RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

DATORZINĀTNES UN INFORMĀCIJAS TEHNOLOĢIJAS FAKULTĀTE

DATORVADĪBAS, AUTOMĀTIKAS UN DATORTEHNIKAS INSTITŪTS

JEGORS FJODOROVS

Doktora studiju programmas "Automātika un datortehnika" doktorants

RISKA PROGNOZĒŠANA NEPĀRTRAUKTO LAIKA MODEĻU IETVAROS TEHNOLOĢIJU UN TIRGUS NOVĒRTĒŠANAI

Promocijas darbs

Zinātniskais vadītājs
profesors *Dr. sc. ing.*
Andrejs Matvejevs

RTU Izdevniecība
Rīga 2019

ANOTĀCIJA

Šobrīd dažādās pasaules valstīs publiskie (valsts) un privātie uzņēmumi izmanto stohastisko modelēšanu prognozēšanas jomā, ar mērķi noteikt sagaidāmo (prognozēto) procentu likmju termiņstruktūru, valūtu kursus, inflācijas līmeni, elektrības pieprasījumu dažādos laika posmos, atvasināto finanšu instrumentu cenas u.c., lai izzinātu optimālo valdības parāda vadības politiku, veiktu finanšu risku ierobežošanu, krājumu modelēšanu un dažādu finanšu aktīvu cenu noteikšanu.

Līdz ar to ir svarīgi prognozēt nākotnes vērtības finanšu aktīviem un makroekonomiskajiem datiem. Viens no pazīstamākajiem prognozēšanas instrumentiem ir Boksa-Dženkinsa (Box and Jenkins, 1970) autoregresīvais integrētais slīdošā vidējā (*ARIMA*) modelis. Taču Boksa-Dženkinsa metodoloģijai ir savi trūkumi (netiek ņemtas vērā aktīvu ienesīgumu sadalījuma ”smagās astes” (*fat tails*) un “augstās virsotnes” *(leptokurtic)*). Mūsdienās veicot prognozēšanu, piemēram, finanšu jomā, nākas saskarties ar datiem, kas nav heteroskedastiski (svārstības nav stacionāras – pastāv straujas izmaiņas dažādos laika intervālos). Darba aktualitāti nosaka fakts, ka pasaulē šobrīd ir izstrādātas un prognozēšanā pielietotas daudzas un dažādas programpaketes, kas aprēķina arī prognozes kļūdu, parasti ar maksimālās ticamības metodi, taču neviena no tām nepārbauda, vai šīs kļūdas sadalījumam ir izpildīti stabilitātes nosacījumi. Tādēļ pieprasījums pēc prognozēšanas metodēm, kas būtu piemērotas darbam ar sērijveida korelēto datu dinamiku, liecina par promocijas darba tēmu aktualitāti.

Promocijas darba rezultāts ir šāda modeļa koncepcija un pielietojums:

- veikta Hestona modeļa reprezentācija diskrētā telpā;
- noteikta opciju pārcenošanas formula, pieņemot, ka aktīvu cenu izmaiņas pakļaujas difūzijas procesam, kas ņem vērā ienesīguma autokorelācijas. Balstoties uz šo formulu, iegūti opciju jutīguma mēri *(Option Greeks)*;
- atrasti neparametriskās regresijas koeficienti, izmantojot Franka kopulu;
- atrasts *GARCH(1,1)* modeļa konverģences laiks stacionārajam atrisinājumam.

Darba praktiskais lietojums saistīts ar precīzāku opcijas cenas noteikšanu jebkurai tirgojamai akcijai. Savukārt kopulveidīgas neparametriskās regresijas izveide ikvienai laikrindai un iegūto rezultātu izmantošana prognozēšanā palīdz pieņemt pareizus fiskālās politikas lēmumus, kas attiecas uz makroekonomiskajiem datiem, vai palīdz pieņemt pareizus lēmumus par finanšu tirgus situāciju, lai veiktu opciju pirkšanas/pārdošanas darījumus. Tādā veidā politikas lēmēji, treideri un citi ar investīciju lēmumu pieņemšanu saistītie speciālisti var iegūt visprecīzāko informāciju.

Darba aprobācija veikta, prezentējot izpētes rezultātus 14 starptautiskās zinātniskās konferencēs un semināros, publicējot 10 zinātniskos rakstus starptautiskos zinātniskajos izdevumos.

Darbs sastāv no piecām nodaļām un secinājumiem. Darbs satur 134 lappuses, 40 attēlus, 7 tabulas un 94 nosaukumus literatūras sarakstā.

ABSTRACT

Nowadays, a variety of public and private companies around the world use stochastic modelling as prediction tool, in order to determine the expected interest rate term structure, exchange rate, inflation, demand for electricity in different time (or year) periods, derivative pricing, as well as to carry out the optimal government debt management policy, hedging, inventory modelling and various financial assets and derivatives pricing.

Therefore, it is essential to predict the future value of financial assets and the macro data. One of the most well-known forecasting tools is Box-Jenkins (1970) autoregressive integrated moving average (ARIMA) model. But Box-Jenkins methodology has its own flaws (it does not account for fat tails and leptokurtotic distributions of an asset returns). Modern forecasting, for example, in finance, faces problems with data heteroscedastity (volatility is not fixed – there are rapid changes at different time intervals).

Promotion work becomes actual due to the fact that in the world currently a lot of different softwares have been developed and are used to forecast, which take into consideration the forecast error that is usually calculated based on the maximum likelihood method, but none of them checks whether or not the stability conditions are met. Therefore demand for forecasting methods that are suitable to work with serial correlation in data dynamics maters the thesis topic actual nowadays.

The result of the thesis are the following model representation and applications:

- Heston model representation in a discrete space was derived.
- Option reprising formula was evaluated, assuming that the asset price changes are subject to the diffusion process, which takes into account autocorrelation in the rate of return. Based on achieved results revalued option sensitivity measures (Option Greeks) were derived.
- The coefficients of a semi parametric regression were found by utilising of Frank copula.
- A GARCH (1,1) model convergence time to a stationary solution was estimated.

Practical value of the promotion work's results is associated with the better option pricing technique for any tradable stock. On the other hand, development of copula based semiparametric regression of any time series and use of the results in the forecasting helps to make the right fiscal policy decisions when it comes to macroeconomic data, or helps to make the right decisions regarding the financial market situation in order to take an option buy or sale position. This way one can get the best information to policy decision-makers, traders and other investment – related professionals.

The approbation of the thesis has been achieved by presenting the results at 14 international scientific conferences and seminars, by publishing 10 articles in international scientific journals or conference proceedings.

The thesis consists of inroduction, four chapters, conclusions and appendixes. It contains 134 pages, 40 figures, 7 tables and 94 references.

