

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

**DATORZINĀTNES UN INFORMĀCIJAS
TEHNOLOĢIJAS FAKULTĀTE**

Lietišķās matemātikas institūts



Irina Eglīte

**ŠĶIDRUMA PLŪSMAS STABILITĀTES ANALĪZE
AR PIELIETOJUMIEM HIDRAULIKĀ**

Promocijas darba kopsavilkums

Doktora grāda iegūšanai matemātikas nozarē
Apakšnozare: matemātiskā modelēšana

Zinātniskais vadītājs:

prof. *Dr. math.* Andrejs Koliškins

RTU Izdevniecība

Rīga 2016

Eglīte I. Šķidruma plūsmas stabilitātes analīze ar pielietojumiem hidraulikā.

Promocijas darba kopsavilkums. – R.: RTU Izdevniecība, 2016. – 55 lpp.

Izdots saskaņā ar RTU inženiermatemātikas katedras 2016. gada 8. novembra lēmumu, protokols Nr. 12501 – 1/4.

Promocijas darbs izstrādāts Rīgas Tehniskās universitātes
Datorzinātnes un informācijas tehnoloģijas fakultātē,
Lietišķās matemātikas institūta Inženiermatemātikas katedrā
laika posmā no 2010. gada līdz 2015. gadam.



Darbs daļēji ir atbalstīts ar ESF projektu
“Atbalsts RTU doktora studiju īstenošanai”
Nr. 2009/0144/1DP/1.1.2.1.2/09/IPIA/VIAA/00

Darbs sastāv no ievada, 6 nodaļām, secinājumiem, literatūras saraksta.

Darba forma: disertācija matemātikas nozarē, matemātikas modelēšanas
apakšnozarē.

Darba zinātniskais vadītājs: prof. *Dr. math.* Andrejs Koliškins

Darba recenzenti:

- 1) Em. prof. *Dr. habil. math.*, *Dr. habil. phys.* Harijs Kalis (LU MII),
padomes loceklis
- 2) Prof. *Dr. habil. phys.* Juris Roberts Kalniņš (Ventspils
Augstskola)
- 3) *Dr.* Konstantin Ilin (*University of York*, Lielbritānija)

Promocijas darba aizstāvēšana notiks 2016. gada 16. decembrī Latvijas
Universitātes matemātikas nozares promocijas padomes atklātā sēdē plkst.
14.30 Rīgā, Zeļļu ielā 25, Latvijas Universitātes Fizikas un matemātikas
fakultātes Matemātikas nodaļā, 233. auditorijā.

Ar promocijas darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Latvijas
Universitātes Bibliotēkā, Rīgā, Kalpaka bulvārī 4.

LU matemātikas zinātņu nozares promocijas
padomes priekšsēdētājs _____ /*Andrejs Reinfelds*/

promocijas padomes sekretārs _____ /*Jānis Cepītis*/

Anotācija

Promocijas darbā tiek veikta plūsmu lineārā un vāji nelineārā stabilitātes analīze seklos sajaukšanās slāņos. Plūsma tiek pieņemta kā nedaudz izliekta garenvirzienā. Lineārā stabilitāte tiek analizēta no laika un telpas aspektiem saskaņā ar „cietā vāka” pieņēmumu. Atbilstošās lineārās stabilitātes problēmas tiek risinātas skaitliski, izmantojot pseidospektrālo kolokācijas metodi, kas balstās uz Čebiševa polinomiem. Turklāt problēma ir vispārināta divu komponentu seklām plūsmām ar lielo Stoksa skaitli pieņēmumu. Berzes koeficients mainās šķērsvirzienā (literatūrā parasti ir analizēts konstanta berzes koeficienta gadījums, kas ir īpašs gadījums iesniegtā promocijas darbā analizē).

Analizēta bāzes profila asimetrijas ietekme uz stabilitātes parametriem. Tiek izskatītas divas pieejas vāji nelineārās stabilitātes analīzei. Pirmā pieeja pamatojas uz paralēlu plūsmu pieņēmumu. To var izmantot gadījumā, kad gultnes berzes koeficients ir nedaudz mazāks par kritisko vērtību. Izmantojot vairāku mērogu metodi, tiek iegūts amplitūdas evolūcijas vienādojums nestabilākajam režīmam. Parādīts, ka nedaudz izliektam seklam sajaukšanās slānim, kurš var saturēt vai nesaturēt sīkas daļiņas, amplitūdas vienādojums ir kompleksais Ginzburga–Landau vienādojums. Vienādojuma koeficienti tiek aprēķināti no integrāļiem, kas satur plūsmas lineārās stabilitātes parametrus. Tiek aplūkota plakanu viļņu stabilitāte Ginzburga–Landau vienādojumam. Parādīti Ginzburga–Landau vienādojuma skaitliskie aprēķini dažādām parametru vērtībām un sākuma nosacījumiem.

Otra pieeja ņem vērā lēno garenvirziena bāzes plūsmas izmaiņu. Analīzes pamatā ir vāji neparalēla *WKB* aproksimācija. Tiek iegūts pirmās kārtas amplitūdas attīstības vienādojums. Amplitūdas vienādojuma atrisinājums tiek izmantots, lai iegūtu pirmās kārtas perturbācijas lauka aproksimāciju.

Atslēgas vārdi: lineārā stabilitāte, vāji nelineārā teorija, vairāku mērogu metode, Ginzburga–Landau vienādojums, kolokācijas metode.

Saturs

Ievads	6
Promocijas darba struktūra	6
Tēmas aktualitāte	6
Promocijas darba uzdevumi	6
Izpētes metodes	7
Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti	7
Pielietojumi	8
Publikāciju saraksts	8
Prezentācijas starptautiskās konferencēs.....	10
Prezentācijas vietējās konferencēs	11
1. Problēmas matemātiskais formulējums	12
1.1. Literatūras apskats	12
1.2. Seklā ūdens vienādojumi	13
2. Stabilitāte nedaudz izliektas seklā ūdens plūsmas sajaukšanās slāņiem	14
2.1. Lineārā stabilitāte	14
2.2. Skaitliskā metode lineārai stabilitātei.....	17
2.3. Vāji nelineārās metodes.....	19
2.4. Skaitliskā metode vāji nelineārai stabilitātei.....	25
3. Lineārā un vāji nelineārā stabilitāte divu komponentu nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem	26
3.1. Lineārā stabilitāte	26
3.2. Vāji nelineārā stabilitāte	27
4. Stabilitāte garenvirzienā nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem	31
4.1. Lineārā stabilitāte	31
4.2. Vāji nelineārā stabilitāte	33
5. Stabilitāte seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem ar mainīgu berzi	36
5.1. Lineārā stabilitāte	36
5.2. Vāji nelineārā stabilitāte	41
6. Skaitliskie rezultāti	44
Secinājumi	50
Literatūra	51

Ievads

Promocijas darba struktūra

Promocijas darba galvenais mērķis ir izstrādāt matemātiskos modeļus, ko var izmantot, lai analizētu lineāru un vāji nelineāru nestabilitāti seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem. Tiek pieņemts, ka plūsma ir nedaudz izliekta garenvirzienā un berzes koeficients ir funkcija no šķērsvirziena koordinātas.

Darbs sastāv no ievada, 6 nodaļām un secinājumiem. Darbs satur 104 lappuses. Darbā ir 19 attēli un 69 atsauces. Darbs rakstīts angļu valodā.

1. nodaļa sniedz promocijas darbā izmantotās literatūras pārskatu. Ir aprakstīti pamata vienādojumi, kas izmantoti darbā.

2. nodaļā tiek detalizēti izskatīta lineārās un vāji nelineārās stabilitātes metožu analīze nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem. Tiek analizētas skaitliskās metodes, ko izmanto stabilitātes problēmas risināšanā.

3. nodaļa ir veltīta līdzīgu problēmu analīzei nedaudz izliektu divu komponentu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem. Lineārā un vāji nelineārā stabilitātes analīze tiek veikta saskaņā ar lielo Stoksa skaitļu pieņēmumu.

4. nodaļa ir veltīta stabilitātes analīzei pēc x koordinātas nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem.

5. nodaļa analizē lineāro un vāji nelineāro nestabilitāti seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem ar šķērsvirzienā mainīgu berzi.

6. nodaļa ir veltīta Ginzburga–Landau vienādojuma risinājuma skaitliskai analīzei.

Tēmas aktualitāte

Izpratne par mijiedarbību starp ātru un lēnu šķidruma plūsmu seklā ūdens sajaukšanās slāņos ir svarīga, lai analizētu plūsmas upju satecēs un lai projektētu saliktu kanālu. Dabā kanāli un upes nav taisnas. Tādējādi, lai pienācīgi projektētu un analizētu saliktus kanālus, būtu jāņem vērā izliekuma ietekme uz stabilitātes īpašībām seklā ūdens sajaukšanās slāņos. Šķērsvirzienā nehomogēnas berzes gadījums ir ļoti svarīgs no vides aizsardzības viedokļa. Berzes koeficients palienē parasti ir lielāks nekā galvenajā kanālā (it īpaši plūdu gadījumā). Virpuļi parasti veidojas slānī, kur mainās ūdens dziļums un pretestības spēks. Komplicētas virpuļu struktūras var uzkrāt piesārņojumus un nosēdumus, tādā veidā kaitējot videi. Tāpēc ir nepieciešams modelis, kas apraksta seklā ūdens plūsmu, kā arī metodes, kas ļauj veikt plūsmas stabilitātes analīzi un sekot līdzi perturbācijas attīstībai.

Promocijas darba uzdevumi

1. Lineārās un vāji nelineārās stabilitātes analīze nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem.

2. Lineārās un vāji nelineārās stabilitātes parametru pētīšana nedaudz izliektu divu komponentu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem.
3. Pētījums par telpisko stabilitāti nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem.
4. Pētījums par lineāro un vāji nelineāro stabilitāti seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem ar nehomogēnu berzi.
5. Skaitliskā analīze lineārās un vāji nelineārās stabilitātes modeļiem.

Izpētes metodes

Darbā izvēlētas bāzes seklā ūdens plūsmas ar samērā vienkāršu struktūru. Kustības vienādojumi ir linearizēti bāzes plūsmas apkārtnē. Linearizētie vienādojumi ir atrisināti ar normālo modu metodi. Atbilstošie lineārie stabilitātes uzdevumi tiek risināti skaitliski, izmantojot pseidospektrālo kolokācijas metodi, kas balstās uz Čebiševa polinomiem.

Aprakstītas divas pieejas vāji nelineārās stabilitātes analīzei nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem, divu fāžu seklā ūdens plūsmām un sajaukšanās slāņiem ar mainīgu berzi. Pirmā pieeja ir balstīta uz pieņēmumu par paralēlu plūsmu. Lai iegūtu visvairāk nestabilā režīma amplitūdas evolūcijas vienādojumu, tiek izmantota vairāku mērogu metode. Otrā pieeja ņem vērā bāzes plūsmas lēnas garenvirziena izmaiņas. Analīzes pamatā ir vāji neparalēla *WKB* aproksimācija.

Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti

- Izpētīta ātruma profila asimetrijas ietekme uz lineāro stabilitāti.
- Izpētīta plūsmas liekuma ietekme uz lineāro un vāji nelineāro stabilitāti.
- Izpētīta divu komponentu lineārā un vāji nelineārā stabilitāte.
- Aplūkotas divas pieejas lineārās stabilitātes problēmas risināšanai:
 - atkarībā no koordinātas x (*spatial*);
 - atkarībā no laika (*temporal*).
- Aplūkotas divas metodes vāji nelineārās stabilitātes pētījumiem:
 - pie nosacījuma, ka bāzes plūsma nav atkarīga no garenvirziena koordinātas;
 - pie nosacījuma, ka bāzes plūsma nedaudz mainās atkarībā no garenvirziena koordinātas.
- Izpētīta lineārā un vāji nelineārā stabilitāte gadījumā, kad berzes koeficients atkarīgs no garenvirziena koordinātas.
- Iegūtas formulas Ginzburga–Landau vienādojuma koeficientu aprēķināšanai nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem, nedaudz izliektu divu komponentu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem, seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem ar nehomogēnu berzi.
- Tiek iegūts amplitūdas vienādojums, kas apraksta amplitūdas perturbācijas attīstību atkarībā no garenvirziena koordinātas.

Pielietojumi

Seklo plūsmu stabilitātes raksturlielumi un nestabilitātes attīstība ir svarīga kompleksa problēma tādās jomās kā upju plūsmas analīze satecēs, kombinētu un saliktu kanālu projektēšana, plūdu seku analīze. Plūsmu liekumu arī jāņem vērā. Dažos gadījumos plūsmas var saturēt smagas daļiņas, kas pārvietojas kopā ar šķidrumu. Lineārā un vāji nelineārā analīze divu komponentu sekliem sajaukšanās slāņiem ar lielu Stoksa skaitli pieņēmu, kas veikta promocijas darbā, skaidro sīko daļiņu ietekmi uz plūsmu stabilitātes īpašībām.

Seklā ūdens vienādojumi ir nelineāri. Tā kā problēmu raksturojošo parametru skaits ir liels, seklo ūdens plūsmu skaitliskā modelēšana prasa ievērojamus skaitļošanas resursus. Amplitūdas vienādojumi izrādījās noderīgi siltuma konvekcijas un Teilora–Kuetta plūsmas aprakstīšanai. Šos vienādojumus varētu izmantot, aprakstot attiecīgo plūsmu dinamiku nestabilitātes sākumposmā. Amplitūdas evolūcijas vienādojums kompleksā Ginzburga–Landau vienādojuma formā tiek iegūts promocijas darbā no kustības vienādojumiem vāji nelineāra režīma vienas vai divu komponentu nedaudz izliektiem seklās plūsmas sajaukšanās slāņiem, kur berzes koeficients ir konstants vai ir mainīgs šķērsvirzienā. Ginzburga–Landau vienādojums dod daudz dažādu atrisinājumu (atkarībā no koeficientu vērtības), tāpēc tas daudzos gadījumos tiek izmantots kā fenomenoloģisks vienādojums komplekso plūsmu dinamikas analīzei.

Sarežģītu parādību modelēšanai šķidruma mehānikā vienādojuma koeficienti parasti tiek ņemti no eksperimentālajiem datiem. Promocijas darbā parādīts, ka Ginzburga–Landau vienādojuma koeficientus var aprēķināt, izmantojot plūsmu lineārās stabilitātes raksturlielumus. Tādējādi, mainot problēmas parametrus un atkārtoti aprēķinot Ginzburga–Landau vienādojuma koeficientus, to var izmantot vāji nelineāra režīma plūsmas dinamikas analīzei laikā un telpā.

Publikāciju saraksts

1. Eglite, I., Kolyshkin, A., and Ghidaoui, M. Weakly nonlinear analysis of shallow mixing layers with variable friction. In: *Materials of the 11th World Congress on Computational mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics*, Spain, Barcelona, 20–25 July 2014. Barcelona: CIMNE, 2014, pp. 1–2. ISBN 978-84-942844-7-2.
2. Eglite, I., and Kolyshkin, A. On the stability of shallow mixing layers with non-uniform friction. In: *The 10th Latvian Mathematical Conference. The 2nd Intern. Conference on High Performance Computing and Mathematical Modelling. Book of Abstracts*, Liepaja, Latvia, 11–12 April 2014. Liepaja: Liepaja University, 2014, pp. 33–33. ISBN 978-9934-522-23-9.
3. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial stability analysis of shallow mixing layers with variable friction coefficient. In: *Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, MIC 2014*, Austria,

- Innsbruck, 17–19 February 2014. Austria: ACTA Press, pp. 161–165. ISBN 978-0-88986-966-0 (SCOPUS).
4. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial and temporal instability of slightly-curved particle-laden shallow mixing layers. In: *Proceedings of the V Intern. Conf. on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, Spain, Ibiza, 17–19 June 2013. Barcelona: CIMNE, 2013, pp. 1249–1256. ISBN 978-84-941407-6-1 (WEB of SCIENCE).
 5. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Linear instability of shallow mixing layers with non-constant friction coefficient. In: *Intern. Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing: Book of Abstracts*, Croatia, Šibenik, 10–14 June 2013. Zagreb: University of Zagreb, 2013, pp. 25–26.
 6. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial stability analysis of curved shallow mixing layers. In: *Mathematical Models and Methods in Modern Science: 15th International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems*, Cyprus, Limassol, 21–23 March 2013. Athens: WSEAS Press, 2013, pp. 104–108. ISBN 978-1-61804-168-5.
 7. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial instability of curved shallow mixing layers. In: *17th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. Abstracts*, Estonia, Tallinn, 6–9 June 2012. Tallinn: Tallinn University of Technology, 2012, pp. 71–71.
 8. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Weakly nonlinear methods for stability analysis of slightly curved two-phase shallow mixing layers. In: *International Conference on Applied Mathematics and Sustainable Development: Special Track within SCET2012*, China, Xi'an, 27–30 May 2012, Xi'an: Scientific Research Publishing, 2012, pp. 271–274. ISBN 978-1-61896-023-8.
 9. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Ginzburg-Landau model for curved two-phase shallow mixing layers. *Proc. of World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2012, Iss. 64, pp. 146–150. ISSN 2010-376X.
 10. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Amplitude evolution equation for stability analysis of two-phase shallow flows. In: *9th Latvian mathematical conference. Abstracts*, Latvia, Jelgava, 30–31 March 2012, Riga: Latvian Mathematical Society, 2012, pp. 27–27. ISBN 978-9984-45-480-1.
 11. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Ginzburg-Landau model for stability analysis of fluid flows. *Sc. J. of Riga Technical University. Boundary Field Problems and Computer Simulation*, 2011, vol. 50, pp. 97–100. ISSN 1407-7493.
 12. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Linear and weakly nonlinear instability of slightly curved shallow mixing layers. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, 2011, Iss. 2, Vol. 6, pp. 123–132. ISSN 1790-5087 (SCOPUS).
 13. Eglite, I., and Kolyshkin, A. The effect of slow variation of base flow profile on the stability of slightly curved mixing layers. *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2011, iss. 76, pp. 624–627. ISSN 2010-3778 (SCOPUS).
 14. Eglite, I. Asymptotic analysis of stability of slightly curved two-phase shallow mixing layers. In: *2nd International Conference on Fluid Mechanics and Heat*

- & Mass Transfer: Recent Researches in Mechanics*, Greece, Corfu, 14–16 July 2011. Athens: WSEAS Press, pp. 98–101. ISBN 978-1-61804-020-6 (SCOPUS).
15. Eglite, I., and Kolyshkin, A. The effect of flow curvature on linear and weakly nonlinear instability of shallow mixing layers. In: *16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. Abstracts*, Latvia, Sigulda, 25–28 May 2011. Riga: University of Latvia, 2011, pp. 40–40. ISBN 978-9984-45-351-4.
 16. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Linear instability of curved shallow mixing layers. In: *Recent Researches in Hydrology, Geology and Continuum Mechanics*, United Kingdom, Cambridge, 23–25 February 2011. WSEAS Press, 2011, pp. 38–41. ISBN 978-960-474-275-2 (SCOPUS).
 17. Kolyshkin, A., and Eglite, I. Spatial instability of asymmetric base flow profiles in shallow water. In: *15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis: Abstracts*. Lithuania, Druskininkai, 26–29 May 2010. Vilnius: Technika, 2010, pp. 48–48. ISBN 978-9955-28-595-3.
 18. Eglite, I., and Kolyshkin, A. The effect of asymmetry of base flow profile on the linear stability of shallow mixing layers. In: *Non-Linear Systems and Wavelet Analysis: Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on Wavelet Analysis and Multirate Systems (WAMUS'10)*, Tunisia, Kantaoui, Sousse, 3–6 May 2010. WSEAS Press, 2010, pp. 109–112. ISBN 978-960-474-189-2 (SCOPUS).
 19. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Stability of shallow water flow for the case of asymmetric base velocity profile. In: *8th Latvian Mathematical Conference: Abstracts*, Latvia, Valmiera, 9–10 April 2010. Latvia: LMB, 2010, pp. 28–28. ISBN 978-9984-45-173-2.

