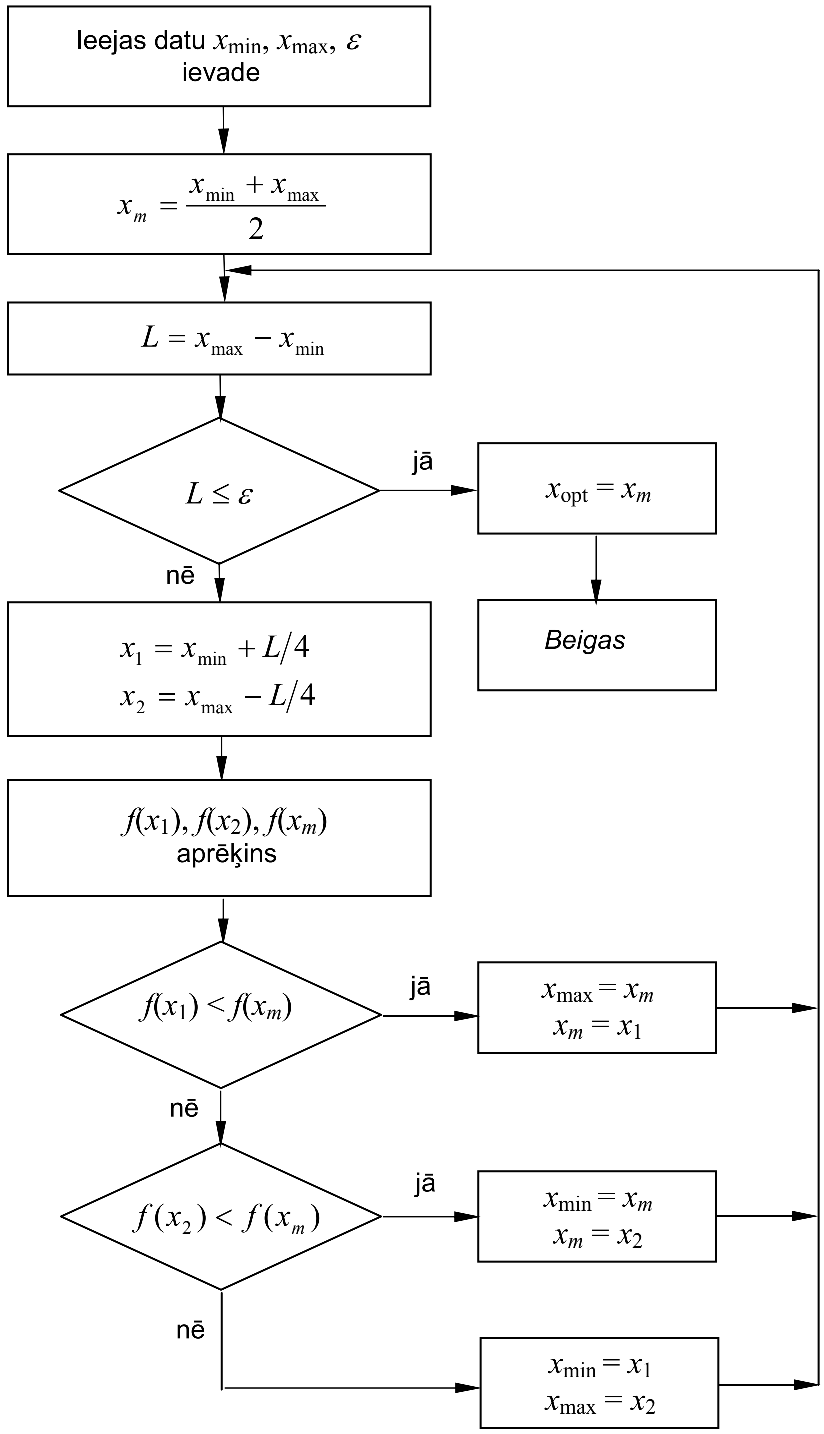
$$L = x_{max} - x_{min}\,. \tag{21}$$

2. solis. Atrod mēģinājuma punktus x_1 un x_2:

$$x_1 = x_{min} + \frac{L}{4}\,, \tag{22}$$

$$x_2 = x_{max} - \frac{L}{4}\,. \tag{23}$$

3. solis. Aprēķina funkcijas vērtības mēģinājuma punktos $f(x_1)$, $f(x_2)$ un $f(x_m)$.



5. attēls. Viena argumenta funkcijas minimizācijas algoritma blokshēma, izmantojot intervālu izslēgšanas bisekciju metodi

4. solis. Salīdzina $f(x_1)$ un $f(x_m)$. Ja $f(x_1) < f(x_m)$, pieņemt $x_{max} = x_m$. Par jaunā meklēšanas intervāla viduspunktu kļūst punkts $x_m = x_1$. Pāriet uz 6. soli. Ja $f(x_1) > f(x_m)$, pāriet uz 5. soli.