PROMOCIJAS DARBS
IZVIRZĪTS INŽENIERZINĀTŅU DOKTORA GRĀDA IEGŪŠANAI
RĪGAS TEHNISKAJĀ UNIVERSITĀTĒ

Promocijas darbs inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai tiek publiski aizstāvēts 2019. gada 3. jūnijā, plkst.10.00, Rīgas Tehniskās universitātes Datorzinātnes un informācijas tehnoloģijas fakultātē, Sētas ielā 1, 202. auditorijā

OFICIĀLIE RECENZENTI

Profesors *Dr. sc. ing.* Jānis Grabis,
Rīgas Tehniskā universitāte

Profesore *Dr. sc. ing.* Irina Arhipova,
Latvijas Lauksaimniecības Universitāte, Latvija

Asoc. profesors *Ph. D. in Informatics Engineering Gintautas Tamulevičius*
Viļņas Universitāte, Lietuva

APSTIPRINĀJUMS

Apstiprinu, ka esmu izstrādājis šo promocijas darbu, kas iesniegts izskatīšanai Rīgas Tehniskajā universitātē inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai. Promocijas darbs zinātniskā grāda iegūšanai nav iesniegts nevienā citā universitātē.

Jegors Fjodorovs …… (Paraksts)

Datums: .....

Promocijas darbs uzrakstīts latviešu valodā, satur ievadu, četras nodaļas, secinājumus un 5 pielikumus, 40 attēlus, 7 tabulas, kopā 134 lappuses. Literatūras sarakstā ir 94 nosaukumi.

SATURS

IEVADS 7
Tēmas aktualitāte 7
Promocijas darba mērķis un uzdevumi 8
Mērķa sasniegšanai izvirzītie uzdevumi 8
Pētījuma objekts un priekšmets 8
Pētījuma metodes 8
Darba zinātniskais jaunievedums 9
Darba praktiskā nozīmība 9
Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes 10
Darba rezultātu aprobācija 10
Promocijas darba struktūra 13
1. FINANŠU LAIKRINDAS UN SERIJVEIDA KORELACIJAS 15
1.1.Teorētiskā modeļa definīcijas un modeļu atlikumu autokorelāciju apraksts 23
1.2.Diskrēta un nepārtraukta laika modeļu salīdzināšana 28
1.3.Kopulas un to pielietojums finanšu jomā 29
1.4.Datu ieguve un apstrāde 32
1.5.Kvantitatīvas metodes lēmumu pieņemšanā 37
1.6.Prognozēšanas būtība 39
1.7.Modeļa izvēle 42
1.8.Dažādu prognozēšanas modeļu kritika 45
1.9.Stacionāru laikrindu modeļi un to identifikācija 47
1.9.1. P-tās kārtas autoregresijas modeļi (*AR(p)*-modeļi) 51
1.9.2. Slīdoša vidējā g kārtas modeļi (*MA(q)*-modeļi) 56
1.9.3. Autoregresīvie slīdošā vidējā modeļi (*ARMA(p,q)* modeļi) 59
1.10. *ARIMA* modeļu trūkumi 63
1.11. Stohastiskie diferenciālvienādojumi un Markova īpašība 65
1.12. Hestona modelis un tā pārveidošana diskrētajā laikā 77
1.12.1. Cenas procesa pārveidošana diskrētajā laikā 79
1.12.2. Svārstību procesu pārveidošana diskrētajā laikā 80
1.12.3. *VIX* indeksa modelēšana ar Hestona modeli 83
2. NEPARAMETRISKĀS REGRESIJAS UN TO UZDOŠANAS VEIDS AR KOPULAM 89
2.1. Kopulas matemātiskā definīcija un veidi 90
2.2. Neparametrisko regresiju modeļu nostādne 93
2.3. Uz kopulām bāzēto algoritmu aprakstīšana 94
2.4. Piedāvātā algoritma praktiskā pielietošana 98
2.4.1. Kopulas izvēle Markova modeļa konstruēšanai *VIX* indeksa datiem 98
2.4.2. Neparametriskās regresijas koeficentu meklēšana 100
2.4.3. Gadījuma procesa noteiktās robežas sasniegšanas laika sadalījuma imitēšanas algoritms 103
2.5. Kopulas meklēšana *GARCH(1,1)* modelim 108
2.5.1. *GARCH(1,1)* modeļa pārveidošana 109
2.5.2. Nelineāras regresijas parametru noteikšana 110
3. *GARCH(p,q)* MODELIS AR AUTOKORELĒTAJIEM ATLIKUMIEM UN OPCIJU PĀRCENOŠANAS VIENĀDOJUMS 113
3.1. Finanšu aktīvu ienesīguma autokorelācijas problēma 113
3.2. Stohastiskās aproksimācijas iegūšana vienādojumam ar sērijveida autokorelācijām akciju ienesīgumos 114
3.3. Opciju pārcenošanas vienādojums 116
3.4. Opciju riska jutīguma koeficentu *(Option Greeks)* pārrēķins 117
3.5. *GARCH(p,q)* modelis un tā stacionaritāte 120

3.6. Stacionāra atrisinājuma funkcijas pārbaude un konverģences ātruma aprēķins fiksētām parametru vērtībām 122
4. AUTOKORELĀCIJAS IZMANTOŠANA OPCIJU CENAS NOTEIKŠANAI 127
4.1. *Tesla Motors Inc* opciju pārcenošana pēc Markova modeļa 128
4.2. *Tesla Motors Inc* akciju ienesīguma svārstīguma imitācijas, izmantojot Montekarlo metodi 129
4.3. *Tesla Motors Inc* akciju opciju pārcenojums 131
PROMOCIJAS DARBA REZULTĀTI UN SECINĀJUMI 133
PIELIKUMI 135
LITERATURAS SARAKSTS 153

Tēmas aktualitāte

Informācijas teorija pēta informācijas pārraidi, apstrādi, ieguvi un izmantošanu. Abstraktā veidā informāciju var uzskatīt par nenoteiktības risinājumu [1]. Šobrīd dažādās pasaules valstīs publiskie un privātie uzņēmumi krāj dažāda veida informāciju un izmanto stohastisko modelēšanu šīs informācijas analīzei, lai noteiktu sagaidāmo procentu likmju termiņstruktūru, valūtu kursus, inflācijas līmeni, elektrības pieprasījumu dažādos laika posmos, atvasināto finanšu instrumentu cenas u.c. Tas nepieciešams, lai aprēķinātu optimālo valdības parāda līmeni, veiktu finanšu risku ierobežošanu, krājumu modelēšanu un dažādu finanšu aktīvu cenu noteikšanu. Iepriekšminētās informācijas apjoms [2] nepārtraukti palielinās, un mūsdienās prognožu izstrādātāji saskaras ar apjomīgu datu daudzumu. Šo datu apstrādes metodes var kavēt lēmumu pieņemšanu. Līdz ar to ir nepieciešami ātri informācijas apstrādes algoritmi, kas balstās uz neparametriskajiem modeļiem. Šajā sakarā promocijas darbā ir izveidotas iteratīvas prognozēšanas procedūras, kuras balstītas uz kopulveidīgajām [55] regresijām.