Prezentācijas starptautiskās konferencēs

1. Weakly nonlinear analysis of shallow mixing layers with variable friction. *11th World Congress on Computational mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics*, Spain, Barcelona, 20–25 July 2014.
2. On the stability of shallow mixing layers with non-uniform friction. *The 10th Latvian Mathematical Conference. The 2nd International Conference on High Performance Computing and Mathematical Modelling*, Liepāja, Latvia, 11–12 April 2014.
3. Spatial stability analysis of shallow mixing layers with variable friction coefficient. *IASTED Intern. Conference on Modelling, Identification, and Control, MIC 2014*, Austria, Innsbruck, 17–19 February 2014.
4. Spatial and temporal instability of slightly-curved particle-laden shallow mixing layers. *V Intern. Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Eng.*, Spain, Ibiza, 17–19 June 2013.

5. Linear instability of shallow mixing layers with non-constant friction coefficient. *International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, Croatia, Šibenik, 10–14 June 2013.
6. Spatial stability analysis of curved shallow mixing layers. *15th International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems*, Cyprus, Limassol, 21–23 March 2013.
7. Spatial instability of curved shallow mixing layers. *17th Intern. Conf. on Mathematical Modelling and Analysis*, Estonia, Tallinn, 6–9 June 2012.
8. Weakly nonlinear methods for stability analysis of slightly curved two-phase shallow mixing layers. *International Conference on Applied Mathematics and Sustainable Development: Special Track within SCET2012*, China, Xi'an, 27–30 May 2012.
9. Ginzburg-Landau model for curved two-phase shallow mixing layers. *ICCAM 2012: International Conference on Computational and Applied Mathematics*, Italy, Venice, 11–13 April 2012.
10. Asymptotic analysis of stability of slightly curved two-phase shallow mixing layers. *International Conference on Fluid Mechanics and Heat & Mass Transfer*, Greece, Corfu, 14–16 July 2011.
11. The effect of flow curvature on linear and weakly nonlinear instability of shallow mixing layers. *16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis*, Latvia, Sigulda, 25–28 May 2011.
12. The effect of slow variation of base flow profile on the stability of slightly curved mixing layers. *WASET International Conference*. Italy, Venice 27-29 April 2011.
13. Linear instability of curved shallow mixing layers. *The 6th IASME / WSEAS International Conference on Continuum Mechanics (CM'11)*, United Kingdom, Cambridge, 23–25 February 2011.
14. Spatial instability of asymmetric base flow profiles in shallow water. *15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis*, Lithuania, Druskininkai, 26–29 May 2010.
15. The effect of asymmetry of base flow profile on the linear stability of shallow mixing layers. *10th WSEAS Intern. Conf. on Wavelet Analysis and Multirate Systems*, Tunisia, Kantaoui, Sousse, 3–6 May 2010.

Prezentācijas vietējās konferencēs

1. Amplitūdas evolūcijas vienādojums stabilitātes analīzei divu fāžu sekla ūdens plūsmām. 9. *Latvijas matemātikas konference*. Latvija, Jelgava, 30.-31. marts, 2012.
2. Sekla ūdens plūsmas stabilitāte gadījumā, ja bāzes plūsmas profils nav simetrisks. 8. *Latvijas matemātikas konference*. Latvija, Valmiera, 9.–10. aprīlis, 2010.

1. Problēmas matemātiskais formulējums

1.1. Literatūras apskats

Lai analizētu šķidruma plūsmas uzvedību, plaši izmanto lineārās stabilitātes teoriju ([9], [11], [49] un [55]). Daudzos tehnoloģiju lietojumos hidromehānikā plūsmas šķērsvirziena garuma mērogs ir daudz lielāks nekā ūdens dziļums. Šādas plūsmas parasti dēvē par seklā ūdens plūsmām. Nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās dinamika izraisa īpašu interesi (plūsmas kombinētos un saliktos kanālos, plūsmas upju satecēs). Seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņu analīzes metodes ietver eksperimentālu izpēti, skaitlisko modelēšanu un stabilitātes analīzi [39]. Eksperimentālā izpēte seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem ir daudz aprakstīta, piemēram, [6], [59] un [60]. Šajos pētījumos parādīts, ka gultnes berzei ir svarīga loma perturbāciju samazināšanā.

Seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņu lineārā stabilitāte tiek aprakstīta [5], [7], [32], [41], [43] un [52]. Lai noteiktu stabilitātes kritiskās vērtības, gultnes berzes koeficientam tiek izmantots „cietā vāka” pieņēmums [7] (ūdens dziļums ir pieņemts par konstantu). Seklā ūdens plūsmu stabilitātes analīzei „cietā vāka” pieņēmums tiek analizēts [32], kur ir parādīts, ka maziem Frūde skaitļiem kļūda, izmantojot „cietā vāka” pieņēmumu, ir diezgan maza. Frūde skaitļa ietekme uz stabilitāti seklā ūdens sajaukšanās slāņos kombinētos un saliktos kanālos tiek pētīta [41]. Teorētiskie rezultāti un skaitliskie aprēķini sniegti [5], [7], [32], [41], [43] un [52]. Tie apliecina eksperimentālos apsvērumus, ka gultnes berze stabilizē plūsmu un samazina perturbāciju izaugsmi sajaukšanās slāņos.

Centrifugālā nestabilitāte var notikt arī seklā ūdens sajaukšanās slāņos. Neliela izliekuma ietekme uz plūsmas stabilitāti brīvās sajaukšanās slāņos tiek pētīta [34], [38] un [50]. Darbā [50] parādīts, ka izliekumam ir stabilizējoša ietekme uz stabilu izliektu sajaukšanās slāni un destabilizējoša ietekme uz nestabilu izliektu sajaukšanās slāni.

Lineāro stabilitātes analīzi var lietot, lai noteiktu, kad konkrēta plūsma kļūst nestabila. Parametru kritiskās vērtības (piemēram, stabilitātes parametru, viļņu skaitu utt.) arī var aprēķināt, izmantojot lineārās stabilitātes teoriju. Taču nestabilitātes attīstību stabilitātes līknes virsotnes apkārtnē nevar analizēt ar lineāro teoriju. Vāji nelineārā teorija [35], [57] tiek izmantota amplitūdas evolūcijas vienādojumu sastādīšanai visnestabilākajā režīmā. Šīs teorijas pamatā ir vairāku mērogu metode [40], tā ir piemērojama, ja plūsma ir nestabila, bet parametru vērtības (piemēram, Reinoldsa skaitlis vai seklā ūdens plūsmu stabilitātes parametrs) ir tuvu kritiskajām vērtībām. Šajā gadījumā pieauguma temps nestabilai perturbācijai ir mazs un ir iespējamība nestabilitātes attīstību analizēt ar relatīvi vienkāršiem evolūcijas vienādojumiem. Šāda pieeja ir izmantota [57] Puazeiļa plūsmai plaknē, [2] un [46], lai analizētu nestabilitāti vēja radītiem viļņiem, seklā ūdens plūsmās aiz šķēršļiem [29], [32], [42], [43] un [51]. Faktiski amplitūdas vienādojumus literatūrā apraksta divos veidos. Pirmajā veidā apriori tiek izvēlēta konkrēta evolūcijas vienādojuma forma un vienādojuma koeficienti tiek ņemti no eksperimentālajiem

datiem. Tad vienādojumus ar šiem koeficientiem izmanto modelēšanai. Otrajā veidā evolūcijas vienādojumu faktiski var iegūt no kustības vienādojumiem. Šī pieeja ir izmantota [2], [29], [43], [44], [47], [53], [56] un [57], kur ir pierādīts, ka divdimensiju gadījumos evolūcijas vienādojums ir komplekss Ginzburga–Landau vienādojums. Vienādojuma koeficienti iegūti integrāļu formā, kas satur parametru kritiskās vērtības no lineārās stabilitātes problēmu risinājuma.

Ginzburga–Landau vienādojums un tā īpašības ir plaši pētītas literatūrā ([1], [10]). Ginzburga–Landau vienādojuma skaitliskā analīze ir vienkāršāka nekā skaitliskā kustības vienādojumu risināšana. Turklāt Ginzburga–Landau vienādojumu stabilitātes analīze dažiem vienkāršiem (piemēram, periodiskiem) risinājumiem ļauj pētniekiem vienkāršot plūsmu dinamikas analīzi laikā un telpā.

Lineārā nestabilitāte seklā ūdens sajaukšanās slāņiem tiek analizēta [4], [7], [32] un [41], pamatojoties uz pieņēmumu, ka gultnes berze tiek modelēta, izmantojot Čeizi formulu [48]. Tiek pieņemts, ka berzes koeficients ir nemainīgs. Parasti berzes koeficients ir iegūts no daļēji empīriskas formulas [54], kas saista berzes koeficienta vērtību ar Reinolda skaitli un plūsmas virsmas raupjumu. Šādā gadījumā tiek pieņemts, ka berzes koeficients ir konstants visā plūsmas apgabalā.

Atsevišķos lietojumos berze ievērojami mainās šķērsvirzienā. Viens konkrēts piemērs ir saistīts ar daļēju veģetāciju nosacījumu seklā ūdens plūsmām. Šāda situācija bieži sastopama plūdu laikā [61]. Berzes spēks veģetāciju zonā ir lielāks nekā galvenajā kanālā. Šajā gadījumā bāzes plūsmas profils kļūst asimetrisks [61]. Berzes spēku izmaiņa starp daļēju veģetācijas zonu un galveno kanālu tiek veidota [61] ar pakāpienveida funkciju. Lineārās stabilitātes analīze tiek veikta [61] saskaņā ar pieņēmumu, ka bāzes plūsmas profils ir simetrisks.

1.2. Seklā ūdens vienādojumi

Seklā ūdens vienādojumi ir viduvētie vienādojumi, kas iegūti, integrējot šķidrums mehānikas vienādojumus attiecībā pret vertikālo koordinātu. Tā kā integrēšana notiek pēc ūdens dziļuma, ir nepieciešams precizēt brīvās virsmas un gultnes spriegumus. Brīvās virsmas spriegumi pārsvarā ir daudz mazāki nekā gultnē, tāpēc parasti seklā ūdens vienādojumos tiek ņemti vērā tikai gultnes spriegumi. Gultnes berzes aprēķinos praksē tiek izmantotas empīriskās formulas (piemēram, Čeizi vai Meininga formula). Detalizēts izvedums seklā ūdens vienādojumiem ir dots [4].

Seklā ūdens vienādojumi ar „cietā vāka” pieņēmumu un nelielu izliekumu ir šādā formā:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{c_f}{2h} u \sqrt{u^2 + v^2} - B(u^p - u) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} u^2 + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{c_f}{2h} v \sqrt{u^2 + v^2} - B(v^p - v) = 0, \quad (1.3)$$

kur x, y – ģeometriskās koordinātas;
 t – laiks;
 u un v – šķidrums viduvētā ātruma komponentes x un y virzienā;
 p – spiediens;
 h – ūdens dziļums;
 c_f – berzes koeficients (var būt funkcija no y);
 B – daļiņu iekraušanas koeficients ([62], [63]);
 u^p un v^p – daļiņu ātruma komponentes x un y virzienā;
 $\frac{1}{R} = \frac{\delta_*}{R_*} \ll 1$ mazs parametrs;
 R_* – liektā sajaukšanās slāņa centra līnijas liekuma rādiuss;
 δ_* – sajaukšanās slāņa biezums.

Vienādojumā (1.2) un (1.3) tiek pieņemts, ka plūsma var saturēt smagas daļiņas. To eksistences efekts tiek ņemts vērā kopā ar daļiņu skaitu uz plūsmas tilpumu vienību B ([62], [63]). Vienādojumi (1.1)–(1.3) ir iegūti, ņemot vērā, ka plūsma aplūkota pie lieliem Stoksa skaitļiem, kas nozīmē, ka nav dinamiskas mijiedarbības starp šķidrumu un daļiņām.

Vienādojumos (1.1)–(1.3) ir izmantots „cietā vāka” pieņēmums. Gultnes berze ir iekļauta (1.2) un (1.3), izmantojot Čeizi formulu [4].

Berzes koeficients dažos lietojumos mainās šķērsvirzienā. Piemēram, plūdu laikā, kur seklais ūdens tek cauri apgabalam ar daļēju veģetāciju [61], vai plūsmas kombinētos un saliktos kanālos [41]. Berzes koeficienta izmaiņas šķērsvirzienā aprakstītas ar gludu diferencējamās formas funkciju $c_f(y)$.

2. Stabilitāte nedaudz izliektas seklā ūdens plūsmas sajaukšanās slāņiem

2.1. Lineārā stabilitāte

Apskatīsim seklā ūdens vienādojumus ar „cietā vāka” pieņēmumu un nelielu izliekumu formā (1.1)–(1.3), kur $B = 0$ ([14], [15], [16], [25]).

No šiem vienādojumiem izslēdzam spiedienu p un definējam plūsmas funkciju $\psi(x, y, t)$ ar formulām

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_y, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi_x, \quad (2.1)$$

un, apzīmējot $\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$, sistēma (1.1)–(1.3) tiek pārveidota vienā vienādojumā:

$$\begin{aligned}
& (\Delta\psi)_t + \psi_y(\Delta\psi)_x - \psi_x(\Delta\psi)_y + \frac{2}{R}\psi_y\psi_{xy} + \frac{c_f}{2h}\Delta\psi\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} + \\
& + \frac{c_f}{2h\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}}(\psi_y^2\psi_{yy} + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_x^2\psi_{xx}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

kur indeksi norāda atvasinājumus pēc mainīgā x, y un t .

Šeit tiek izmantots paralēlās plūsmas pieņēmums. Tas paredz, ka bāzes plūsmas garenvirzienā nemainās. Kā jau tas norādīts [47], šī aproksimācija ir vairāku mērogu metodes paplašināšana augstākas kārtas risinājumam, kurā ņem vērā lēno plūsmas diverģenci.

Aplūkosim plūsmas funkciju $\psi(x, y, t)$ formā

$$\psi = \psi_0 + \psi', \tag{2.3}$$

kur apostrofa zīme apzīmē mazas perturbācijas.

Ievietojot (2.3) vienādojumā (2.2) un linearizējot rezultātu (tā kā perturbācija ir maza, tās kvadrātiskos locekļus var ignorēt), iegūstam:

$$\begin{aligned}
& \psi_{xxt} + \psi_{yyt} + \psi_{0y}(\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) - \psi_{0yy}\psi_x \\
& + \frac{c_f}{2h}(\psi_{0y}\psi_{xx} + 2\psi_{0yy}\psi_y + 2\psi_{0y}\psi_{yy}) + \frac{2}{R}\psi_{0y}\psi_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Izmantojot normālo modu metodi [11], perturbācija tiek meklēta formā:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{ik(x-ct)}, \tag{2.5}$$

kur $\varphi(y)$ – normālās perturbācijas amplitūda;

k – viļņa skaitlis;

c – perturbācijas fāzes ātrums.