5. solis. Salīdzina $f(x_2)$ un $f(x_m)$. Ja $f(x_2) < f(x_m)$, izslēdz intervālu [x_{min}; x_m], pieņemot $x_{min} = x_m$. Par jaunā intervāla viduspunktu kļūst punkts $x_m = x_2$. Pāriet uz 6. soli. Ja $f(x_2) > f(x_m)$, izslēdz vienlaikus abus intervālus [x_{min}; x_1] un [x_2; x_{max}], pieņemot $x_{min} = x_1$ un $x_{max} = x_2$. Par jaunā intervāla viduspunktu saglabājas punkts x_m. Pāriet uz 6. soli.

6. solis. Aprēķina jaunā intervāla garumu (sk. formulu (21)). Ja $L \le \varepsilon$, kur ε –pieļaujamā kļūda, meklēšanas procedūru beidz, pieņemot $x_{opt} = x_m$. Pretējā gadījumā pāriet uz 2. soli.

Iztirzātā mērķfunkcijas minimizācijas algoritma blokshēma parādīta 5. attēlā.

Literatūra

1. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Кн. 1. - Москва, "Мир", 1986, 352 с.

2. Zviedris A. Elektrisko mašīnu elektromagnēriskie aprēķini. R.:RTU, 2001, 72 lpp.

3. Zviedris A. Datorrealizācijas matemātiskās metodes. R.: RTU, 2004, 80 lpp.

Andrejs Zviedris, Associate Professor, Dr.Sc.Ing.
Riga Technical University, Institute of Power Engineering
Address: Kronvalda bulv. 1, LV 1010 Riga, Latvia
Phone: +7089929
E – Mail: aaazzz@eef.rtu.lv

Rihards Elmanis-Helmanis, Ing., M.Sc.student
Riga Technical University, Institute of Power Engineering
Address: Kronvalda bulv. 1, LV 1010 Riga, Latvia
Phone: (+371) 7089929
E - Mail: rihards.elmanis@latvenergo.lv

Andrejs Podgornovs, Ph. D. student, Mg.Sc.Ing.
Riga Technical University, Institute of Power Engineering
Address: Kronvalda bulv. 1, LV 1010 Riga, Latvia
Phone: (+371) 7089928
E – Mail: andrejsp@eef.rtu.lv

Zviedris A., Elmanis-Helmanis R., Podgornovs A,. Elektromagnētisko ierīču magnētisko sistēmu un to elementu optimizācijas metodoloģiskie pamati.
Darbā aplūkotas elektromagnētisko ierīču magnētisko sistēmu galvenās īpatnības saistībā ar šo ierīču tipu. Aprakstīta minēto ierīču optimizācijas uzdevuma nostādne: optimizējamās sistēmas robežu noteikšana, raksturkritērija izvēle, iekšsistēmas mainīgo izvēle, matemātiskā modeļa izveide. Sīkāk aplūkotas īpatnības, kas saistītas ar viendimensiju optimizācijas uzdevumu, ievērojot elektromagnētiskajās ierīcēs izmantojamo feromagnētisko materiālu nelineārās raksturlīknes. Parādīts, ka šādu optimizācijas uzdevumu risināšanā mērķfunkcijas minimizācijai vispiemērotākā ir intervālu izslēgšanas bisekciju metode. Aprakstīts šis metodes algoritms un dota blokshēma.

Zviedris A., Elmanis-Helmanis R., Podgornovs A., Metodological bases of optimization for magnetic system of electromagnetic devices and their elements.
In the work are considered the basic features of the most characteriastic magnetic systems of electromagnetic devices. Described position of task for optimization of the mentioned devices: scopes of the optimized system, choice of characteristic criterion, choice of intersystem variables and construction of mathemetical model. In more detail are described optimization problems of one dimensional task, in view of nonlinear characteristics of the ferromagnetic materials, applied in electromagnetic devices. It is shown, that at the decision of similar

problems of optimization most effective is the method of exeption of intervals a half division. Described the algorithm of such method and direct the block diagramm.

Звиедрис А., Элманис-Хелманис Р., Подгорнов А., Методологические основы оптимизации магнитных систем и их элементов электромагнтных устройств.

В работе рассмотрены основные особенности наиболее характерных магнитных систем электромагнитных устройств. Описана постановка задачи оптимизации упомянутых устройств: определение границ опртимизируемой системы, выбор характеристического критерия, выбор внутрисистемных переменных, построение математической модели. Более подробно рассмотрены особенности одномерной задачи оптимизации с учетом нелинейных характеристик ферромагнитных материалов, применяемых в электромагнитных устройствах. Показано, что при решении подобных задач оптимизации наиболее эффективным является метод исключения интервалов при половинном делении. Описан алгоритм такого метода и приведена блок-схема этого алгоритма.