Mūsdienās ir svarīgi prognozēt nākotnes vērtības finanšu aktīviem un makroekonomiskajiem datiem. Viens no pazīstamākajiem prognozēšanas instrumentiem ir Boksa-Dženkinsa (Box and Jenkins, 1970 [93]) autoregresīvais integrētais slīdošā vidējā (*ARIMA*) modelis. Bet Boksa-Dženkinsa metodoloģijai ir savi trūkumi, piemēram, netiek ņemtas vērā aktīvu ienesīgumu sadalījuma "smagās astes"un "augstās virsotnes" *(leptokurtic)*. Mūsdienās veicot prognozēšanu finanšu jomā, nākas saskarties ar datiem, kas ir heteroskedastiski. Laikrindu svārstības nav stacionāras – pastāv straujas izmaiņas dažādos laika intervālos. Tādējādi atbildīgajam speciālistam būtu jālieto prognozēšanas metodes, kas ir spējīgas reaģēt uz datu svārstību izmaiņām un sērijveida korelācijām. Hestons [70] bija viens no pirmajiem, kurš nodarbojās ar stohastisko svārstību modeļiem un piedāvāja aprakstīt dispersijas procesu ar atsevišķu stohastisko vienādojumu, bet nav pievērsis uzmanību modeļa atbilstības pārbaudei reālajiem datiem. Darba aktualitāti nosaka fakts, ka pasaulē šobrīd ir izstrādātas un prognozēšanai pielietotas daudzas un dažādas programpaketes, kas aprēķina arī prognozes kļūdu, parasti ar maksimālās ticamības metodi, bet pārbaude, vai šīs kļūdas sadalījumam ir izpildīti stabilitātes nosacījumi - momenti var mainīties laikā - pārsvarā netiek veikta [3]. Tādēļ pieprasījums pēc prognozēšanas metodēm, kā arī dažādu atvasinātu finanšu instrumentu cenu noteikšana, kas ir piemērota darbam ar sērijveida korelēto datu dinamiku, liecina par promocijas darba tēmas aktualitāti.

Promocijas darba mērķis un uzdevumi

Promocijas darba mērķis ir izstrādāt riska prognozēšanas modeļu izveides metodes un algoritmus, ņemot vērā novērojumu kļūdu atlikumu nelineāro sakarību. Darbs risina praktiskas problēmas, kas parādās finanšu analīzē - kā atrast patieso vērtību atvasinātajiem finanšu instrumentiem, ieskaitot iespēju līgumus (opcijas), kā uzbūvēt kopulas funkciju, ar kuru varētu aprakstīt dažādu finanšu risku ietekmi uz atvasinātā finanšu instrumenta cenu, kā arī noteikt aktīva vērtības svārstību amplitūdu, iestājoties lielai nenoteiktībai finanšu tirgū.

Mērķa sasniegšanai izvirzīti šādi **uzdevumi:**

- izstrādāt autoregresīvo modeļu uzbūves metodi, balstītu uz kopulas sakarībām;
- izstrādāt metodi atlikumu korelācijas iekļaušanai stohastiskā diferenču vienādojumā un pāreju uz nepārtraukto laiku, kā arī izpētīt šī vienādojuma stacionaritāti;
- izstrādāt Hestona modeļa diskretizācijas metodi;
- ieviest korelācijas korekciju nepārtraukta laika nosacītas dispersijas D.Nelsona riska vadības modelī;
- izpētīt novērojumu kļūdu korelācijas ietekmi uz Bleka-Šoulza modeļa parametriem un pārrēķināt riska ierobežošanas koeficientus.

Pētījuma objekts un priekšmets

Pētījuma **objekts** ir laikrindas. Galvenais pētījuma **priekšmets** ir novērojumu kļūdas nosacītā dispersija.

Pētījuma metodes

Darba pētījuma metodes izriet no formulētās problēmas, t.i., modeļiem, kas ļautu analizēt datus ar autokorelācijām atlikumos. Piedāvātās metodes, tādas kā lineāras regresijas atlikumu ar nestacionāro variāciju analīze, Nobela laureāta R.Engle metode (*ARCH* modelis), nosacītās variācijas *GARCH* modeļu difūzijas aproksimācijas J.Carkova metode, uz kopulām bāzēta nelineārās regresijas konstruēšanas metode un Nobela laureātu R.Mertonas un M.Šoulzas risku vadības un ierobežojuma metode ir tās, kas veido bāzi promocijas darba uzdevumu izpildei. Imitāciju aparāta izstrādei pielietoti vispārpazīstamie stohastiskie modeļi, kuriem pievienotas aktīvu ienesīgumu autokorelācijas. Imitācijas aparāts ir darbības kopums, kas nepieciešams, lai veiktu piedāvāto modeļu statistisko aprobāciju – t.i., ar lielu skaitu atkārtojamo operāciju parādītu konverģenci uz

teorētiskajām vērtībām. Formulēto problēmu risināšanai ir piedāvāts izmantot divu faktoru afīnu modeli, kuram pirmais faktors ir aktīva cena un otrais ─ aktīva cenas svārstīgums. Sekmīgai iegūto modeļu apstrādei un rezultātu reprezentācijai veikta izmantojamo imitācijas modeļu diskrētā reprezentācija un kopulas konstruēšana. Iegūtie modeļi pielietoti finanšu tirgus datiem, izmantojot "*Matlab*" programpaketi. Tātad promocijas darbā lietotas varbūtību teorijas un matemātiskās statistikas metodes, optimizācijas teorijas un imitācijas modelēšanas metodes.

Darba zinātniskais jaunievedums

Promocijas darba rezultāts:

1. autoregresīva prognozēšanas modeļa uzbūve, bez pieņēmumiem par racionālo cerību un prognozēšanas kļūdu atklāto formulas veidu;
2. atlikumu korelācijas iekļaušana diskrētā laika modeļos, pārejot uz nepārtraukto laiku, ļauj uzbūvēt precīzāku prognozēšanas un risku aprēķināšanas modeli.

Darba praktiskā nozīmība

Piedāvāto metodi un algoritmu autoregresīvo modeļu konstruēšanai diskrētajā laikā var izmantot risku analīzei un prognozēšanai pie pietiekoši liela stacionāras izlases apjoma.

Promocijas darba rezultāti attiecībā uz korelācijas korekcijas ieviešanu ļauj precīzāk novērtēt stacionāra stāvokļa sasniegšanas laiku un sadalījumu izveidotajai riska komponentes dispersijai.