Ievietojot (2.5) un ψ atvasinājumus pēc x, y vai t (2.4) un apzīmējot $U = \psi_{0y}$ (bāzes plūsma), iegūstam:

$$\begin{aligned}
& \varphi''(ik(U-c) + SU) + \varphi'\left(\frac{2}{R}ikU + SU_y\right) \\
& + \varphi\left(ik^3c - ik^3U - ikU_{yy} - \frac{k^2SU}{2}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

kur $S = \frac{c_f\delta_*}{h}$ – bezdimensijas stabilitātes parametrs;

δ_* – sajaukšanās slāņa platums.

Robežnosacījumi ir

$$\varphi(\pm\infty) = 0. \quad (2.7)$$

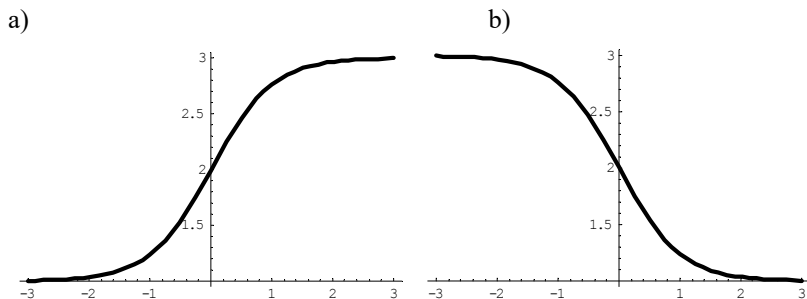
Izmantojot lineārās stabilitātes teoriju, var noteikt nosacījumus, pie kuriem plūsma zaudē stabilitāti. Bāzes plūsmas lineāro stabilitāti nosaka īpašvērtības $c = c_r + ic_i$. Bāzes plūsma tiek uzskatīta par lineāri stabilu, ja visi $c_i < 0$, un nestabilu, ja vismaz viens $c_i > 0$. Skaitliskais atrisinājums atbilstošajā īpašvērtību uzdevumā (2.6)–(2.7) ļauj iegūt parametru kritiskās vērtības. Tomēr lineāro teoriju nevar izmantot, lai prognozētu perturbācijas attīstību. Nestabilitātes apgabalā perturbācija aug eksponenciāli laikā (2.5). Ja pieaugums ir liels, tad nelineārais efekts ātri kļūst dominējošs un ir maz cerību analizēt nestabilitātes attīstību analītiski. Gadījumā, ja pieauguma ātrums ir salīdzinoši neliels, tad vāji nelineāro analīzi var izmantot, lai sastādītu vienādojumu perturbācijas amplitūdas attīstībai (amplitūdas evolūcijas vienādojums) stabilitātes līknes virsotnes apkārtnē.

Bāzes plūsmu seklā ūdens vienādojumu gadījumā parasti izvēlas kā relatīvi vienkārša modeļa ātruma profilus, balstoties uz pieejamiem eksperimentālajiem datiem. Piemēram, hiperboliskā tangensa profils sekliem sajaukšanās slāņiem vai hiperboliskā sekansa profils seklām plūsmām aiz šķēršļiem. Izmantosim šādus profilus (2.1. att.):

$$U(y) = 2 + \tanh y \quad (2.8)$$

un

$$U(y) = 2 - \tanh y. \quad (2.9)$$



2.1. att. Bāzes plūsmu profili: a) $U(y) = 2 + \tanh y$ un b) $U(y) = 2 - \tanh y$.

Ātruma profils (2.8) atbilst sajaukšanās slānim, kad lielākā ātruma plūsma ir ārpusē mazākā ātruma plūsmai. Profīlam (2.9) ir pretēja situācija (ātrgaitas plūsma ir iekšpusē zemākā ātruma plūsmai). Kā ir parādīts [52], eksperimentāli novērotam bāzes plūsmas ātruma profīlam ir līdzīgas formas.

2.2. Skaitliskā metode lineārai stabilitātei

Īpašvērtību uzdevumi (2.6)–(2.7) tiek risināti skaitliski, izmantojot pseidospektrālo kolokācijas metodi [3], kas balstās uz Čebiševa polinomiem. Izmantojot substitūciju $r = \frac{2}{\pi} \arctan y$, intervāls $-\infty < y < +\infty$ tiek pārveidots intervālā $(-1, 1)$. Vienādojuma (2.6) atrisinājums tiek meklēts formā:

$$\varphi(r) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j (1-r^2) T_j(r), \quad (2.10)$$

kur $T_j(r) = \cos j \arccos r$ ir j -tās kārtas pirmā veida Čebiševa polinoms, a_j ir nezināmie koeficienti.

Reizinātājs $(1-r^2)$ garantē, ka robežnosacījumi (2.7) ar jauno mainīgo r pie $r = \pm 1$ ir izpildīti automātiski, un tas ievērojami samazina matricas nosacītības skaitli [37].

Robežuzdevuma (2.6), (2.7) aprēķināšanai izmantosim šādu kolokācijas punktu kopu:

$$r_m = \cos \frac{\pi m}{N+1}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.11)$$

Ievietojot funkciju $\varphi(r)$ un to atvasinājumus kolokācijas punktos vienādojumā (2.6), iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu formā:

$$(B - cD)a = 0, \quad (2.12)$$

kur B un D ir komplekso skaitļu $N \times N$ matricas, matrica D nav singulāra, $a = (a_0 \ a_1 \dots a_{N-1})^T$.

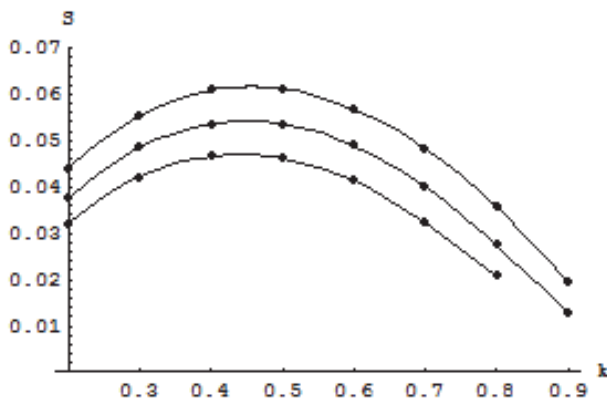
2.1. tabula

Parametru vērtības seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem bāzes plūsmas ātruma profilam (2.8)

k	$S(1/R=0)$	$S(1/R=0,01)$	$S(1/R=0,02)$	$S(1/R=0,03)$	$S(1/R=0,04)$
0.1	0.0260	0.0230	0.0205	0.0194	0.0258
0.2	0.0441	0.0408	0.0377	0.0348	0.0321
0.3	0.0554	0.0519	0.0485	0.0452	0.0421
0.4	0.0609	0.0572	0.0536	0.0501	0.0466
0.5	0.0612	0.0574	0.0536	0.0499	0.0462
0.6	0.0568	0.0529	0.0490	0.0451	0.0412
0.7	0.0482	0.0442	0.0402	0.0361	0.0322
0.8	0.0357	0.0316	0.0275	0.0234	0.0224
0.9	0.0196	0.0154	0.0150	0.0142	0.0138

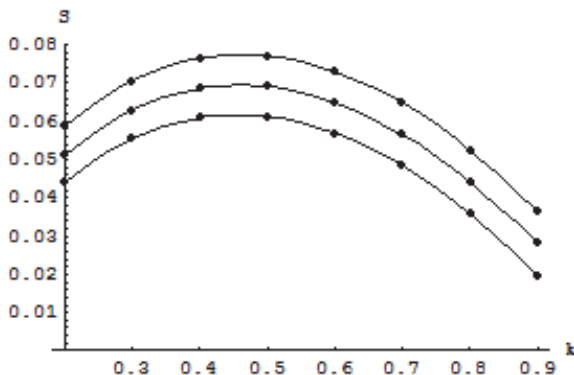
Uzdevums (2.12) ir atrisināts skaitliski, izmantojot *IMSL (International Mathematics and Statistics Library)* programmu *DGVCCG*, kas aprēķina visas īpašvērtības un īpašvektorus vispārinātai kompleksai īpašvērtību sistēmai $Az = \lambda Bz$. Skaitlisko aprēķinu rezultāti bāzes plūsmas ātruma profilam (2.8) ir parādīti 2.1. tabulā.

2.2. attēlā parādītas trīs marginālās stabilitātes līknes attiecīgi (no augšas uz leju) trijām parametra vērtībām: $1/R = 0; 0,02; 0,04$. Nestabilitātes apgabals ir zem līknes [15].



2.2. att. Marginālās stabilitātes līknes bāzes plūsmas ātruma profilam (2.8).

Marginālās stabilitātes līknes bāzes plūsmas profilam (2.9) tiek parādītas 2.3. attēlā. Parametru vērtības attiecīgi (no augšas uz leju) ir $1/R = 0,04; 0,02$ un 0 .



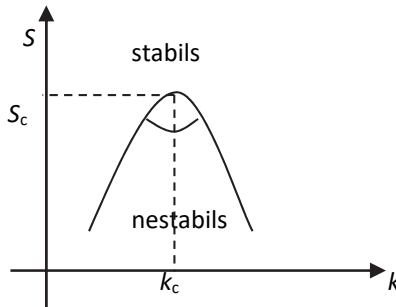
2.3. att. Marginālās stabilitātes līknes bāzes plūsmas ātruma profilam (2.9).

Skaitlisko aprēķinu rezultāti liecina, ka izliekums stabilizē plūsmu stabili izliektu sajaukšanās slāņu gadījumā, savukārt nestabili izliektu sajaukšanās slāņu izliekums dod destabilizējošu ietekmi uz plūsmu [16].

2.3. Vāji nelineārās metodes

Vāji nelineārā analīze tiek veikta stabilitātes līknes virsotnes apkārtņē (2.4. att.). Atbilstošie vienādojumi iepriekš iegūti dažādu plūsmu gadījumā, kā, piemēram, Puazeiļa plūsmas, seklā ūdens plūsmas ([2], [29], [33], [43], [44], [46], [57]).

Pieņemsim, ka S_c , k_c un c_c ir attiecīgi stabilitātes parametra, viļņu skaitļa un viļņu ātruma kritiskās vērtības. Tad visnestabilāko režīmu (saskaņā ar lineāro teoriju) var noteikt no (2.5) pie $S = S_c$, $k = k_c$ un $c = c_c$, kur īpašfunkciju $\varphi(y)$ var aizstāt ar $C\varphi(y)$. Konstanti C nevar noteikt no lineārās stabilitātes teorijas.



2.4. att. Tipiska marginālās stabilitātes līkne seklā ūdens plūsmai.

Paņemsim (k, S) plaknē tādu parametru S , kurš ir nedaudz mazāks par kritisko vērtību:

$$S = S_c(1 - \varepsilon^2). \quad (2.13)$$

Parametrs ε raksturo, cik tuvu kritiskai vērtībai S_c atrodas parametrs S . Turklāt (2.13) nozīmē, ka bāzes plūsma ir nestabila, ja stabilitātes parametrs ir vienāds ar S . Tomēr, tā kā ε ir mazs, pieauguma temps visnestabilākajām perturbācijām arī ir mazs. Līdz ar to var mēģināt raksturot nestabilitātes attīstību analītiski ar vāji nelineāro teoriju.

Ieviešam šādus "lēnos" mainīgos [57]:

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad \xi = \varepsilon(x - c_g t), \quad (2.14)$$

kur c_g ir grupas ātrums.

Konstante C tiek aizstāta ar perturbācijas amplitūdas funkciju A , kura ir vāji atkarīga no koordinātas un laika. Tāpēc $A = A(\xi, \tau)$ un funkcija ψ no (2.5) ir:

$$\begin{aligned}\psi_1(x, \xi, y, t, \tau) &= A(\xi, \tau)\varphi(y)e^{ik(x-ct)} + A^*(\xi, \tau)\varphi^*(y)e^{-ik(x-ct)} \\ &= A(\xi, \tau)\varphi(y)e^{ik(x-ct)} + c.c. ,\end{aligned}\quad (2.15)$$

kur $*$ un saīsinājums $c.c.$ nozīmē kompleksi saistītais.

Vienādojuma (2.4) atrisinājums ψ tiek meklēts formā:

$$\psi = \psi_0(y) + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \varepsilon^3\psi_3 + \dots, \quad (2.16)$$

Ievietojot (2.13)–(2.16) vienādojumā (2.4) un sagrupējot locekļus, kas satur ε , ε^2 , ε^3 , iegūsim trīs vienādojumus. Apzīmēsim:

$$\begin{aligned}L\varphi &\equiv \varphi_{xxt} + \varphi_{yyt} + \varphi_{0y}\varphi_{xxx} + \varphi_{0y}\varphi_{yyx} - \varphi_{0yy}\varphi_x \\ &+ \frac{2}{R}\varphi_{0y}\varphi_{1xy} + \frac{c_f}{2h}\left(\varphi_{0y}\varphi_{xx} + 2\varphi_{0yy}\varphi_y + 2\varphi_{0y}\varphi_{yy}\right),\end{aligned}\quad (2.17)$$

tad pirmais vienādojums (pie ε) ir veidā:

$$L\psi_1 = 0. \quad (2.18)$$

Izmantojot apzīmējumu $U = \psi_{0y}$, no (2.18) iegūsim:

$$\begin{aligned}\psi_{1xxt} + \psi_{1yyt} + U\psi_{1xxx} + U\psi_{1xyy} - U_{yy}\psi_{1x} \\ + \frac{2}{R}U\psi_{1xy} + \frac{c_f}{2h}\left(U\psi_{1xx} + 2U_y\psi_{1y} + 2U\psi_{1yy}\right) = 0.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Otrais vienādojums (pie ε^2) ir iegūts formā:

$$L\psi_2 = f_2, \quad (2.20)$$

kur

$$\begin{aligned}f_2 &= c_g(\psi_{1xx\xi} + \psi_{1yy\xi}) - 2\psi_{1x\xi}t - 3U\psi_{1xx\xi} - \psi_{1y}\psi_{1xxx} \\ &- \psi_{1y}\psi_{1yyx} - U\psi_{1\xi yy} + \psi_{1x}\psi_{1xxy} + \psi_{1x}\psi_{1yyy} + U_{yy}\psi_{1\xi} \\ &- \frac{c_f}{2h}(\psi_{1xx}\psi_{1y} + 2U\psi_{1x\xi} + 2\psi_{1yy}\psi_{1y} - 2UU_y + 2\psi_{1x}\psi_{1xy}) \\ &- \frac{2}{R}(U\psi_{1\xi y} + \psi_{1y}\psi_{1xy}).\end{aligned}$$

Jāņem vērā, ka operators kreisajā pusē (2.20) ir tāds pats kā (2.18) un tas būs vienāds pie jebkuras ε kārtas.

Trešo vienādojumu (pie ε^3) var pārrakstīt šādi:

$$L\psi_3 = f_3, \quad (2.21)$$

kur

$$\begin{aligned} f_3 = & c_g(\psi_{2xx\xi} + \psi_{2yy\xi}) - \psi_{1xx\tau} - 2\psi_{2x\xi\tau} + 2c_g\psi_{1x\xi\xi} - \psi_{1\xi\xi\tau} \\ & - \psi_{1yy\tau} - 3U\psi_{2xx\xi} - 3U\psi_{1x\xi\xi} - \psi_{1y}\psi_{2xxx} - 3\psi_{1y}\psi_{1xx\xi} - \psi_{2y}\psi_{1xxx} \\ & - \psi_{2y}\psi_{1yyx} - \psi_{1y}\psi_{2yyx} - \psi_{1y}\psi_{1\xi yy} - U\psi_{2\xi yy} + \psi_{2x}\psi_{1xxy} + \psi_{1\xi}\psi_{1xxy} \\ & + \psi_{1x}\psi_{2xxy} + 2\psi_{1x}\psi_{1xy\xi} + \psi_{1x}\psi_{2yyy} + \psi_{2x}\psi_{1yyy} + \psi_{1\xi}\psi_{1yyy} + \psi_{2\xi}U_{yy} \\ & - \frac{c_f}{2h} \left(\psi_{1xx}\psi_{2y} + \frac{3\psi_{1xx}\psi_{1x}^2}{2U} + \psi_{2xx}\psi_{1y} + 2\psi_{1x\xi}\psi_{1y} + 2U\psi_{2x\xi} \right. \\ & \left. + U\psi_{1\xi\xi} + 2\psi_{1yy}\psi_{2y} + 2\psi_{2yy}\psi_{1y} - U\psi_{1xx} - 2U_y\psi_{1y} \right. \\ & \left. - 2U\psi_{1yy} + 2\psi_{1x}\psi_{2xy} + 2\psi_{1x}\psi_{1\xi y} + 2\psi_{2x}\psi_{1xy} + 2\psi_{1\xi}\psi_{1xy} \right) \\ & - \frac{2}{R} \left(U\psi_{2\xi y} + \psi_{1y}\psi_{2xy} + \psi_{1y}\psi_{1\xi y} + \psi_{1xy}\psi_{2y} \right) \end{aligned}$$

Lineārās stabilitātes problēmas (2.6) un (2.7) atrisinājums ir aplūkots 2.2. apakšnodaļā.

Tālāk apskatīsim vienādojuma (2.20) risinājumu. Ņemot vērā funkcijas f_2 struktūru, visas izteiksmes var sadalīt trīs grupās:

- 1) locekļi, kas nav atkarīgi no laika;
- 2) locekļi, kas ir proporcionāli pirmajai harmonikai $e^{ik(x-ct)}$ (šeit un tālāk izmantosim apzīmējumus $k = k_c$ un $c = c_c$);
- 3) locekļi, kas ir proporcionāli otrajai harmonikai $e^{2ik(x-ct)}$.