Promocijas darba praktiskie rezultāti:

- akciju *VIX* indeksam ir izveidota prognoze, balstoties uz Hestona modeļa diskrēto reprezentāciju;
- atrasta neparametriskā regresija *VIX* indeksam, kas ļauj izdarīt jaunas prognozes;
- izveidots enerģētisko iekārtu prognozēto darbības trūkumu modelēšanas algoritms, kas nodrošina iespēju paredzēt iekārtas drošību;
- ņemot vērā ienesīgumu autokorelāciju, izstrādāta Tesla Motors Inc akciju cenas noteikšanas metode.

Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes

1. Radītais kopulveidīgo regresiju konstruēšanas algoritms ļauj izveidot autoregresīvu prognozēšanas modeli, kurā nav pieņēmumu par racionālu matemātisko cerību un prognozēšanas kļūdu sadalījuma veidu.
2. Diskrētā laika modeļos iekļauta atlikumu korelācija, tādējādi pārejot uz nepārtrauktu laiku, kas ļauj precīzāk konstruēt prognozēšanas modeli un aprēķināt risku.

Darba rezultātu aprobācija

Darba aprobācija veikta, prezentējot iegūtos rezultātus 14 starptautiskās zinātniskās konferencēs un semināros, publicējot 10 zinātniskos rakstus starptautiskos zinātniskos izdevumos. Izstrādātās metodes kopš 2008. gada lieto Latvijas Republikas Valsts kase un kopš 2012. gada – AS *Swedbank*.

Publikācijas:

1. Fjodorovs J., Matvejevs A., Malyarenko A. “Algorithms of the Copula Fit to the Nonlinear Processes in the Utility Industry”// ICTE 2016, December 2016, Riga, Latvia. Iekļauta Scopus datubāzē.
2. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Estimation of Semi Parametric Markov Models with Frank Copula”// Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 2015 – 292.–299. lpp. Iekļauts Scopus datubāzē.
3. Fjodorovs J. “Simulation of Option Prices Using GARCH Processes for Autocorrelated Stock Returns”// Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 2014 – 151.–158. lpp. Iekļauta Scopus datubāzē.
4. Fjodorovs J. “Copula Estimation for GARCH(1,1) Processes”// Proceedings of Journal of Applied Mathematics, 2013 – 111.–120. lpp. Iekļauts Scopus datubāzē.
5. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Evaluation of Dynamics of the VIX Index Via Heston Model”// Proceeding of the International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering ICBIFE’2011, Honkonga, Hong Kong, 12.–13. decembris, 2011. – 125.–131. lpp. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
6. Egle A., Matvejevs A., Fjodorovs J. “The Evaluation of Financial Assets with Autocorrelations in Returns”// Scientific Journal of Riga Technical University, 2012. – 116.–119. lpp. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
7. Fjodorovs J. “Copula Based Semiparametric Regressive Models”//Journal of Applied Mathematics, 2012, Volume V, pp. 241–248, ISIN: 1337-6365. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
8. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Modeling VIX Index Based on Semi Parametric Markov Models with Frank Copula”//Scientific Journal of Riga Technical University, 2014 – 106.–110. lpp. Iekļauta VERSITA un EBSCO datubāzēs.
9. Matvejevs A., Fjodorovs J. “Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties”//Scientific Journal of Riga Technical University, 2013 – 100.–104. lpp. Iekļauts VERSITA un EBSCO datubāzēs.
10. Matvejevs A., Fjodorovs J., Pavlenko O. “Testing Heston Model Consistency and Evaluation of Parameters Thought Reprezentation in Discrete Time”// Journal of Applied Mathematics, 2011, Volume IV, pp. 265–272, ISIN: 1337-6365. Iekļauts VERSITA datubāzē.

Konferences

1. An. Matvejevs, J. Fjodorovs, O. Pavlenko “Testing Heston Model Consistency and Evaluation of Parameters Thought Reprezentation in Discrete Time” 10th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2011 in Bratislava, Slovakia, February 3–5, 2011.
2. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Copula Based Semiparametric Regression Models” 16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, May 26–29, 2011, Sigulda, Latvia.
3. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “The Impact of Serial Correlation on Financial Active Pricing and Risk Hedging” 17th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, June 6–9, 2012, Tallinn, Estonia.
4. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Copula Based Semiparametric Regressive Models” 11th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2012 in Bratislava, Slovakia, February 7–9, 2012.
5. J. Fjodorovs “Modeling Stohastic Proceses Using Copula Approach” RTU International Conference, October, Riga, Latvia, 2011.
6. J. Fjodorovs “Copula Based GARCH(1,1) Models” 18th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, May 27–31, 2013, Tartu, Estonia.
7. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Pricing of Financial Actives with Serial Correlation in Returns” RTU 53rd International Scientific Conference, October 11–12, Riga, Latvia, 2012.
8. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Copula Based Semiparametric Regressive Models” 12th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2013 in Bratislava, Slovakia, February 5–7, 2013.
9. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties” RTU 54th International Scientific Conference, October 14–16, 2013, Riga, Latvia.
10. An. Matvejevs, J. Fjodorovs “Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties” 7th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE 2013), December, 15–19, 2014, London, Great Britain.
11. J. Fjodorovs “Simulation of Option Prices Using GARCH Processes for Autocorrelated Stock Returns” 13th International Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2014 in Bratislava, February 4–6, 2014.

12. J. Fjodorovs “Copulas and Markov chains” 10th Latvian International Mathematical conference, April 11–12, 2014, Liepāja, Latvia.
13. J. Fjodorovs “Copula Fit to the Nonlinear Processes in the Utility Industry” 11th Latvian International Mathematical conference, April 1–2, 2016, Daugavpils, Latvia.
14. An. Matvejevs, J. Fjodorovs Algorithm for Imitation of a Time Span for Reaching a Border of a Random Process” RTU 57th International Scientific Conference, October 14–18, 2016, Riga, Latvia.

Promocijas darba struktūra

Darbs sastāv no ievada, četrām nodaļām, rezultātiem un secinājumiem, literatūras saraksta un 5 pielikumiem. Darbs satur 134 lappuses, 40 attēlus, 7 tabulas, un 94 nosaukumus literatūras sarakstā. Promocijas darba struktūra ir šāda:

ievadā ir pamatota veikto pētījumu aktualitāte, formulēts darba mērķis un uzdevumi, uzskaitītas promocijas darba izstrādē pielietotās pētnieciskās metodes, aprakstīta pētījuma zinātniskā novitāte un iegūto rezultātu praktiskā nozīmība, kā arī izklāstīta darba rezultātu aprobācija.