Tādējādi funkciju ψ_2 arī jāmeklē formā, kas satur tāda paša trīs veida izteiksmes. Precīzāk, (2.20) atrisinājumu jāmeklē formā:

$$\begin{aligned} \psi_2 = & AA^*\varphi_2^{(0)}(y) + A_\xi\varphi_2^{(1)}(y)e^{ik(x-ct)} + A^2\varphi_2^{(2)}(y)e^{2ik(x-ct)} \\ & + AA^*\varphi_2^{(0)*}(y) + A_\xi^*\varphi_2^{(1)*}(y)e^{-ik(x-ct)} + A^{2*}\varphi_2^{(2)*}(y)e^{-2ik(x-ct)} \quad (2.22) \\ = & AA^*\varphi_2^{(0)}(y) + A_\xi\varphi_2^{(1)}(y)e^{ik(x-ct)} + A^2\varphi_2^{(2)}(y)e^{2ik(x-ct)} + c.c., \end{aligned}$$

kur $\varphi_2^{(0)}(y)$, $\varphi_2^{(1)}(y)$ un $\varphi_2^{(2)}(y)$ ir nezināmas funkcijas, kas atkarīgas no y ;

A^* ir kompleksi saistītais no A ;

augšējais indekss atspoguļo harmoniskas komponentes grupu;

apakšējais indekss atspoguļo aproksimācijas kārtu.

Sagrupējot locekļus, kas ir proporcionāli AA^* , vienādojumā (2.20), iegūstam parasto diferenciālvienādojumu funkcijai $\varphi_2^{(0)}$:

$$4S(U_y\varphi_{2y}^{(0)} + U\varphi_{2yy}^{(0)}) = ik(\varphi_{1y}\varphi_{1yy}^* - \varphi_{1y}^*\varphi_{1yy} + \varphi_1\varphi_{1yyy}^* - \varphi_1^*\varphi_{1yyy}) - \frac{S}{2}(k^2\varphi_1\varphi_{1y}^* + k^2\varphi_1^*\varphi_{1y} + 2\varphi_{1y}\varphi_{1yy}^* + 2\varphi_{1y}^*\varphi_{1yy}) \quad (2.23)$$

Funkcija $\varphi_2^{(0)}(y)$ apmierina šādus robežnosacījumus:

$$\varphi_2^{(0)}(\pm\infty) = 0. \quad (2.24)$$

Analoģiski, sagrupējot locekļus, kas ir proporcionāli $e^{ik(x-ct)}$, iegūstam parasto diferenciālvienādojumu funkcijai $\varphi_2^{(1)}$ ar robežnosacījumiem:

$$ik^3c\varphi_2^{(1)} - ikc\varphi_{2yy}^{(1)} - ik^3U\varphi_2^{(1)} + ikU\varphi_{2yy}^{(1)} - ikU_{yy}\varphi_2^{(1)} + ik\frac{2}{R}U\varphi_{2y}^{(1)} - \frac{c_f}{2h}(Uk^2\varphi_2^{(1)} - 2U_y\varphi_{2y}^{(1)} - 2U\varphi_{2yy}^{(1)}) = (c_g - U)\varphi_{1yy} \quad (2.25)$$

$$- \frac{2}{R}U\varphi_{1y} + \left(-c_gk^2 - 2k^2c + 3Uk^2 + U_{yy} - \frac{c_f}{2h}2Uik\right)\varphi_1$$

$$\varphi_2^{(1)}(\pm\infty) = 0. \quad (2.26)$$

Nobeigumā, sagrupējot locekļus, kas ir proporcionāli $e^{2ik(x-ct)}$, iegūstam vienādojumu funkcijai $\varphi_2^{(2)}$:

$$8ik^3c\varphi_2^{(2)} - 2ikc\varphi_{2yy}^{(2)} - 8ik^3U\varphi_2^{(2)} + 2ikU\varphi_{2yy}^{(2)} - 2ikU_{yy}\varphi_2^{(2)} + \frac{2}{R}2ikU\varphi_{2y}^{(2)} - \frac{c_f}{2h}(4k^2U\varphi_2^{(2)} - 2U_y\varphi_{2y}^{(2)} - 2U\varphi_{2yy}^{(2)}) \quad (2.27)$$

$$= ik(\varphi_1\varphi_{1yyy} - \varphi_{1y}\varphi_{1yy}) - \frac{c_f}{2h}(-3k^2\varphi_1\varphi_{1y} + 2\varphi_{1y}\varphi_{1yy}) - \frac{2}{R}ik\varphi_{1y}^2$$

ar robežnosacījumiem

$$\varphi_2^{(2)}(\pm\infty) = 0. \quad (2.28)$$

Salīdzinot (2.6) un (2.25), redzam, ka abu vienādojumu kreisās puses sakrīt, ja $\varphi_1(y)$ aizvieto ar $\varphi_2^{(1)}(y)$. Izmantojot Fredholma alternatīvu [64], secinām, ka vienādojumam (2.25) ir atrisinājums tad un tikai tad, ja vienādojuma labā puse ir ortogonāla visām īpašfunkcijām attiecīgajam saistītajam uzdevumam.

Saistītais operators L^a un saistītās īpašfunkcijas φ_1^a ir noteiktas šādi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \cdot L \varphi_1 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \cdot L^a \varphi_1^a dy. \quad (2.29)$$

Vienādojuma (2.29) kreisā puse ir vienāda ar nulli, jo $L \varphi_1 = 0$. Tāpēc saistītais uzdevums tiek definēts šādi:

$$L^a \varphi_1^a = 0. \quad (2.30)$$

Integrējot kreiso pusi (2.29) un izmantojot robežnosacījumu (2.7), iegūstam saistīto operatoru:

$$\begin{aligned} L^a \varphi_1^a &\equiv \varphi_{1yy}^a \left(U - c - \frac{iSU}{k} \right) + \varphi_{1y}^a \left(2U_y - \frac{iSU_y}{k} - \frac{2}{R}U \right) \\ &+ \varphi_1^a \left(k^2 c - k^2 U + \frac{ikSU}{2} - \frac{2}{R}U_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Robežnosacījumi ir

$$\varphi_1^a(\pm\infty) = 0. \quad (2.32)$$

Izmantojot atrisināmības nosacījumu vienādojumam (2.25), noteiksim grupas ātrumu:

$$c_g = \frac{\eta_l}{\eta}, \quad (2.33)$$

kur

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a (\varphi_{1yy} - k^2 \varphi_1) dy \quad (2.34)$$

$$\eta_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(U \varphi_{1yy} + \frac{2}{R} U \varphi_{1y} + (2k^2 c - 3k^2 u_0 - U_{yy} + ikUS) \varphi_1 \right) dy. \quad (2.35)$$

Skaitliski aprēķinot trīs robežuzdevumus (2.23) un (2.24), (2.25) un (2.26), (2.27) un (2.28), iegūstam funkcijas $\varphi_2^{(0)}(y)$, $\varphi_2^{(1)}(y)$ un $\varphi_2^{(2)}(y)$. Funkciju ψ_2 aprēķinām no (2.22).

Amplitūdas $A(\xi, \tau)$ evolūcijas vienādojums tiek noteikts no trešās kārtas tuvinājuma (2.21) atrisināmības nosacījumiem. Vienādojumam (2.21) ir atrisinājums tad un tikai tad, ja vienādojuma labā puse ir ortogonāla visām attiecīgā homogēnā saistītā uzdevuma (2.31) un (2.32) īpašfunkcijām φ_1^a . Izmantojot atrisināmības nosacījumu vienādojumam (2.21), noteiksim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^a \cdot L \psi_3 dy = 0 \quad (2.36)$$

Vienādojums (2.36) tiek pārvērsts amplitūdas $A(\xi, \tau)$ evolūcijas vienādojuma formā:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \sigma A + \delta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \mu |A|^2 A. \quad (2.37)$$

Vienādojums (2.37) ir Ginzburga–Landau vienādojums kompleksā veidā. Vienādojuma koeficienti ir kompleksie skaitļi σ, δ un μ :

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\eta}, \quad \delta = \frac{\delta_1}{\eta}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\eta}. \quad (2.38)$$

Koeficients σ_1, δ_1 un μ_1 tiek aprēķināts šādi :

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\begin{aligned} &6ik^3 \varphi_2^{(2)} \varphi_{1y}^* - 2ik \varphi_{1y}^* \varphi_{2yy}^{(2)} + 3ik^3 \varphi_1^* \varphi_{2y}^{(2)} + ik^3 \varphi_1 (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) \\ &- ik \varphi_{1yy} (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) + ik \varphi_{2y}^{(2)} \varphi_{1yy}^* + ik \varphi_1 (\varphi_{2yyy}^{(0)} + \varphi_{2yyy}^{*(0)}) \\ &- ik \varphi_1^* \varphi_{2yyy}^{(2)} + 2ik \varphi_{1yyy}^* \varphi_2^{(2)} - 2 \frac{ik}{R} (\varphi_{2y}^{(2)} \varphi_{1y}^* + \varphi_{2y}^{(0)} \varphi_{1y}) \\ &- k^2 \varphi_1 (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) + 3k^2 \varphi_1^* \varphi_{2y}^{(2)} - \frac{3k^4}{2u_0} \varphi_1^2 \varphi_1^* \\ &- \frac{S}{2} + 2\varphi_{1yy} (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) + 2\varphi_{1yy}^* \varphi_{2y}^{(2)} \\ &+ 2\varphi_{1y} (\varphi_{2yy}^{(0)} + \varphi_{2yy}^{*(0)}) + 2\varphi_{2yy}^{(2)} \varphi_{1y}^* \end{aligned} \right) dy, \quad (2.39)$$

$$\sigma_1 = \frac{S}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(-k^2 U \varphi_1 + 2U_y \varphi_{1y} + 2U \varphi_{1yy} \right) dy \quad (2.40)$$

$$\delta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\begin{aligned} &(c_g - U) \varphi_{2yy}^{(1)} - 2 \frac{U}{R} \varphi_{2y}^{(1)} \\ &+ \varphi_2^{(1)} (-k^2 c_g - 2k^2 c + 3k^2 U + U_{yy} - ikSU) \\ &+ \varphi_1 \left(2ikc_g + ikc - 3ikU - U \frac{S}{2} \right) \end{aligned} \right) dy. \quad (2.41)$$

Izmantojot plūsmas raksturlielumus, kas iegūti no plūsmas lineārās stabilitātes problēmas risinājuma, formulas (2.38)–(2.41) nosaka vienādojuma (2.37) koeficientus.

2.4. Skaitliskā metode vāji nelineārai stabilitātei

Lai iegūtu σ , δ un μ , ir nepieciešams veikt šādus aprēķinus:

1) atrisināt lineārās stabilitātes problēmu (2.6) un (2.7) un noteikt parametru k, S, c kritiskās vērtības un atbilstošās īpašfunkcijas $\varphi_1(y)$;

2) atrisināt homogēno saistīto uzdevumu (2.31) un (2.32) un noteikt saistītās īpašfunkcijas φ_1^a ;

3) atrisināt trīs robežuzdevumus (2.23) un (2.24), (2.25) un (2.26), (2.27) un (2.28) un noteikt funkcijas $\varphi_2^{(0)}(y)$, $\varphi_2^{(1)}(y)$ un $\varphi_2^{(2)}(y)$;

4) aprēķināt integrāļus no (2.38).

Vispirms aprēķinām matricu B un D elementus (2.12), tad īpašvērtību uzdevums (2.6) un (2.7) tiek rēķināts skaitliski. Līdzīgā veidā atrisināti robežuzdevumi (2.23) un (2.24), (2.27) un (2.28). Katram robežuzdevumam pēc diskretizācijas iegūsim lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu formā:

$$Fa = G, \quad (2.42)$$

kur $a = (a_0 \ a_1 \dots a_{N-1})^T$

Matrica F šiem robežuzdevumiem nav singulāra. Tāpēc, lai atrastu a , var izmantot jebkuru lineāru vienādojumu risināšanas programmu. Funkcijas $\varphi_2^{(0)}(y)$ un $\varphi_2^{(2)}(y)$ tiek rēķinātas, izmantojot izteiksmi (2.10).

Robežuzdevumu (2.25) un (2.26) atrisinājums arī tiek meklēts formā (2.10). Pēc diskretizācijas iegūsim lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu formā (2.42), bet šoreiz matrica F ir singulāra, jo atbilstošajai homogēnajai daļai no (2.29) ir netriviāls atrisinājums pie $S = S_c$, $k = k_c$ un $c = c_c$. Šajā gadījumā vienādojums (2.42) tiek atrisināts, izmantojot singulāras vērtības dekompozīcijas metodi [36]. Ir zināms, ka gadījumā, kad F ir kompleksa matrica $N \times N$, eksistē tādas ortogonālas $N \times N$ matricas U un V , ka:

$$U^H \cdot F \cdot V = \Sigma, \quad (2.43)$$

kur $\Sigma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$.

Vienādojumu (2.43) sauc par matricas F singulāras vērtības dekompozīciju un $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ ir singulāras matricas F vērtības. Pēdējā no singulārajām vērtībām būs vienāda ar nulli ($\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{N-1} > \gamma_N = 0$). No tā seko, ka (2.42) atrisinājumu var uzrakstīt formā:

$$a = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot U^H \cdot G, \quad (2.44)$$

kur pēdējā matricas V kolonna, pēdējā matricas U^H rinda, kā arī matricas Σ^{-1} pēdējā kolonna un rinda tiek dzēsta.

Atrisinājums komponentešu formā ir:

$$a = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{U_i^H \cdot G \cdot V_i}{\gamma_i}, \quad (2.45)$$

kur U^H un V_i ir vektori (attiecīgi matricu U^H un V kolonnas).

Funkciju $\varphi_2^{(1)}(y)$ vērtības var aprēķināt no formulas (2.10), kur koeficienti a_j ir vektora a komponentes no (2.45).

Skaitļošanas procedūras pēdējais solis ietver integrāļu aprēķinu no (2.38), kurā izmantota adaptīvā kvadratūras formula, kas aprakstīta [30].

3. Lineārā un vāji nelineārā stabilitāte divu komponentešu nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem

3.1. Lineārā stabilitāte

Tiek apskatīts gadījums, kurā šķidrums satur sīkas smagas daļiņas ([62], [63]). Pieņēmumi, kas tiek izmantoti vienādojumos, ir apkopoti 1.2. apakšnodaļā. No šiem vienādojumiem, izmantojot formulas (2.1) un definējot plūsmas funkciju $\psi(x, y, t)$, iegūsim ([12], [13], [27]):

$$\begin{aligned} & (\Delta\psi)_t + \psi_y(\Delta\psi)_x - \psi_x(\Delta\psi)_y + \frac{2}{R}\psi_y\psi_{xy} + \frac{c_f}{2h}\Delta\psi\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \\ & + \frac{c_f}{2h\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}}(\psi_y^2\psi_{yy} + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_x^2\psi_{xx}) + B\Delta\psi = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Perturbācija plūsmas funkcijai $\psi(x, y, t)$ tiek meklēta formā:

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \varepsilon\psi_1(x, y, t) + \varepsilon^2\psi_2(x, y, t) + \varepsilon^3\psi_3(x, y, t) + \dots \quad (3.2)$$

Ievietojot (3.2) vienādojumā (3.1) un linearizējot vienādojumu bāzes plūsmas apkārtne, iegūstam (2.1. apakšnodaļa):

$$L\psi_1 = 0, \quad (3.3)$$

kur

$$L\psi \equiv \psi_{xxt} + \psi_{yyt} + \psi_{0y}\psi_{xx} + \psi_{0y}\psi_{yyx} - \psi_{0yy}\psi_x + \frac{2}{R}\psi_{0y}\psi_{xy} \\ + \frac{c_f}{2h}(\psi_{0y}\psi_{xx} + 2\psi_{0yy}\psi_y + 2\psi_{0y}\psi_{yy}) + B(\psi_{1xx} + \psi_{1yy}) \quad (3.4)$$

Izmantojot normālo modu metodi [11], perturbācija tiek meklēta formā:

$$\psi_1(x, y, t) = \varphi_1(y)e^{ik(x-ct)}. \quad (3.5)$$

Izmantojot (3.3) un (3.5), iegūstam robežuzdevumu:

$$L\varphi_1 \equiv \varphi_1'' \left(U - c - \frac{iSU}{k} - \frac{iB}{k} \right) + \varphi_1' \left(\frac{2U}{R} - \frac{iSU_y}{k} \right) \\ + \varphi_1 \left(k^2 c - k^2 U - U_{yy} + \frac{ikSU}{2} + ikB \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\varphi_1(\pm\infty) = 0. \quad (3.7)$$

Robežuzdevums (3.6) un (3.7) parasti tiek risināts skaitliski. 2.2. apakšnodaļā ir aprakstīts skaitliskās metodes algoritms, kas ļauj iegūt tikai parametru S_c, k_c, c_c kritiskās vērtības. Tipiska marginālās stabilitātes līkne seklā ūdens plūsmām ir izliekta līkne ar vienu maksimumu (koordinātas maksimālam punktam $(k; S)$ plaknē: $k = k_c$ un $S = S_c$).

3.2. Vāji nelineārā stabilitāte

Pieņemsim, ka stabilitātes parametrs ir nedaudz mazāks par kritisko vērtību:

$$S = S_c(1 - \varepsilon^2). \quad (3.8)$$

Ieviešam šādus "lēnos" mainīgos [57]:

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad \xi = \varepsilon(x - c_g t). \quad (3.9)$$

Funkcija ψ_1 tiek definēta šādā formā:

$$\psi_1(x, y, t, \xi, \tau) = A(\xi, \tau)\varphi_1(y)e^{ik(x-ct)}, \quad (3.10)$$

kur $\varphi_1(y)$ ir īpašfunkcija pie $S = S_c$, $k = k_c$ un $c = c_c$.