Pirmajā nodaļā "*Finanšu laikrindas un sērijveida korelācijas* " izstrādāts Hestona modeļa diskretizācijas algoritms, kas varētu būt piemērots dažādu stohastisko modeļu pārveidošanai diskrētajā laikā. Tā rezultātā modeļu stacionaritāti un atbilstību izlases datiem ir iespējams izpētīt ar zināmām metodēm, kuras izmanto ARIMA klases modeļu pētīšanai. Aprobējot piedāvāto metodi uz ASV akciju opciju svārstīguma indeksiem VIX, var pārliecināties par Hestona modeļa rezultātu atbilstību reālajiem datiem, pirms tiek pieņemts lēmums par noteiktas opcijas pirkšanas/pārdošanas darījumu. Papildus šajā nodaļā ir aprakstīti pētāmo objektu datu iegūšanas veidi, prognozēšanas būtība un ARIMA modeļu jēdziens, veidi un stacionaritātes nosacījumi.

Otrajā nodaļā *"Neparametriskās regresijas un to uzdošanas veids ar kopulām"* definēts neparametrisks Markova modelis un izstrādāts šī modeļa pārejas blīvumu atrašanas paņēmiens, izmantojot Arhimēda tipa kopulas. Ar šo paņēmienu ir iespējams pārveidot Markova modeli kopulas telpā (kur Markova ķēde ir kompakta), kas savukārt ļauj izmantot varbūtību teorijas robežteorēmas un veikt diferenču vienādojumu aproksimāciju ar difūzijas vienādojumiem. Rezultātā var pārskatīt vairāku atvasināto finanšu instrumentu cenas noteikšanas formulas un koriģēt tās, balstoties uz finanšu tirgus datiem. Šajā nodaļā kā piemērs ir izveidota Markova kopulveidīga neparametriskā

regresija *VIX* indeksa datiem. Turklāt ir uzbūvēta kopula *GARCH(1,1)* modeļa svārstīgumam, balstoties uz dažiem nosacījumiem par šī modeļa parametriem un marginālo sadalījumu.

Trešajā nodaļā *"GARCH(p,q) modelis ar autokorelētajiem atlikumiem un opciju pārcenošanas vienādojums"* ar Markova modeli, kurā ir izdalīts korelācijas koeficients, pārveidoti *GARCH(1,1)* modeļa atlikumi. Izmantojot minēto modeli, tika pārveidots Bleka-Šoulza (*Black – Scholes)* opciju cenošanas modelis un ar to saistītie opciju jutīguma mēri (*Option Greeks*). Jaunā formula ļauj precīzāk novērtēt cenas, ņemot vērā "smagās astes" aktīvu ienesīgumu. Turklāt izmantotās metodes lietderības pārbaudei veikta *GARCH(1,1)* konverģences uz stacionaritāti un Gamma sadalījumu pārbaude, ņemot vērā korelācijas koeficientu. Iepriekš minēto problēmu risināšanai tika veikta imitācijas modelēšana Matlab Simulink vidē.

Ceturtajā nodaļā *"Autokorelācijas izmantošana opciju cenas noteikšanai"* ir izskatīta autokorelācijas iekļaušanas metode, balstoties uz *Tesla Motors Inc* akciju opciju cenu noteikšanas tehniku un veicot Montekarlo imitācijas sagaidāmajam svārstīgumam un opciju pārcenošanu. Konstruētā sistēma palīdz veidot savu skatījumuu uz finanšu tirgus situāciju, opciju cenām un izdarīt pamatotu lēmumu attiecībā uz akciju vai opciju pirkšanu/pārdošanu.

1. FINANŠU LAIKRINDAS UN SĒRIJVEIDA KORELĀCIJAS

Viens no mūsdienu ekonometrijas pamatuzdevumiem ir laikrindu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ analīzes metožu attīstīšana ar autoregresīvo modeļu palīdzību, neveicot iepriekšējus pieņēmumus par fāzes koordinātes nosacītās matemātiskās cerības atkarības formu no laikrindas iepriekšējās vērtības.

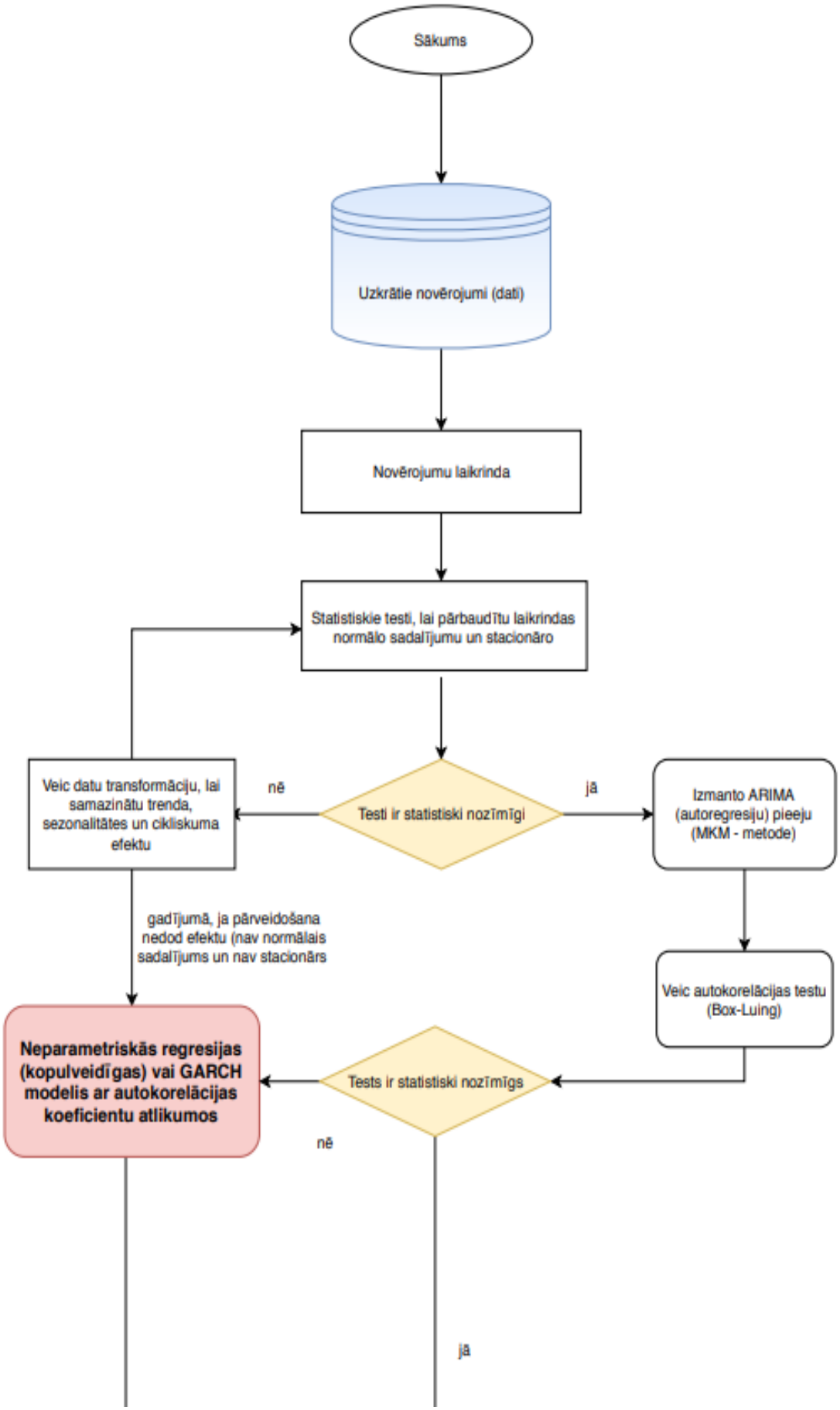
Galvenais iemesls tendencei atteikties no tradicionāliem lineāriem modeļiem ir gadījuma vērtības, kuras apraksta reālo modeļu uzvedību, nav normāli sadalītas.

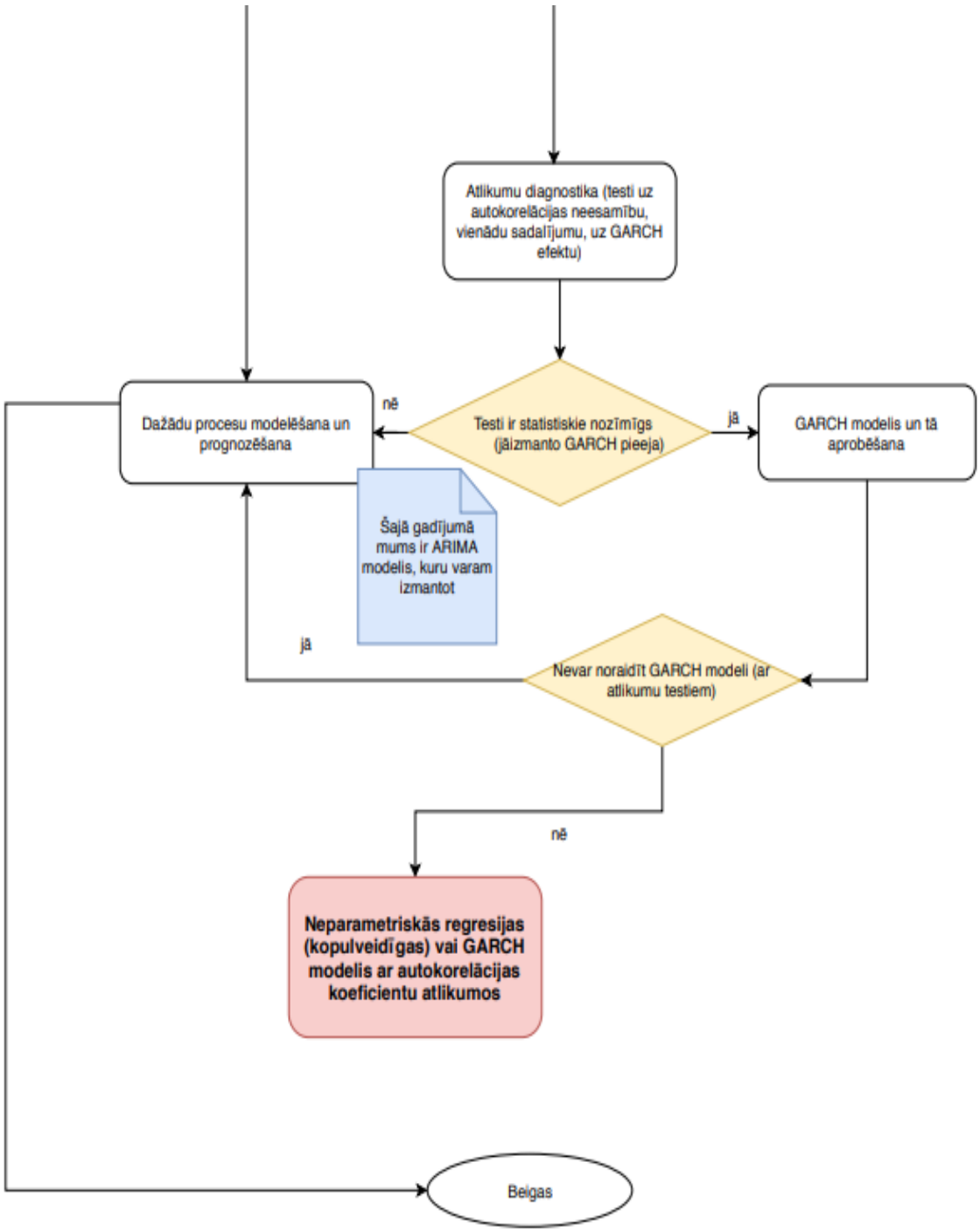
Laikrindu analīzē galvenā uzmanība tiek pievērsta datu struktūras pētījumiem, aprakstam un/vai modelēšanai [3]. Šādu pētījumu mērķis parasti ir plašāks nekā vienkārši eksistējošu procesu analīze un modelēšana. Izveidotais modelis parasti tiek izmantots laikrindas ekstrapolācijai vai prognozēšanai, un šajā gadījumā prognozes kvalitāte ir vērtīgs kritērijs alternatīvu modeļu izveidei. Laba modeļa izveide nepieciešama arī citiem pielietojumiem, piemāram, sezonālo efektu korekcija un nogludināšana [4]. Visbeidzot, izveidotie modeļi var tikt izmantoti garu novērojumu rindu statistiskai modelēšanai lielu sistēmu pētījumos, kurām laikrinda ir ieejas informācija.

Ņemot vērā ekonomisko rādītāju mērījumu kļūdas un gadījuma fluktuāciju esamību, kas raksturīga novērojumu sistēmām, laikrindu pētījumos plaši tiek lietota varbūtību teorija un matemātiskā statistika. Šo zinātņu ietvaros novērojamo laikrindu uztver kā kāda gadījuma procesa realizāciju. Tiek pieņemts, ka laikrindai ir noteikta struktūra, tādējādi tā atšķiras no neatkarīgu gadījuma lielumu virknes, jo novērojumi nav pilnīgi neatkarīgu skaitlisku vērtību kopa. Parasti tiek pieņemts, ka rindas struktūru var aprakstīt ar modeli, kas salīdzinājumā ar novērojumu skaitu satur nelielu parametru skaitu. Tas ir svarīgi praktiskā pielietošanā, lai izveidoto modeli varētu izmantot prognozēšanai. Modeļu piemēri ir autoregresijas modelis *AR(p)*, slīdošā vidējā modelis *MA(q)*, kā arī to kombinācijas – *ARMA(p,q)* un *ARIMA(p,k,q)* [3].