Mērķis ir iegūt amplitūdas funkcijas $A(\xi, \tau)$ attīstības vienādojumu.

Izmantojot (3.1), (3.2), (3.10) un sagrupējot locekļus, kas satur ε^2 , iegūstam:

$$L_1\psi_2 = \tilde{f}_2 \quad (3.12)$$

Analizējot $\tilde{f}_2$ struktūru vienādojumā (3.12), ψ_2 ir jāmeklē formā:

$$\psi_2 = AA^* \varphi_2^{(0)}(y) + A_\xi \varphi_2^{(1)}(y) e^{ik(x-ct)} + A^2 \varphi_2^{(2)}(y) e^{2ik(x-ct)}, \quad (3.13)$$

kur $\varphi_2^{(0)}(y)$, $\varphi_2^{(1)}(y)$ un $\varphi_2^{(2)}(y)$ ir nezināmas funkcijas, kas atkarīgas no y .

Ievietojot ψ_2 vienādojumā (3.12) un sagrupējot no laika neatkarīgos locekļus, iegūstam robežuzdevumu:

$$\begin{aligned} & 2S \left(U_y \left(\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)} \right) + U \left(\varphi_{2yy}^{(0)} + \varphi_{2yy}^{*(0)} \right) \right) + 2B \left(\varphi_{2yy}^{(0)} + \varphi_{2yy}^{*(0)} \right) \\ & = ik \left(\varphi_{1y} \varphi_{1yy}^* - \varphi_{1y}^* \varphi_{1yy} + \right. \\ & \quad \left. + \varphi_{1yy} \varphi_{1yy}^* - \varphi_{1yy}^* \varphi_{1yy} \right) - \frac{S}{2} \left(k^2 \left(\varphi_{1y} \varphi_{1y}^* + \varphi_{1y}^* \varphi_{1y} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\varphi_{1y} \varphi_{1yy}^* + \varphi_{1yy} \varphi_{1y}^* \right) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\varphi_2^{(0)}(\pm\infty) = 0. \quad (3.15)$$

Sagrupējot locekļus, kas satur pirmo harmoniku, iegūstam robežuzdevumu:

$$\begin{aligned} & \left(U - c - SU \frac{i}{k} - \frac{iB}{k} \right) \varphi_{2yy}^{(1)} + \left(2 \frac{U}{R} - SU_y \frac{i}{k} \right) \varphi_{2y}^{(1)} \\ & + \left(k^2 c - k^2 U - U_{yy} + \frac{ikSU}{2} + ikB \right) \varphi_2^{(1)} = - \frac{i}{k} (c_g - U) \varphi_{1yy} \\ & + 2 \frac{iU}{kR} \varphi_{1y} + \left(2ikc - 3ikU - \frac{i}{k} U_{yy} + ikc_g - US - 2B \right) \varphi_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\varphi_2^{(1)}(\pm\infty) = 0. \quad (3.17)$$

Sagrupējot locekļus, kas satur otro harmoniku, iegūstam robežuzdevumu:

$$\begin{aligned} & 8ik^3 c \varphi_2^{(2)} - 2ikc \varphi_{2yy}^{(2)} - 8ik^3 U \varphi_2^{(2)} + 2ikU \varphi_{2yy}^{(2)} - 2ikU_{yy} \varphi_2^{(2)} \\ & + S \left(2U_y \varphi_{2y}^{(2)} + 2U \varphi_{2yy}^{(2)} \right) + \frac{4ik}{R} U \varphi_{2y}^{(2)} + B \left(\varphi_{2yy}^{(2)} - 4k^2 \varphi_2^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & = ik \left(\varphi_{1y} \varphi_{1yy} - \varphi_{1y} \varphi_{1yy} \right) - S \left(2\varphi_{1y} \varphi_{1yy} - 3k^2 \varphi_1 \varphi_{1y} \right) - \frac{2ik}{R} \varphi_{1y}^2 \\ & \varphi_2^{(2)}(\pm\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Saistītais operators L^a un saistītās īpašfunkcijas φ_1^a ir noteiktas šādi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \cdot L \varphi_1 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \cdot L^a \varphi_1^a dy. \quad (3.20)$$

Saistītais robežuzdevums ir:

$$L^a \varphi_1^a = 0, \quad (3.21)$$

$$\varphi_1^a(\pm\infty) = 0. \quad (3.22)$$

Parciāli integrējot (3.20) kreiso pusi un izmantojot robežnosacījumus (3.7) un (3.22), iegūstam:

$$\begin{aligned} L^a \varphi_1^a \equiv & \varphi_{1yy}^a \left(U - c - SU \frac{i}{k} - B \frac{i}{k} \right) + \varphi_{1y}^a \left(2U_y - SU_y \frac{i}{k} - 2 \frac{U}{R} \right) \\ & + \varphi_1^a \left(k^2 c - k^2 U + \frac{ik}{2} SU - 2 \frac{U_y}{R} + Bik \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Atrisināmības nosacījums vienādojumam (3.16) ir formā:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left((c_g - U) \varphi_{1yy} - 2 \frac{U}{R} \varphi_{1y} + \begin{pmatrix} -2k^2 c + 3k^2 U + U_{yy} \\ -k^2 c_g + ikUS + 2Bik \end{pmatrix} \varphi_1 \right) dy = 0. \quad (3.24)$$

No tā var noteikt grupas ātrumu c_g .

Sagrupējot locekļus, kas satur ε^3 , iegūstam:

$$L_1 \psi_3 = \tilde{f}_3. \quad (3.25)$$

Amplitūdas $A(\xi, \tau)$ evolūcijas vienādojums tiek noteikts no trešās kārtas tuvinājuma (3.25) atrisināmības nosacījumiem. Reizinot vienādojuma (3.25) labo pusi ar φ_1^a , izmantojot (3.13) un atrisinājumus robežuzdevumiem (3.14)–(3.19), amplitūdai $A(\xi, \tau)$ iegūstam kompleksā veida Ginzburga–Landau vienādojumu:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \sigma A + \delta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \mu |A|^2 A, \quad (3.26)$$

kur

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\eta}, \quad \delta = \frac{\delta_1}{\eta}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\eta}, \quad (3.27)$$

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a (\varphi_{1yy} - k^2 \varphi_1) dy, \quad (3.28)$$

$$\sigma_1 = \frac{S}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(-k^2 U \varphi_1 + 2U_y \varphi_{1y} + 2U \varphi_{1yy} \right) dy, \quad (3.29)$$

$$\delta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\begin{aligned} & \left(c_g - U \right) \varphi_{2yy}^{(1)} - 2 \frac{U}{R} \varphi_{2y}^{(1)} \\ & + \varphi_2^{(1)} \left(-k^2 c_g - 2k^2 c + 3k^2 U + U_{yy} - ikSU - 2ikB \right) \\ & + \varphi_1 \left(2ikc_g + ikc - 3ikU - U \frac{S}{2} - B \right) \end{aligned} \right) dy, \quad (3.30)$$

$$\mu_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\begin{aligned} & 6ik^3 \varphi_2^{(2)} \varphi_{1y}^* - 2ik \varphi_{1y}^* \varphi_{2yy}^{(2)} + 3ik^3 \varphi_1^* \varphi_{2y}^{(2)} \\ & + ik^3 \varphi_1 \left(\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)} \right) - ik \varphi_{1yy} \left(\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)} \right) \\ & + ik \varphi_{2y}^{(2)} \varphi_{1yy}^* - ik \varphi_1^* \varphi_{2yyy}^{(2)} \\ & + ik \varphi_1 \left(\varphi_{2yyy}^{(0)} + \varphi_{2yyy}^{*(0)} \right) + 2ik \varphi_{1yyy}^* \varphi_2^{(2)} \\ & - k^2 \varphi_1 \left(\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)} \right) + 3k^2 \varphi_1^* \varphi_{2y}^{(2)} - \frac{3k^4}{2u_0} \varphi_1^2 \varphi_1^* \\ & - \frac{S}{2} \left(2\varphi_{1yy} \left(\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)} \right) + 2\varphi_{1yy}^* \varphi_{2y}^{(2)} \right. \\ & \quad \left. + 2\varphi_{1y} \left(\varphi_{2yy}^{(0)} + \varphi_{2yy}^{*(0)} \right) + 2\varphi_{2yy}^{(2)} \varphi_{1y}^* \right) \\ & \left. - 2 \frac{ik}{R} \left(\varphi_{2y}^{(2)} \varphi_{1y}^* + \varphi_{2y}^{(0)} \varphi_{1y} \right) \right) dy. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Ginzburga–Landau vienādojuma (3.26) koeficientus var aprēķināt, izmantojot formulas (3.27)–(3.31). Jāņem vērā, ka, lai veiktu aprēķinus, ir nepieciešams atrisināt lineārās stabilitātes robežuzdevumu (3.6) un (3.7), atbilstošo saistīto uzdevumu (3.21) un (3.22), trīs robežuzdevumus (3.14)–(3.19) un skaitliski aprēķināt integrāļu (3.27)–(3.31) vērtības.

4. Stabilitāte garenvirzienā nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem

4.1. Lineārā stabilitāte

Hidromehānikā ir divas pamatpieejas lineārās stabilitātes bāzes plūsmas analīzei:

- (a) pēc laika (*temporal*)
- (b) garenvirzienā (*spatial*) [11].

Abos gadījumos analīze veikta, izmantojot normālo modu metodi, un ir pieņemts, ka perturbācija ir proporcionāla $\exp(i(\alpha x - \beta t))$, turklāt abi parametri α un β var būt kompleksi skaitļi: $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, $\beta = \beta_r + i\beta_i$.

Gadījumā (a) viļņu skaitlis $\alpha = \alpha_r$ ir reāls, bet β ir komplekss. Šī pieeja ir ērtāka no skaitļošanas viedokļa, jo attiecīgais vispārinātais īpašvērtību β uzdevums ir lineārs un to var viegli atrisināt ar standarta programmatūras paketēm. Gadījumā (b) $\beta = \beta_r$ ir reāls un $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$. Šī pieeja ir ērtāka, lai salīdzinātu ar eksperimentālajiem datiem, bet prasa sarežģītāku skaitļošanu, jo īpašvērtību uzdevums attiecībā uz α ir nelineārs.

Ieviešot plūsmas funkciju (2.1. apakšnodaļa) ar izteiksmi (2.1), varam pārrakstīt (1.1)–(1.3) ([12], [19], [20], [21], [26]) formā (2.4) vai:

$$L_1\psi_1 = 0, \quad (4.1)$$

kur

$$\begin{aligned} L_1\psi \equiv & \psi_{xxt} + \psi_{yyt} + \psi_{0y}(\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) - \psi_{0yy}\psi_x \\ & + \frac{c_f}{2h}(\psi_{0y}\psi_{xx} + 2\psi_{0yy}\psi_y + 2\psi_{0y}\psi_{yy}) + \frac{2}{R}\psi_{0y}\psi_{xy} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Izmantojot normālo modu metodi, perturbācija tiek meklēta formā:

$$\psi_1(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (4.3)$$

kur $\varphi(y)$ – normālās perturbācijas amplitūda.

Ievietojot (4.3) vienādojumā (4.1) un apzīmējot $U = \psi_{0y}$, iegūstam:

$$\begin{aligned} & \varphi_{yy}(\alpha U - \beta - iSU) - iSU_y\varphi_y + \frac{2U\alpha}{R}\varphi_y \\ & + \varphi\left(\alpha^2\beta - \alpha^3U - \alpha U_{yy} + \frac{i\alpha^2US}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

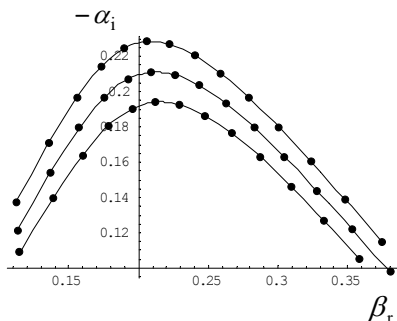
Robežnosacījumi ir:

$$\varphi(\pm\infty) = 0. \quad (4.5)$$

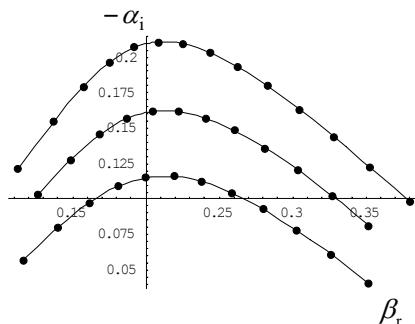
Bāzes plūsma izvēlēta formā:

$$U(y) = \frac{1}{2}(1 + \tanh y) \quad (4.6)$$

Pieauguma tempi – α_i atkarībā no β_r tiek parādīti 4.1. un 4.2. attēlā.



4.1. att. Pieauguma tempi – α_i
atkarībā no β_r trim vērtībām
 $1/R = 0$; $1/R = 0,025$; $1/R = 0,05$
(no augšas uz leju).



4.2. att. Pieauguma tempi $-\alpha_i$ no
atkarībā β_r trim vērtībām $S = 0$;
 $S = 0,05$; $S = 0,1$
(no augšas uz leju).

M. Gasters [31] ieteica transformāciju, ko var izmantot, lai aproksimētu pieauguma tempus garenvirzienā, ja pieauguma tempi laikā ir zināmi. Tomēr Gastera transformāciju var izmantot tikai stabilitātes līknes apkārtņē [19].

Pēc M. Gastera [31] uzdevuma (4.4) un (4.5) atrisinājumus apzīmē ar (T) un (Sp) , kas attiecīgi atbilst uzdevumu risinājuma pieejām pēc laika un garenvirzienā. Darbā [31] parādīts, ka netālu no marginālās stabilitātes līknes:

$$\alpha_r(T) = \alpha_r(Sp), \quad \beta_r(T) = \beta_r(Sp), \quad \alpha_i(Sp) = -\frac{\beta_i(T)}{c(T)}, \quad c(T) = \frac{\beta_r(T)}{\alpha_r(T)}.$$

Kā izriet no Gastera transformācijas, uz stabilitātes robežas var izmantot abas lineārās stabilitātes pieejas, jo šajā gadījumā $\alpha_i(Sp) = \beta_i(T) = 0$. Ja analīzes mērķis ir veidot marginālās stabilitātes līkni, tad ieteicams lietot stabilitātes analīzi pēc laika, jo tā no skaitļošanas viedokļa ir vienkāršāka metode.

4.2. Vāji nelineārā stabilitāte

Šajā apakšnodaļā aprakstīta otra pieeja, kuru var izmantot, lai iegūtu perturbācijas amplitūdas evolūcijas vienādojumu, pieņemot, ka bāzes plūsma nav paralēla, bet nedaudz mainās lejup pa straumi.

Aplūkosim seklā ūdens vienādojumu sistēmu formā (1.1)–(1.3). No šiem vienādojumiem, izmantojot formulas (2.1) un definējot plūsmas funkciju $\psi(x, y, t)$, iegūsim

$$\begin{aligned} & (\Delta\psi)_t + \psi_y(\Delta\psi)_x - \psi_x(\Delta\psi)_y + \frac{2}{R}\psi_y\psi_{xy} + \frac{c_f}{2h}\Delta\psi\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \\ & + \frac{c_f}{2h\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}}(\psi_y^2\psi_{yy} + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_x^2\psi_{xx}) + B\Delta\psi = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pieņemsim, ka λ ir perturbācijas viļņa garums un l ir garuma mērogs gareniskās svārstības bāzes plūsmai. Seklā ūdens sajaukšanās slāņos ([59], [60]) parasti ir izpildīts nosacījums $\lambda \ll l$. Tātad mazu parametru ε var definēt šādi: $\varepsilon = \lambda/l$. Pēc [35] ieviešam garenvirziena lēno koordinātu X : $X = \varepsilon x$. Bāzes plūsmas ātruma komponentes ir attiecīgi $U(y, X)$ un $\varepsilon V(y, X)$. Plūsmas funkcija $\psi(x, y, t)$ tiek veidota kā pamata daļas $\psi_0(y, X)$ un svārstīgās daļas $\psi'(x, y, t)$ summa:

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y, X) + \psi'(x, y, t). \quad (4.8)$$

Turklāt:

$$U(y, X) = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \quad V(y, X) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial X}. \quad (4.9)$$

Izmantojot (4.8) vienādojumā (4.7), iegūstam:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ & + \frac{c_f}{2h} \left(U \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + B \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ & + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial X} \frac{\partial \psi}{\partial y} + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{c_f}{2h} \left(2 \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2V \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{U_y}{U} V \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Izmantojot *WKBJ* aproksimāciju [35], plūsmas funkcija tiek meklēta formā:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y, X) \exp \left(i \left(\frac{\theta(X)}{\varepsilon} - \omega t \right) \right), \quad (4.11)$$

kur

$\varphi(y, X)$ ir lēni mainīga amplitūdas funkcija;

$\frac{\theta(X)}{\varepsilon}$ ir strauji mainīga fāzes funkcija.

Amplitūdas funkcija $\varphi(y, X)$ tiek izvērsta pakāpju rindas formā

$$\varphi(y, X) = \varphi_1(y, X) + \varepsilon \varphi_2(y, X) + \dots \quad (4.12)$$

Ievietojot (4.11) un (4.12) vienādojumā (4.10), tiek iegūts vienādojums:

$$L(\varphi_1) = 0, \quad (4.13)$$

kur

$$\begin{aligned} L\varphi_1 = & \varphi_1'' - k^2 \varphi_1 - \frac{U''}{U - \frac{\omega}{k}} \varphi_1 + \frac{2}{R} U \varphi_1' + B \frac{ik}{U - \frac{\omega}{k}} \varphi_1 \\ & - \frac{ic_f}{2h(kU - \omega)} \left(-Uk^2 \varphi_1 + 2U\varphi_1'' + 2U' \varphi_1' \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Šeit $\theta_x = k$ un atvasinājumi ir pēc y .

Vienādojums (4.13) ar robežnosacījumiem ir lineārs stabilitātes uzdevums.

Atbilstošo īpašvērtību $\varphi_1(y, X)$ var pierakstīt veidā:

$$\varphi_1(y, X) = A(X)\Phi(y, X), \quad (4.15)$$

kur $A(X)$ ir lēni mainīga amplitūda;

$\Phi(y, X)$ ir normēta īpašfunkcija.

Otrajā tuvinājumā tiek iegūts vienādojums

$$L\varphi_2 = F. \quad (4.16)$$

Vienādojumam (4.16) atrisinājums eksistē tad un tikai tad, ja F ir ortogonāls visām atbilstošajām saistītā uzdevuma īpašfunkcijām $\tilde{\Phi}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\tilde{\Phi}dy = 0. \quad (4.17)$$

Izmantojot (4.16) un (4.17), iegūstam amplitūdas $A(X)$ vienādojumu:

$$M(X)\frac{dA}{dX} + N(X)A = 0, \quad (4.18)$$

$$M(X) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi} \left(-2\frac{U}{R}\Phi' + \frac{c_f}{h}iUk\Phi + 2ikB\Phi \right) \Bigg/ (kU - \omega) dy, \quad (4.19)$$

$$N(X) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\tilde{\Phi}}{kU - \omega} dy, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} D = & 2\omega k \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi(\omega - 3Uk) \frac{dk}{dX} - (3Uk^2 + U''') \frac{\partial \Phi}{\partial X} + U \frac{\partial \Phi''}{\partial X} \\ & + \frac{\partial U'}{\partial X} \Phi' - 2\frac{U}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial X} + V(\Phi''' - k^2\Phi) + B \left(2ik \frac{\partial \Phi}{\partial X} + i \frac{dk}{dX} \Phi \right) \\ & + \frac{c_f}{2h} \left(2iUk \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2ik \frac{\partial U}{\partial X} \Phi + i \frac{dk}{dX} U\Phi - 2ikV\Phi' \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Plūsmas funkcijas svārstīgā daļa tiek iegūta formā:

$$\psi(x, y, t) \sim A(X)\Phi(y, X) \times \exp \left(i \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^X k(X) dX - \omega t \right) \right). \quad (4.22)$$

Formulā (4.22) tiek ņemtas vērā lēno garenvirziena bāzes plūsmu svārstības. To pieauguma temps un fāzes ātrums ir atkarīgi ne tikai no plūsmas funkciju izvēles, bet arī no tā punkta vietas izvēles, kurā tiek aprēķināti šie parametri [8].

Vāji nelineārā modeļa (4.18) salīdzinājumam ar eksperimentāliem datiem ir būtiska nozīme tikai tad, ja ir izvēlēts konkrēts Q (piemēram, gareniskā ātruma komponente vai spiediens). Šajā gadījumā [8] lokālo viļņu numuru k_L var noteikt, izmantojot formulu:

$$k_L(x, y) = -i \frac{\partial}{\partial x} \ln Q(x, y), \quad (4.23)$$

kur $k_L = k_{Lr} + ik_{Li}$.

Lai salīdzinātu vāji nelineāro modeli (4.18) ar eksperimentāliem datiem, jāveic šādi soļi:

- izvēlas plūsmas daudzumu Q ;
- izmēra daudzumu Q kādā punktā (x, y) ;
- aprēķina (4.23) tajā pašā punktā (x, y) .

Kopumā vāji nelineāro modeli (4.18) var izmantot, ja ir pieejami detalizēti eksperimentālie dati vai nelineāro seklā ūdens vienādojumu atrisinājuma skaitliskie rezultāti bāzes plūsmas komponentēm.

5. Stabilitāte seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņiem ar mainīgu berzi

5.1. Lineārā stabilitāte

Tiek analizēta lineārā stabilitāte gadījumā, kurā berzes koeficients mainās šķērsvirzienā ([17], [18], [22], [28]).

Berzes koeficienta $c_f(y)$ atkarība no šķērsvirziena koordinātas y tiek pieņemta formā:

$$c_f(y) = c_{f_0} \gamma(y), \quad (5.1)$$

kur $\gamma(y)$ diferencējama formas funkcija.

Apzīmēsim atvasinājumu no $c_f(y)$ pēc y

$$c_{f_y}(y) = c_{f_0} \gamma'(y), \quad (5.2)$$

Seklā ūdens vienādojumi (1.1)–(1.3) tiek pārrakstīti formā:

$$L_1 \psi_1 = 0, \quad (5.3)$$

kur

$$\begin{aligned} L_1 \psi \equiv & \psi_{xxt} + \psi_{yyt} + \psi_{0y} \psi_{xxx} + \psi_{0y} \psi_{yyx} - \psi_{0yyy} \psi_x \\ & + \frac{c_f}{2h} (\psi_{0y} \psi_{xx} + 2\psi_{0yy} \psi_y + 2\psi_{0y} \psi_{yy}) + \frac{c_{f_y}}{h} \psi_{0y} \psi_y. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Izmantojot normālo modu metodi, perturbācija ψ_1 tiek meklēta formā:

$$\psi_1(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}. \quad (5.5)$$

Ievietojot (5.5) vienādojumā (5.4), iegūstam robežuzdevumu:

$$\begin{aligned} & \varphi_{yy}(\alpha U - \beta - i\gamma SU) - i\gamma SU_y \varphi_y - i\gamma' SU \varphi_y \\ & + \varphi \left(\alpha^2 \beta - \alpha^3 U - \alpha U_{yy} + \frac{i\alpha^2 U \gamma S}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

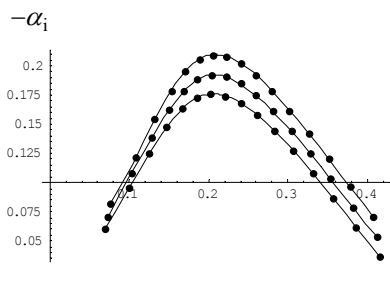
$$\varphi(\pm\infty) = 0. \quad (5.7)$$

Lai aprēķinātu perturbācijas augšanas ātrumu bāzes plūsmas $U(y)$ un formas funkcijai $\gamma(y)$, tiek izmantoti šādi profili:

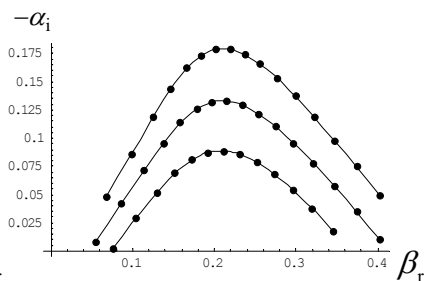
$$\gamma(y) = \frac{1}{2}(1 + \tanh y), \quad (5.8)$$

$$U(y) = \frac{1}{2}(1 - \tanh y). \quad (5.9)$$

Formas funkcijas $\gamma(y)$ izvēle (5.8) ir balstīta uz šādu pieņēmumu – jo spēcīgāka berze, jo bāzes plūsmas ātrums kļūst mazāks. Lai novērstu pārtraukuma punktus berzes spēka funkcijai, kura izmantota [61], ir izvēlēta funkcija $\gamma(y)$, kas mainās atkarībā no šķērsvirziena koordinātas y .



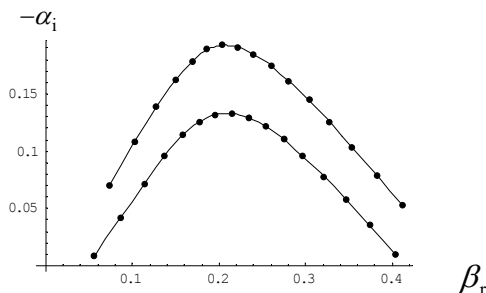
5.1. att. Pieauguma tempi $-\alpha_i$
atkarībā no β_r
formas funkcijai (5.8).



5.2. att. Pieauguma tempi $-\alpha_i$
atkarībā no β_r vērtībām
nemainīgam berzes koeficientam.

5.1. attēlā ir parādīti pieauguma tempi trim S vērtībām (S ir proporcionāls berzes koeficientam c_{f_0}): 0,05; 0,10; 0,15 (no augšas uz leju). Grafikā ir redzams, ka perturbācijas augšanas ātrums ir lielāks mazākām parametra S vērtībām. Berzes ietekme uz plūsmas stabilitāti (5.2. att.) ir parādīta pieauguma tempiem tām pašām trim S vērtībām, pieņemot, ka $\gamma(y)=1$ (nemainīgs berzes koeficients).

No 5.2. attēla ir redzams, ka parametra S pieaugums stabilizē plūsmu. 5.1. un 5.2. attēla salīdzinājums rāda, ka perturbācijas augšanas ātrums nehomogēnas berzes gadījumā ir lielāks. Šis fakts ir redzams 5.3. attēlā



5.3. att. Perturbācijas augšanas ātrums parametram $S = 0,1$ (augšā – ar mainīgu berzes koeficientu, apakšā – ar nemainīgu).

Eksperimentālie dati [61] liecina, ka bāzes plūsmas ātruma profils ir asimetrisks attiecībā pret šķērsvirziena koordinātu.

Lai aprēķinātu pieauguma tempu nestabilai perturbācijai, bāzes plūsmai $U(y)$ tiek izmantots divu parametru profils ([23], [24]):

$$U(y) = \begin{cases} 1 + r \tanh y, & y < 0 \\ 1 + \frac{r}{\delta} \tanh \delta y, & y > 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Apskatīsim vienādojumu [7]:

$$\varphi'' \left(ik(U - c) + \frac{c_f}{h} U \right) + \varphi' S U_y + \varphi \left(\frac{ik^3 c - ik^3 U - ik U_{yy}}{2h} \right) = 0, \quad (5.11)$$

un robežnosacījumus:

$$\varphi(\pm\infty) = 0. \quad (5.12)$$

Pretestības spēks ir formā [61]:

$$D = \begin{cases} 1/2 \rho (C_D a + c_f / h) U_1^2, & y < 0 \\ 1/2 \rho c_f / h U_2^2, & y > 0 \end{cases}, \quad (5.13)$$

kur ρ – šķidruma blīvums;

C_D – vidējais pretestības koeficients;

a – vidējā cietā frontālā daļa vienā tilpuma vienībā plaknē, kas ir perpendikulāra plūsmai [61].

Saistību starp slāni ar veģetāciju un galveno kanālu raksturo bezizmēra parametrs:

$$\gamma = \frac{C_D a}{C_D a + 2c_f / h}, \quad (5.14)$$

turklāt kopējo pretestību var izmērīt ar vispārējo gultnes berzes parametru:

$$S = \left(\frac{C_D a}{2} + \frac{c_f}{h} \right) b, \quad (5.15)$$

kur b ir bīdes slāņa platums.

Izmantojot (5.11), (5.13), (5.14) un (5.15), vienādojumu (5.11) iegūstam formā:

$$(c - U)\varphi_{yy} + (U_{yy} + k^2(U - c))\varphi = \frac{SH(y)U}{ik} \left(\varphi_{yy} + \frac{U_y \varphi_y}{U} - \frac{k^2 \varphi}{2} \right), \quad (5.16)$$

kur

$$H(y) = \begin{cases} 1 + \gamma, & y < 0 \\ 1, & y = 0 \\ 1 - \gamma, & y > 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Robežuzdevums (5.16) un (5.12) tiek atrisināts skaitliski, izmantojot kolokācijas metodi, kas balstās uz Čebiševa polinomiem. Šī uzdevuma risināšanai izmantota *IMSL* programmatūras pakete.

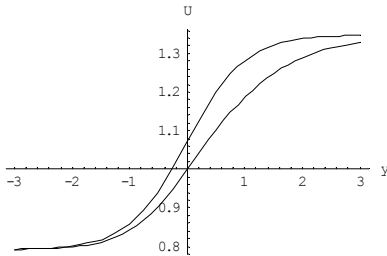
Vērtības H aizvietotas ar hiperboliska tangensa funkciju formā $\tanh \delta y$ ar lielām δ vērtībām, lai novērstu funkcijas pārtraukumu pie $y = 0$.

Lai salīdzinātu iegūtos asimetriska ātruma profila (5.10) rezultātus ar simetrisku gadījumu, izmantojam šādu simetriskā ātruma profilu:

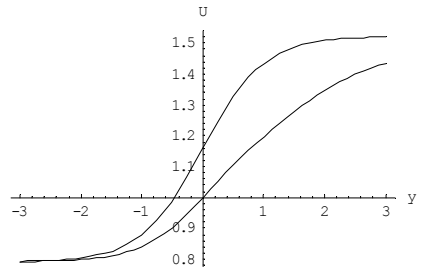
$$U(y) = 1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2\delta} + \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2\delta} \right) \tanh y. \quad (5.18)$$

Abiem profiliem (5.10) un (5.18) ir tādas pašas asimptotas pie $y \rightarrow \pm\infty$.

Bāzes plūsmas ātruma profiliem (5.10) un (5.18) līknes ir parādītas 5.4. un 5.5. attēlā divām δ vērtībām. Parametra r loma ir redzama no 5.4. un 5.5. attēla. Mazākām r vērtībām līkne ātrāk tuvojas horizontālajai asimptotai nekā lielākām r vērtībām, ja pamata plūsmas ātruma profils ir asimetrisks attiecībā pret šķērsvirziena koordinātu y .



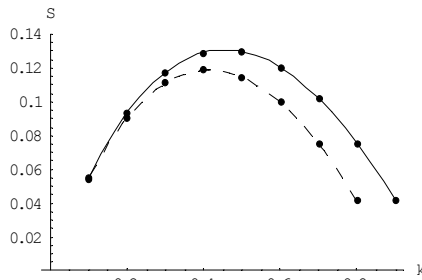
5.4. att. Bāzes plūsmas ātruma profili (5.10) un (5.18) pie $\gamma = 0,8$, $\delta = 0,8$ (attiecīgi augšējā un apakšējā līkne).



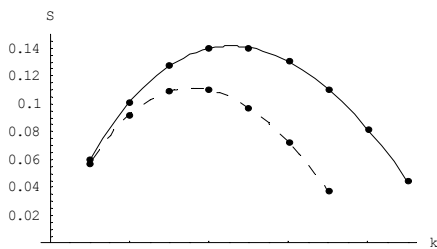
5.5. att. Bāzes plūsmas ātruma profili (5.10) un (5.18) pie $\gamma = 0,8$, $\delta = 0,6$ (attiecīgi augšējā un apakšējā līkne).

5.6.–5.8. attēlā ir parādītas uzdevuma (5.16) un (5.12) risinājuma stabilitātes līknes (k, S) plaknē dažādām parametru vērtībām. Marginālās stabilitātes līknes redzamas gan simetriskā gadījumā (bāzes plūsma formā (5.18), nepārtrauktā līkne), gan asimetriskā gadījumā (bāzes plūsma formā (5.10), raustītā līkne).

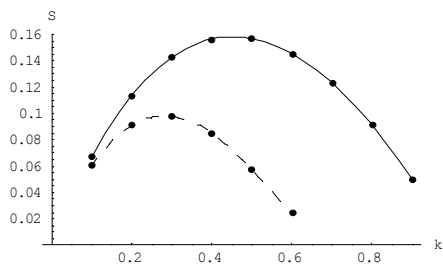
No 5.6., 5.7. un 5.8. attēla redzams, ka bāzes plūsmas asimetrija dod stabilizējošu ietekmi. Asimetriskā plūsma kļūst stabilāka, ja parametra S kritiskā vērtība kļūst mazāka. Turklāt nestabilu vērtību k diapazons arī samazinās.



5.6. att. Marginālās stabilitātes līknes: $\gamma = 0,8$, $\delta = 0,8$.



5.7. att. Marginālās stabilitātes līknes:
 $\gamma = 0,8, \delta = 0,6$.



5.8. att. Marginālās stabilitātes līknes:
 $\gamma = 0,8, \delta = 0,4$

Skaitliskie aprēķini liecina par bāzes plūsmas profilu asimetrijas stabilizējošo ietekmi: ja abas kritiskās vērtības k un S samazinās, asimetrija kļūst vēl izteiktāka.

5.2. Vāji nelineārā stabilitāte

Lineārās stabilitātes analīze ir efektīvs instruments, kas ļauj noteikt nosacījumus, pie kuriem plūsma zaudē stabilitāti. No otras puses, lineārās stabilitātes analīze neļauj aprakstīt perturbācijas attīstību. Gadījumā, ja pieauguma ātrums ir salīdzinoši neliels, perturbācijas amplitūdas attīstības vienādojuma sastādīšanai var izmantot vāji nelineāro analīzi.