Daudzos zinātnieku darbos, analizējot un modelējot makroekonomiskos rādītājus, kas raksturo inflācijas, ārējās tirdzniecības, procentu likmju, valūtas kursu u.c. procesus, tika novērotas vispārīgas likumsakarības apskatāmo modeļu gadījuma atlikumu uzvedībā (prognozes kļūdu): to lielās un mazās vērtības grupējās veseliem klasteriem vai sērijām, t.i., mierīgo un nemierīgo stāvokļu periodi mijās [7]. Turklāt tas noveda pie stacionaritātes un homoskedastitātes (t.i., kļūdu sadalījuma vienmērības) traucējumiem salīdzinoši garos laika intervālos, no kā izrietēja hipotēze, ka dispersija nav konstanta, kas bija pretrunā ar

eksperimentālajiem datiem [8]. Ar *ARMA* modeļiem šo fenomenu neizdevās izskaidrot, tāpēc bija nepieciešama tajā laikā zināmo modeļu modificēšana.

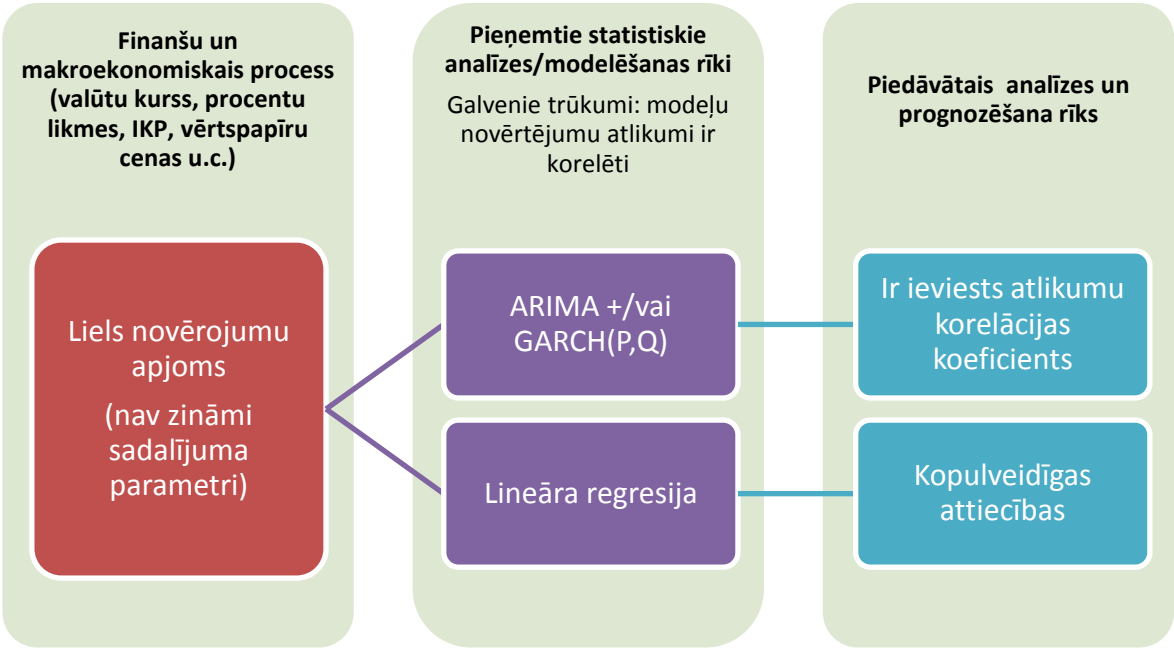

Sākums
Uzkrātie novērojumi (dati)
Novērojumu laikrinda
Statistiskie testi, lai pārbaudītu laikrindas normālo sadalījumu un stacionāro
Veic datu transformāciju, lai samazinātu trenda, sezonalitātes un cikliskuma efektu
nē
Testi ir statistiski nozīmīgi
jā
Izmanto ARIMA (autoregresiju) pieeju (MKM - metode)
gadījumā, ja pārveidošana nedod efektu (nav normālais sadalījums un nav stacionārs
Veic autokorelācijas testu (Box-Luing)
Neparametriskās regresijas (kopulveidīgas) vai GARCH modelis ar autokorelācijas koeficientu atlikumos
Tests ir statistiski nozīmīgs
nē
jā



1.1. att. Statistisko modeļu konstruēšanas algoritms.

Šādu modifikāciju pirmo reizi piedāvāja R. Engls [8], kurš aplūkoja atlikumus kā nosacīti heteroskedastiskus, t.i., saistītus ar autoregresīvu atkarību. Viņš izstrādāja *ARCH(q)* modeli, kuram arī sastopamas daudzas modifikācijas, no tām pazīstamākā ir *GARCH(p,q)*.

Līdz ar to informācijas nepietiekamība par sadalījuma likumu neļauj izskaitļot iepriekš minēto nosacīto matemātisko cerību analītiski, kādas funkcijas veidā ar nezināmiem parametriem, kā arī reducēt problēmu līdz mazāko kvadrātu metodes novērtēšanai, kā tas ir pieņemts Gausa teorijā.



1.2. att. Datu apstrādes modeļu izklāsts

1.2. attēlā ir izveidota blokshēma, kas apraksta esošo modeļu (pa vidu) iespējas un promocijas darbā izstrādātos šo modeļu papildinājumus. Shēmai ir ilustratīva nozīme. Mērķis ir parādīt izstrādāto modeļu/algoritmu vietu kopējā modelēšanas jomā. Lineāra regresija, *ARIMA* un *GARCH(p,q)* ir klasiski piemēri matemātiskajā statistikā, kuri ļauj veikt prognozēšanu, pamatojoties uz trendu. Savukārt promocijas darbā izveidotie modeļu papildinājumi palīdz uzlabot dažādu procesu imitācijas un prognozēšanas iespējas, t.i., ļauj aprakstīt procesus ar sērijveidā korelētajiem atlikumiem (ieviešot atlikuma korelācijas koeficientu), kā arī veidot modeļus, balstoties uz dažāda tipa kopulām, kuri apraksta ne tikai normāli sadalītus datus, bet arī datus ar „smagām astēm" un „augstām virsotnēm". Tāda pieeja imitāciju[1] modeļa ietvaros palīdz prognozēt gadījumus ar mazu iestāšanās varbūtību biežāk nekā normālais sadalījums (sk. augstākminēto diagrammu 1.1. attēlā

[1] Ar vārdu „imitācija" autors saprot Montekarlo modelēšanu, t.i., noteiktas formas modeļu izstrādi, kas varētu dot labākus rezultātus procesa aprakstīšanai un prognozēšanai.

„Statistisko modeļu konstruēšanas algoritms”). Līdz ar to uzlabojas (tiek precizēti) dažādi aprēķini finanšu jomā, ekonomikā, enerģētikā u.c.

Promocijas darbs papildina esošo *ARIMA* modeļu klasi ar neparametriskajām regresijām un *GARCH* modeļiem ar autokorelācijas koeficientu.

1.1.attēla shēmā (turpmāk - Shēma) ir aprakstīts kopējais dažādu modeļu atrašanas process, kurā ir ietverti promocijas darbā izstrādātie modeļi.