Atgriezīsimies pie vienādojuma (5.3). Izmantojot normālo modu metodi, perturbācija ψ_1 tiek meklēta formā:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{ik(x-ct)}. \quad (5.19)$$

Iegūstam robežuzdevumu:

$$(Uk - ck - i\gamma SU)\varphi_1'' - i(\gamma SU_y + \gamma_y SU)\varphi_1' + \left(k^3 c - k^3 U - kU_{yy} + ik^2 \gamma \frac{S}{2} U \right) \varphi_1 = 0 \quad (5.20)$$

$$\varphi(\pm\infty) = 0. \quad (5.21)$$

Otrais tuvinājums (pie ε^2) ir iegūts formā:

$$L\psi_2 = \hat{f}_2. \quad (5.22)$$

Funkciju ψ_2 aprēķina pēc (2.22) un tiek iegūti trīs robežuzdevumi:

- funkcijai $\varphi_2^{(0)}$

$$2\gamma\mathcal{S}\left(U_y\varphi_{2y}^{(0)} + U\varphi_{2yy}^{(0)}\right) + 2\gamma_ySU = ik\left(\begin{array}{l}\varphi_{1y}\varphi_{1yy}^* - \varphi_{1y}^*\varphi_{1yy} \\ + \varphi_1\varphi_{1yyy}^* - \varphi_1^*\varphi_{1yyy}\end{array}\right) \quad (5.23)$$

$$- \frac{\gamma\mathcal{S}}{2}\left(\begin{array}{l}k^2\varphi_{1y}^* + k^2\varphi_1^*\varphi_{1y} \\ + 2\varphi_{1y}\varphi_{1yy}^* + 2\varphi_{1y}^*\varphi_{1yy}\end{array}\right) - \frac{\gamma_yS}{2}(\varphi_1\varphi_1^* + 2\varphi_{1y}\varphi_{1y}^*)$$

$$\varphi_2^{(0)}(\pm\infty) = 0. \quad (5.24)$$

- funkcijai $\varphi_2^{(1)}$

$$\left(\begin{array}{l}ikU - ikc \\ + \gamma\mathcal{S}U\end{array}\right)\varphi_{2yy}^{(1)} + S(\gamma U_y + \gamma_y U)\varphi_{2y}^{(1)} + \left(\begin{array}{l}ik^3c - ik^3U \\ - ikU_{yy} - \frac{\gamma\mathcal{S}}{2}Uk^2\end{array}\right)\varphi_2^{(1)} \quad (5.25)$$

$$= (c_g - U)\varphi_{1yy} + (-c_gk^2 - 2k^2c + 3Uk^2 + U_{yy} - i\gamma\mathcal{S}Uk)\varphi_1$$

$$\varphi_2^{(1)}(\pm\infty) = 0. \quad (5.26)$$

- funkcijai $\varphi_2^{(2)}$

$$\left(\begin{array}{l}2ikU \\ - 2ikc + \gamma\mathcal{S}U\end{array}\right)\varphi_{2yy}^{(2)} + \left(\begin{array}{l}\gamma\mathcal{S}U_y \\ + \gamma_y\mathcal{S}U\end{array}\right)\varphi_{2y}^{(2)} + \left(\begin{array}{l}8ik^3c - 8ik^3U \\ - 2ikU_{yy} - 2\gamma\mathcal{S}k^2U\end{array}\right)\varphi_2^{(2)} \quad (5.27)$$

$$= ik(\varphi_1\varphi_{1yyy} - \varphi_{1y}\varphi_{1yy}) + \frac{\gamma\mathcal{S}}{2}\left(\begin{array}{l}3k^2\varphi_1\varphi_{1y} \\ - 2\varphi_{1y}\varphi_{1yy}\end{array}\right) + \frac{\gamma_yS}{2}\left(\begin{array}{l}k^2 \\ 2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\end{array}\right)$$

$$\varphi_2^{(2)}(\pm\infty) = 0. \quad (5.28)$$

Skaitliski atrisinot robežuzdevumus (5.23) un (5.24), (5.25) un (5.26), (5.27) un (5.28), tiek iegūtas funkcijas $\varphi_2^{(0)}(y)$, $\varphi_2^{(1)}(y)$ un $\varphi_2^{(2)}(y)$. Pēc tam tiek aprēķināta funkcija ψ_2 (2.22).

Saistītais robežuzdevums ir šāds:

$$L^a\varphi_1^a = 0, \quad (5.29)$$

$$\varphi_1^a(\pm\infty) = 0, \quad (5.30)$$

kur

$$\begin{aligned} L^a \varphi_1^a &\equiv \varphi_{1yy}^a \left(U - c - \gamma S U \frac{i}{k} \right) + \varphi_{1y}^a \left(2U_y - \frac{i}{k} (\gamma S U_y + \gamma_y S U) \right) \\ &+ \varphi_1^a \left(k^2 c - k^2 U + \frac{ik}{2} \gamma S U \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Piemērojot vienādojumam (5.29) atrisināmības nosacījumu, iegūstam vienādojumu (5.32), no kura var atrast grupas ātrumu c_g .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left((c_g - U) \varphi_{1yy} + (-k^2 c_g - 2k^2 c + 3k^2 U + U_{yy} - ikU\gamma S) \varphi_1 \right) dy = 0. \quad (5.32)$$

Trešais tuvinājums (pie ε^3) ir iegūts formā:

$$L \psi_3 = f_3. \quad (5.33)$$

Piemērojot vienādojumam (5.33) atrisināmības nosacījumu, iegūstam vienādojumu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^a L \psi_3 dy = 0. \quad (5.34)$$

Vienādojums (5.34) tiek pārveidots amplitūdas $A(\xi, \tau)$ evolūcijas vienādojumā formā:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \sigma A + \delta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \mu |A|^2 A. \quad (5.35)$$

Vienādojums (5.35) ir Ginzburga–Landau vienādojums kompleksā veidā. Vienādojuma koeficienti ir kompleksie skaitļi σ, δ un μ :

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\eta}, \quad \delta = \frac{\delta_1}{\eta}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\eta}, \quad (5.36)$$

kur

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a (\varphi_{1yy} - k^2 \varphi_1) dy, \quad (5.37)$$

$$\sigma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\frac{\gamma S}{2} (-k^2 U \varphi_1 + 2U_y \varphi_{1y} + 2U \varphi_{1yy}) - \gamma_y S U \varphi_{1y} \right) dy, \quad (5.38)$$

$$\delta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\begin{aligned} & (c_g - U) \varphi_{2yy}^{(1)} \\ & + \varphi_2^{(1)} (-k^2 c_g - 2k^2 c + 3k^2 U + U_{yy} - ik\gamma S U) \\ & + \varphi_1 \left(2ikc_g + ikc - 3ikU - U \frac{\gamma S}{2} \right) \end{aligned} \right) dy, \quad (5.39)$$

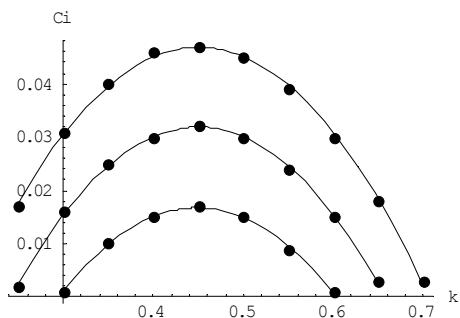
$$\mu_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^a \left(\begin{aligned} & 6ik^3 \varphi_2^{(2)} \varphi_{1y}^* - 2ik \varphi_{1y}^* \varphi_{2yy}^{(2)} + 3ik^3 \varphi_1^* \varphi_{2y}^{(2)} \\ & + ik^3 \varphi_1 (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) - ik \varphi_{1yy} (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) \\ & + ik \varphi_{2y}^{(2)} \varphi_{1yy}^* - ik \varphi_1^* \varphi_{2yyy}^{(2)} \\ & + ik \varphi_1 (\varphi_{2yyy}^{(0)} + \varphi_{2yyy}^{*(0)}) + 2ik \varphi_{1yyy}^* \varphi_2^{(2)} \\ & - \frac{\gamma S}{2} \left(-k^2 \varphi_1 (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) + 3k^2 \varphi_1^* \varphi_{2y}^{(2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{3k^4}{2u_0} \varphi_1^2 \varphi_1^* + 2\varphi_{1yy} (\varphi_{2y}^{(0)} + \varphi_{2y}^{*(0)}) \right. \\ & \quad \left. + 2\varphi_{1yy}^* \varphi_{2y}^{(2)} + 2\varphi_{1y} (\varphi_{2yy}^{(0)} + \varphi_{2yy}^{*(0)}) + 2\varphi_{2yy}^{(2)} \varphi_{1y}^* \right) \\ & \left. - \gamma_y S \left(-k \varphi_1 \varphi_2^{(2)} + \varphi_{1y} \varphi_{2y}^{(2)} \right) \right) dy \quad (5.40) \end{aligned}$$

Īpaši svarīga šajā gadījumā ir reālās daļas μ zīme (literatūrā – Landau konstante). Ja Landau konstantei ir "nepareiza zīme" [57], tas nozīmē, ka amplitūdas piesātinājums nebūs iespējams un augstākās kārtas locekļi (attiecībā uz A) ātri kļūst dominējoši. Tāpēc modeli (5.35) var izmantot tikai ļoti īsā laikā. Atšķirībā no [57], kas ir aprakstīts [29], [33], [43], seklā ūdens plūsmai Landau konstantei ir "pareizā zīme" ($\mu_r > 0$). Tādējādi (5.35) var izmantot modelēšanai. Atkarībā no koeficientu vērtībām Ginzburga–Landau vienādojumam ir dažādi atrisinājumi [1].

6. Skaitliskie rezultāti

No 2. nodaļas apsvērumiem (2.4. att.) var secināt, ka vāji nelineāro pieeju var izmantot tikai nelielā kritiskā punkta apkārtnē. Tātad tieši tur varam piemērot nelineārās analīzes teoriju un aprēķināt Ginzburga–Landau vienādojuma koeficientus. Lai pārliecinātos, ka adekvāti attēlojam nelineārā modeļa dinamiku, izmantosim Suslova un Paolucci [58] kritēriju. Ja nestabilās perturbācijas viļņu skaitļu pieauguma tempus visā nestabilajā diapazonā var aproksimēt ar parabolu, tad Ginzburga–Landau vienādojumu var izmantot, lai aprakstītu plūsmas dinamiku vāji nelineārā režīmā. Lai pārbaudītu šo apgalvojumu, tika aprēķināti viļņu skaitļu k pieauguma tempi visā nestabilajā diapazonā ($S < S_c$) parametra c_i vērtībām ($c = c_r + ic_i$, kad $c_i > 0$) nedaudz izliektu seklā ūdens plūsmu sajaukšanās slāņu

bāzes plūsmas profilam (2.8). Aprēķinu rezultāti tiek parādīti 6.1. attēlā. Kā redzams no attēla, viļņu skaitļu pieauguma tempu līknes labi aproksimējas ar parabolu. Tāpēc secinām, ka Ginzburga–Landau vienādojumu var izmantot, lai analizētu plūsmas dinamiku.



6.1. att. Viļņu skaitļu pieauguma tempa kvadrātiskā aproksimācija (nepārtrauktās līknes) pie $S = 0,09$; $S = 0,08$; $S = 0,07$ (no augšas uz leju) un $1/R = 0,03$.

6.1. tabulā parādīti Ginzburga–Landau vienādojuma (2.38) koeficientu (2.39)–(2.42) skaitlisko aprēķinu rezultāti. Tie tiek veikti bāzes plūsmas profilam (2.8) (2.1. att.) vērtībām $1/R = 0$; $0,01$; $0,02$; $0,04$.

6.1. tabula

Lineārās un vāji nelineārās analīzes parametru vērtības pie dažādiem $1/R$
(2. nodaļa) bāzes plūsmas profilam (2.8)

$1/R$	0,00	0,01	0,02	0,04
k_c	0,456	0,453	0,449	0,440
S_c	0,065	0,058	0,054	0,047
c_c	1,954	1,965	1,977	2,004
σ	$0,184 - 0,016i$	$0,173 - 0,015i$	$0,163 - 0,013i$	$0,141 - 0,009i$
μ	$2,861 + 0,494i$	$3,046 + 0,539i$	$3,244 + 0,590i$	$3,673 + 0,720i$
c_g	1,927	1,924	1,922	1,914
δ	$6,487 + 13,238i$	$6,014 + 13,757i$	$5,472 + 14,447i$	$4,124 + 16,524i$

Tālāk parādīti skaitliskie rezultāti vāji nelineārās analīzes gadījumā uzdevumiem, kas apskatīti 5. nodaļā (gadījumā, ja gultnes berze nav homogēna). Lai aprēķinātu perturbācijas augšanas ātrumu bāzes plūsmai un formas funkcijai, tiek izmantoti profili:

$$U(y) = 2 + \tanh y,$$

$$\gamma(y) = \frac{\beta + 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} \tanh(\lambda y).$$

Ginzburga–Landau vienādojuma koeficientu skaitlisko aprēķinu rezultāti ir parādīti 6.2. tabulā. Katram aprēķinu variantam izmantotas lineārās stabilitātes parametru kritiskās vērtības.

6.2. tabula

Lineārās un vāji nelineārās analīzes parametru vērtības pie $\beta = 0,3$

λ	0,25	0,5	1,0	1,5
k_c	0,442	0,437	0,438	0,437
S_c	0,198	0,205	0,211	0,214
c_c	1,972	1,985	2,004	2,018
σ	$0,195 - 0,487i$	$0,195 - 0,080i$	$0,183 - 0,133i$	$0,174 - 0,173i$
μ	$2,374 + 0,690i$	$2,151 + 0,687i$	$2,090 + 0,516i$	$2,092 + 0,262i$
c_g	1,956	1,981	2,007	2,018
δ	$7,077 + 13,243i$	$7,330 + 12,434i$	$7,403 + 10,752i$	$7,255 + 9,645i$

Amplitūdas evolūcijas vienādojumu (5.35) var pārveidot formā [1]:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{\tau}} = \tilde{A} + (1 + c_1 i) \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tilde{\xi}^2} - (1 + c_2 i) |\tilde{A}|^2 \tilde{A}, \quad (6.1)$$

kur

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \tau \sigma_r, & \tilde{\xi} &= \xi \sqrt{\frac{\sigma_r}{\delta_r}}, & \tilde{A} &= A \sqrt{\frac{\mu_r}{\sigma_r}} e^{-i c_0 \sigma_r \tau}, \\ c_0 &= \frac{\sigma_i}{\sigma_r}, & c_1 &= \frac{\delta_i}{\delta_r}, & c_2 &= \frac{\mu_i}{\mu_r}. \end{aligned}$$

Literatūrā [1] un [10] ir zināmi daži risinājumi vienādojumam (6.1) slēgtā formā. Viens no vienkāršākajiem ir viļņu risinājums formā:

$$\tilde{A} = a_0 e^{iq\tilde{\xi} + i\omega\tilde{\tau}}, \quad (6.2)$$

kur

$$a_0 = \sqrt{1 - q^2}, \quad \omega = -c_2 - (c_1 - c_2)q^2.$$

Risinājuma (6.2) stabilitāti var izpētīt, pieņemot, ka [37]:

$$\tilde{A} = (a_0 + \hat{a} e^{ik\tilde{\xi} + \lambda\tilde{\tau}} + \hat{a}^* e^{-ik\tilde{\xi} + \lambda\tilde{\tau}}) e^{iq\tilde{\xi} + i\omega\tilde{\tau}}. \quad (6.3)$$

Ievietojot (6.3) vienādojumā (6.1), iegūstam vienādojumu parametram λ . Stabilitātes nosacījums pie mazām k vērtībām ir formā

$$1 + c_1 c_2 > 0 \quad (6.4)$$

ar nosacījumu, ka vērtības q apmierina nevienādību:

$$q^2 < \frac{1+c_1c_2}{2c_2^2}. \quad (6.5)$$

Nosacījums (6.4) ir Benjamina–Feira stabilitātes nosacījums. Ja (6.4) nav izpildīts, risinājumi plakanu viļņu formā (6.2) ir nestabili (tāpēc nevar tikt novēroti eksperimentos).

Ginzburga–Landau vienādojuma (6.1) skaitliskie risinājumi tiek parādīti zemāk dažādām c_1 un c_2 parametru vērtībām, kā arī dažādiem sākotnējiem nosacījumiem. Problēma ir formulēta šādi: atrast risinājumu (6.1) ar dotiem robežnosacījumiem:

$$\tilde{A}|_{\tilde{z}=0} = 0, \quad \tilde{A}|_{\tilde{z}=L} = 0, \quad (6.6)$$

un sākuma nosacījumu:

$$\tilde{A}|_{\tilde{r}=0} = f(\tilde{\xi}). \quad (6.7)$$

Līniju metode, kas īstenota programmas paketē *Mathematica5*, tiek izmantota, lai skaitliski atrisinātu uzdevumu (6.1), (6.6) un (6.7).

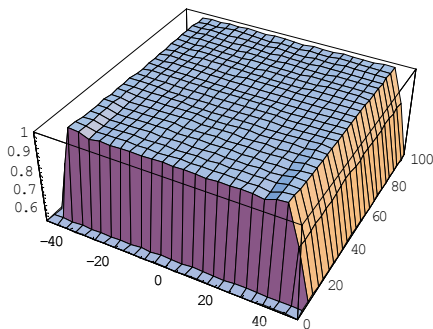
6.3. tabulā parādītas skaitliskās koeficientu c_1 un c_2 vērtības pie dažādām λ vērtībām. Kā redzams no 6.3. tabulas, nosacījums (6.4) ir izpildīts visos gadījumos.

6.3. tabula

Ginzburga–Landau vienādojuma koeficientu
 c_1 un c_2 vērtības pie $\beta = 0,3$

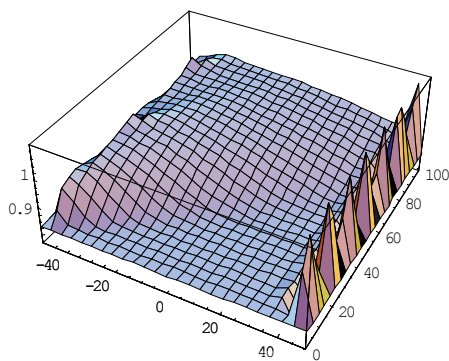
β	0,3000	0,3000	0,3000	0,3000
λ	0,25	0,5	1,0	1,5
$c_1 = \delta_i / \delta_r$	1,8713	1,6963	1,4524	1,3294
$c_2 = \mu_i / \mu_r$	0,2906	0,3194	0,2469	0,1252
$1 + c_1c_2$	2,1619	2,0157	1,6993	1,4547

Pirmais aprēķins ir veikts gadījumā, kad $c_1 = 1,3293$ un $c_2 = 0,1251$. Šo parametru vērtības tiek ņemtas no 6.3. tabulas. Sākuma nosacījums (6.7) ir neliels troksnis, kura kārtā ir 0,01. Iegūtie rezultāti ir parādīti 6.3. attēlā. Tā kā uzdevuma parametriem tiek apmierināti nosacījumi (6.4) un (6.5) (atrodas stabilitātes apgabalā), amplitūdas modulis sasniedz konstantu vērtību.



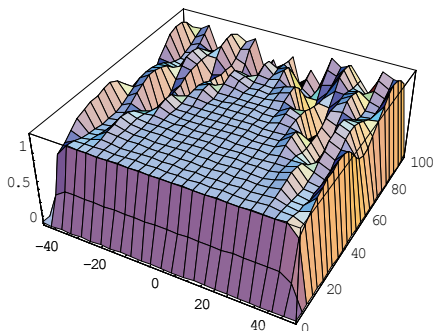
6.3. att. $|\tilde{A}|$ attēlojums.

Nākamie aprēķini tiek veikti gadījumā, kad $f(\tilde{\xi}) = \sqrt{1-q^2} e^{iq\tilde{\xi}}$, kur $q = 0,5$. Iegūtie rezultāti ir parādīti 6.4. attēlā.

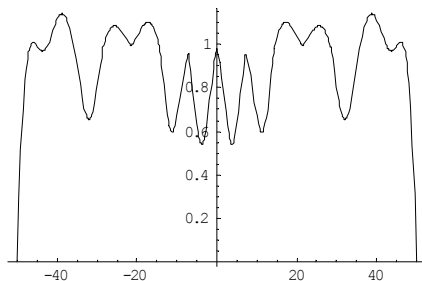


6.4. att. $|\tilde{A}|$ attēlojums.

Visbeidzot, tiek analizēts gadījums, kad Benjamina–Feira stabilitātes nosacījums (6.4) nav izpildīts. Parametru vērtības ņemtas no [45], kur $c_1 = -0,799564$ un $c_2 = 2,189654$ (šie parametri atbilst vāji nelineārās analīzei plūsmai aiz šķēršļiem). Sākuma nosacījums ir neliels troksnis, kura kārtā ir 0,01. Iegūtie rezultāti ir parādīti 6.5 un 6.6. attēlā. Kā var redzēt, šajā gadījumā amplitūdas stabilizācija neiestājas.



6.5. att. $|\tilde{A}|$ attēlojums.



6.6. att. Beigu $|\tilde{A}|$ konfigurācija.

Šie piemēri ilustrē, ka Ginzburga–Landau vienādojums ir diezgan bagāts ar dažādiem risinājumiem. Ilustratīvi aprēķini (6.3.–6.6. att.) liecina, ka amplitūdas dinamika laikā un telpā ir atkarīga gan no sākotnējiem nosacījumiem, gan no koeficientu vērtībām. Ir jādefinē piemērojamības apgabals Ginzburga–Landau vienādojumam, jo vienādojums tiek iegūts nelielā kritisko punktu apkārtnē. Rezultātus, kas iegūti, izmantojot Ginzburga–Landau vienādojumu (modeli), derētu salīdzināt ar pilnībā nelineāru modelēšanu, lai pārbaudītu modeļa pamatotību. Tas tiek atstāts turpmākajam darbam.

Secinājumi

Galvenie secinājumi no lineārās stabilitātes analīzes ir šādi:

- plūsmas izliekuma ietekme ir divējāda: aprēķini rāda, ka izliekums dod destabilizējošu ietekmi uz nestabilu izliektu samaisīšanās slāni un stabilizējošu ietekmi uz stabili izliektu samaisīšanās slāni;
- sīku daļiņu esamība plūsmā dod stabilizējošu ietekmi;
- analizēta precizitāte Gastera transformācijai attālumā no marginālās stabilitātes līknes, veicot stabilitātes analīzi pēc x koordinātas (*spatial stability analysis*).
- parādīta bāzes plūsmas asimetrijas stabilizējošā ietekme;
- parādīts, ka perturbācijas augšanas ātrums nehomogēnas berzes gadījumā ir lielāks.

Tiek izskatītas divas pieejas vāji nelineārās stabilitātes analīzei. Pirmā pieeja pamatojas uz paralēlu plūsmu pieņēmumu. To var izmantot gadījumā, kad gultnes berzes koeficients ir nedaudz mazāks par kritisko vērtību. Izmantojot vairāku mērogu metodi, tiek iegūts amplitūdas evolūcijas vienādojums visnestabilākajam režīmam. Parādīts, ka nedaudz izliektam seklam sajaukšanās slānim, kurš var saturēt vai nesaturēt sīkas daļiņas, amplitūdas vienādojums ir kompleksais Ginzburga–Landau vienādojums. Vienādojuma koeficienti tiek aprēķināti no integrāļiem, kas satur plūsmas lineārās stabilitātes parametrus. Tiek aplūkota plakānu viļņu stabilitāte Ginzburga–Landau vienādojumam. Parādīti Ginzburga–Landau vienādojuma skaitliskie aprēķini dažādām parametru vērtībām un sākuma nosacījumiem.

Otra pieeja ņem vērā lēno garenvirziena bāzes plūsmas izmaiņu. Analīzes pamatā ir vāji neparalēla *WKBJ* aproksimācija. Tiek iegūts pirmās kārtas amplitūdas attīstības vienādojums. Amplitūdas vienādojuma atrisinājums tiek izmantots, lai iegūtu pirmās kārtas perturbācijas lauka aproksimāciju.

Literatūra

1. Aranson, I.S., and Kramer, L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Review of Modern Physics*, vol. 74. 2002, pp. 99–143.
2. Blennerhassett, P.J. On the generation of waves by wind. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London. Ser. A*, vol. 298. 1980, pp. 451–494.
3. Canuto, M.Y., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., and Zang, T.A. *Spectral methods: fundamentals in single domain*. Springer, 2006.
4. Chaudhry M.H. *Open-channel flow*. Second edition, Springer, 2007.
5. Chen, D., and Jirka, G. H. Linear instability analyses of turbulent mixing layers and jets in shallow water layers. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 36. 1998, pp. 815–830.
6. Chu, V.H., and Babarutsi, S. Confinement and bed-friction effects in shallow turbulent mixing layers. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 114, ASCE. 1988, pp. 1257–1274.
7. Chu, V.H., Wu, J.H., and Khayat, R.E. Stability of transverse shear flows in shallow open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 177, ASCE. 1991, pp. 1370–1388.
8. Craighton, D.C., and Gaster, M. Stability of slightly divergent jet flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 77, part 2. 1976, pp. 397–413.
9. Criminale, W.O., Jackson, T.L., and Joslin, R.D. *Theory and computation of hydrodynamic stability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
10. Cross, M.C., and Hohenberg, P.C. Pattern formation outside of equilibrium. *Review of Modern Physics*, vol. 65. 1993, pp. 851–1112.
11. Drazin, P.G., and Reid, W.H. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
12. Eglite, I. Asymptotic analysis of stability of slightly curved two-phase shallow mixing layers. 2nd International Conference on Fluid Mechanics and Heat & Mass Transfer: Recent Researches in Mechanics, Greece, Corfu, 14–16 July 2011. Athens: WSEAS Press, pp. 98-101. ISBN 978-1-61804-020-6.
13. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Ginzburg-Landau model for curved two-phase shallow mixing layers. *Proc. of World Academy of Science, Engineering and Technology*, iss. 64. 2012, pp. 146–150. ISSN 2010-376X.
14. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Ginzburg-Landau model for stability analysis of fluid flows. *Boundary Field Problems and Computer Simulation*, vol. 50. 2011, pp. 97–100. ISSN 1407-7493.
15. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Linear and weakly nonlinear instability of slightly curved shallow mixing layers. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, iss. 2, vol.6. 2011, pp. 123–132. ISSN 1790-5087.

16. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Linear instability of curved shallow mixing layers. Recent Researches in Hydrology, Geology and Continuum Mechanics, United Kingdom, Cambridge, 23–25 February 2011. WSEAS Press, 2011, pp 38–41. ISBN 978-960-474-275-2.
17. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Linear instability of shallow mixing layers with non-constant friction coefficient. International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing: Book of Abstracts, Croatia, Šibenik, 10–14 June 2013. Zagreb: University of Zagreb, 2013, pp. 25–26.
18. Eglite, I., and Kolyshkin, A. On the stability of shallow mixing layers with non-uniform friction. The 10th Latvian Mathematical Conference. The 2nd International Conference on High Performance Computing and Mathematical Modelling. Book of Abstracts, Liepaja, Latvia, 11–12 April 2014. Liepaja: Liepaja University, 2014, pp. 33–33. ISBN 978-9934-522-23-9.
19. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial and temporal instability of slightly-curved particle-laden shallow mixing layers. Proceedings of the V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, Spain, Ibiza, 17–19 June 2013. Barcelona: CIMNE, 2013, pp. 1249–1256. ISBN 978-84-941407-6-1.
20. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial instability of curved shallow mixing layers. 17th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. Abstracts, Estonia, Tallinn, 6–9 June 2012. Tallinn: Tallinn University of Technology, 2012, pp. 71–71.
21. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial stability analysis of curved shallow mixing layers. Mathematical Models and Methods in Modern Science: 15th International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems, Cyprus, Limassol, 21–23 March 2013. Athens: WSEAS Press, 2013, pp. 104–108. ISBN 978-1-61804-168-5.
22. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Spatial stability analysis of shallow mixing layers with variable friction coefficient. Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, MIC 2014, Austria, Innsbruck, 17–19 February 2014. Austria: ACTA Press, pp. 161–165. ISBN 978-0-88986-966-0.
23. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Stability of shallow water flow for the case of asymmetric base velocity profile. 8th Latvian Mathematical Conference: Abstracts, Latvia, Valmiera, 9–10 April 2010. Latvia: LMB, 2010, pp. 28–28. ISBN 978-9984-45-173-2.
24. Eglite, I., and Kolyshkin, A. The effect of asymmetry of base flow profile on the linear stability of shallow mixing layers. Non-Linear Systems and Wavelet Analysis: Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on Wavelet Analysis and Multirate Systems, Tunisia, Kantaoui, Sousse, 3–6 May 2010. WSEAS Press, 2010, pp. 109–112. ISBN 978-960-474-189-2.

25. Eglite, I., and Kolyshkin, A. The effect of flow curvature on linear and weakly nonlinear instability of shallow mixing layers. 16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. Abstracts, Latvia, Sigulda, 25–28 May 2011. Riga: University of Latvia, 2011, pp. 40–40. ISBN 978-9984-45-351-4.
26. Eglite, I., and Kolyshkin, A. The effect of slow variation of base flow profile on the stability of slightly curved mixing layers. Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, iss. 76, 2011, pp 624–627. ISSN 2010-3778.
27. Eglite, I., and Kolyshkin, A. Weakly nonlinear methods for stability analysis of slightly curved two-phase shallow mixing layers. International Conference on Applied Mathematics and Sustainable Development: Special Track within SCET2012, China, Xi'an, 27–30 May 2012, Xi'an: Scientific Research Publishing, 2012, pp. 271–274. ISBN 978-1-61896-023-8.
28. Eglite, I., Kolyshkin, A., and Ghidaoui, M. Weakly nonlinear analysis of shallow mixing layers with variable friction. Materials of the 11th World Congress on Computational mechanics, 5th European Conference on Computational mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, Spain, Barcelona, 20–25 July 2014. Barcelona: CIMNE, 2014, pp. 1–2. ISBN 978-84-942844-7-2.
29. Feddersen, F. Weakly nonlinear shear waves. Journal of Fluid Mechanics, vol. 372. 1998, pp. 71–91.
30. Forsythe, G.E., Malcolm, M.A., and Moler, C.B. Computer methods for mathematical computations. Prentice Hall. 1977.
31. Gaster, M. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. Journal of Fluid Mechanics, vol. 14. 1962, pp. 222–224.
32. Ghidaoui, M.S., and Kolyshkin, A.A. Linear stability analysis of lateral motions in compound open channels. Journal of Hydraulic Engineering, vol.125, ASCE. 1999, pp. 871–880.
33. Ghidaoui, M.S., Kolyshkin, A.A., Liang, J.H., Chan, F.C., Li, Q., and Xu, K. Linear and nonlinear analysis of shallow wakes. Journal of Fluid Mechanics, vol. 548. 2006, pp. 309–340.
34. Gibson, M.M., and Younis, B.A. Turbulence measurements in a developing mixing layer with mild destabilizing curvature. Experiments in Fluids, vol. 1. 1983, pp. 23–30.
35. Godréche, C., and Manneville P. Hydrodynamics and nonlinear instabilities. Cambridge University Press, 1998.
36. Golub, G.H., and Loan, C.F. Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, 1983.
37. Heinrichs, W. Improved condition number for spectral methods. Mathematics of Computation, vol. 53, no. 187. 1989, pp. 103–119.
38. Hu, F.Q., Otto, S.R., and Jackson, T.L. On the stability of a curved mixing layer. Proc. ICASE Workshop on Transition, Turbulence and Combustion. New York: Kluwer, 1993, pp. 107–116.

39. Jirka, G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 39. 2001, pp. 567–573.
40. Kevorkian, J., and Cole, J.D. Multiple scale and singular perturbation methods. Springer, 1996.
41. Kolyshkin, A., and Ghidaoui, M. S. Gravitational and shear instabilities in compound and composite channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, ASCE. 2002, pp. 1076–1086.
42. Kolyshkin, A., and Nazarovs, S. Stability of slowly diverging flows in shallow water. *Mathematical modeling and analysis*, no. 1. 2007, pp. 101-106.
43. Kolyshkin, A.A., and Ghidaoui, M.S. Stability analysis of shallow wake flows. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 494. 2003, pp. 355–377.
44. Kolyshkin, A.A., and Nazarovs, S. Linear and weakly nonlinear analysis of two-phase shallow wake flows. *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 6, no. 1. 2007, pp. 1–8.
45. Kolyshkin, A.A., and Nazarovs, S. The effect of particles on linear and weakly nonlinear instability of two-phase shallow flows. *Progress in industrial mathematics at ECMI*. Springer. 2006, pp. 784–789.
46. Leblanc, S. Amplification of nonlinear surface waves by wind. *Physics of Fluids*, vol. 19. 2007, pp. 101705-1–101705-4.
47. Leweke, T., and Provansal, M. The flow behind rings: bluff body wakes without end effects. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 288. 1995, pp. 265-310.
48. Liggett J. A. *Fluid mechanics*. New York: McGraw Hill, 1994.
49. Lin C. C. *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1955.
50. Liou, W.W. Linear instability of curved free shear layers. *Physics of Fluids*, vol. 6. 1993, pp. 541–549.
51. Nazarovs S. Linear and weakly non-linear stability analysis of shallow fluid flows in open systems. Ph. D. Thesis
52. Prooijen, B.C., and Uijttewaai, W. S. J. A linear approach for the evolution of coherent structures in shallow mixing layers. *Physics of Fluids*, vol. 14. 2002, pp. 4105–4114.
53. Provansal, M., Mathis, C., and Boyer, L. The Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 182. 1987, pp. 1–22.
54. Schlichting, H. *Boundary layer theory*. New York: McGraw Hill, 1979.
55. Schmid, P.J., and Henningson, D.S. *Stability and transition in shear flows*. New York: Springer, 2001.
56. Shumm, M., Berger, E., and Monkewitz, P.A. Self-excited oscillations in the wake of two-dimensional bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 271. 1994, pp. 17–53.
57. Stewartson, K., and Stuart, J.T. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 48. 1971, pp. 529–545.

58. Suslov, S.A., and Paolucci, S. Stability of non-Boussinesq convection via the complex Ginzburg–Landau model. *Fluid Dynamics Research*, vol. 35, iss. 3. 2004, pp. 159–203.
59. Uijttewaai, W.S.J, and Booij, R. Effect of shallowness on the development of free-surface mixing layers. *Physics of Fluids*, vol. 12. 2000, pp. 392–402.
60. Uijttewaai, W.S.J., and Tukker, J. Development of quasi two-dimensional structures in a shallow free-surface mixing layer. *Experiments in Fluids*, vol. 24. 1998, pp. 192–200.
61. White, B.L., and Nepf, H.M. Shear instability and coherent structures in shallow flow adjacent to a porous layer. *J. Fluid. Mech.*, vol. 593. 2007, pp. 1–32.
62. Yang, Y., Chung, J.N., Trout, T.R., and Crowe, C.T. The effect of particles on the stability of a two-phase wake flow. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 19. 1993, pp. 137–149.
63. Yang, Y., Chung, J.N., Trout, T.R., and Crowe, C.T. The influence of particles on the spatial stability of two-phase mixing layers. *Physics of Fluids*, vol. A2 (10). 1990, pp. 1839–1845.
64. Zwillinger D. *Handbook of differential equations*. Academic Press, 1998.