Shēma sākas ar *datu uzkrāšanu*. Dati varētu būt dažādi – iekšējās vai ārējās datu bāzes, kurās iekļauta informācija par dažādiem tautsaimniecības procesiem (par datu struktūru skat. 1.4.nodaļā). Promocijas darbs pēta novērojumu virknes $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}\}$, ko sauc par laikrindām. Virkni iegūst, novērojot gadījuma lielumu x_t, kas mainās laika momentos $t_1; t_2; \dots; t_n$. Primārā datu analīze sākas ar grafisko attēlošanu (skat. 2.3. un 2.4.3.nodaļu).

Turpmāk veikti s*tatistiskie testi***,** lai pārbaudītu laikrindas normālo sadalījumu un stacionaritāti.

Pārsvarā statistiskajos pētījumos izmanto plaši pazīstamās metodes, kā Kolmogorova – Smirnova tests normālā sadalījuma pārbaudei, Diki - Fulera (*Dickey–Fuller* vai *ADF*) tests, kas pārbauda hipotēzi par vienības saknēm (vai momenti ir stacionāri, skat. 1.9.nodaļu) autoregresīvajā raksturīgajā vienādojumā u.c.

Ja laikrinda nav *stacionāra* (statistiskie testi nav nozīmīgi), tad viena no iespējām, kā iegūt stacionāro laikrindas sadalījumu, ir veikt datu transformāciju. Aprakstot laikrindu, tajā parasti izdala četras komponentes:

$$x_t = f(T_t, S_t, C_t, I_t)$$

kur T_t - trends, S_t-sezonalitāte, C_t- cikliskā komponente, I_t- neregulārā komponente.

Par laikrindas trendu T_t laika momentā t= 1,2..n sauc datu sistemātiskās izmaiņas, parasti to augšanas vai dilšanas laikā. Šī komponente atspoguļo ilglaicīgo tendenci analizējamās pazīmes x_t izmaiņās. Šī tendence tiek raksturota ar monotonas ne gadījuma funkcijas palīdzību:

$$T_T = f(t, \Delta)$$

kur Δ - parametru vektors.

Par laikrindas *sezonalitāti* $S_t$sauc datu sistemātiskas, periodiskas izmaiņas laikā. Vispārīgi, ja laikrindai piemīt sezonalitāte ar periodu s, tad līdzīgas laikrindas izmaiņas atkārtojas ik pēc s bāzes laika intervāla.

Laikrindas *cikliskā komponente*, kurai varētu būt noteikts periods, apraksta periodiskas datu svārstbas ap trendu. Tā parasti saistīta ar biznesa vai ekonomiskajiem apstākļiem. Par

cikla periodu sauc cikla garumu. To mēra no vienas virsotnes (maksimuma punkta) līdz otrai, vai tieši pretēji - no viena minimuma punkta līdz otram.

Neregulārā komponente apraksta nedeterminētas svārstības, kuras var sadalīt 2 grupās: pēkšņas strukturālas datu izmaiņas un gadījumu svārstības, kas rodas daudzu maznozīmīgu faktoru dēļ. Izdalot no laikrindas trendu, ciklu un sezonalitātes komponenti, varētu iegūt stacionaritāti. Bet, lai pārliecinātos par stacionaritātes un normāla sadalījuma esamību, ir atkārtoti jāveic statistiskie testi. Gadījumā, ja statistiskie testi nav nozīmīgi, tad jāizmanto promocijas darbā piedāvātās metodes – neparametrisko regresiju (skat. 2.nodaļu) un *GARCH* modeļus ar autokorelācijas koeficientu uzbūvi (skat. 3.nodaļu un 4.nodaļu).

Ja laikrinda ir stacionāra, tad var sākt konstruēt *ARMA* modeļus pēc Boksa-Dženkinsa metodoloģijas [93] (sk. 1.1.shēmas kvadrātos „Izmanto *ARIMA* pieeja" un „Veic autokorelācijas testu"). Metodoloģija balstīta uz 3 soļu metodi, ar mērķi izvēlēties labāko modeli. Trīssoļu metode tika radīta 1976. gadā [93].

Pirmais solis metodes pielietošanā ir identificēšanas solis, kurā laikrinda tiek attēlota grafiskajā vidē, attēlojot tajā katru x_t vērtību kā funkcija no laika t. Dotais grafiks sniedz papildu informāciju: vai laikrindā ir kāda trūkstoša vērtība, vai ir kādi strukturālie pārtraukumi. Tālāk, pirmā soļa ietvaros, laika rindai tiek izveidotas autokorelācijas (*ACF*) un parciālautokorelācijas (*PACF*) korelogrammas vairākām vērtībām (skat. 1.9.nodaļu). Pēc *ACF* un *PACF* konstruēšanas var secināt par iespējamo *ARMA* modeli. Gadījumā, ja visas *ACF* un *PACF* ir statistiski vienādas ar nulli, tad izmantojamas promocijas darbā piedāvātās metodes – neparametriskā regresija (skat. 3.sadaļu) un *GARCH* modeļi ar autokorelācijas koeficientu uzbūvi (sk. 3.nodaļu un 4.nodaļu).

Otrajā solī, kas dēvēts par vērtēšanas soli, tiek konstruēti un analizēti *ARMA (p; q)* modeļi jeb procesi. Uzkonstruētie *ARMA(p; q)* modeļi tiek analizēti un salīdzināti savā starpā, izmantojot vairākus kritērijus, lai atrastu vislabāko no iespējamiem modeļiem. Visbiežāk lietotie kritēriji, kas spēj noteikt, vai izveidotais modelis ir labāks par kādu citu, spriežot pēc koeficenta vērtības, ir Akaike Informācijas kritērijs un Baijesa informācijas kritērijs (*AIC*, *SBC* skat. 2.4.nodaļu).

Trešais posms (Shēmā process ar nosaukumu „Atlikumu diagnostika") tiek dēvēts par diagnostikas pārbaudi un balstās Box-Luing metodoloģijā. Diagnostikas pārbaudē ietilpst atlikumu grafiskā analīze, stabilitātes pārbaude jeb atlikumu korelogrammas izvērtēšana. Lai pārbaudītu korelāciju starp atlikumiem, jāpārbauda atlikumu *ACF* un *PACF* izveidotajam modelim. Tad pēc Box-Luing Q-statistikas var noteikt, vai *ACF* un *PACF* ir statistiski nozīmīgas. Jāņem vērā arī tas, ka, izmantojot atlikumus no *ARMA (p, q)* modeļa, Q ir χ^2 ar brīvības pakāpi, kas vienāda ar s-p-q brīvības pakāpi. Šajā solī ietilpst

arī modeļu salīdzināšana izlases ietvaros un ārpus tās. Modeļa atlikumu korelācija rāda, vai izvēlētais *ARMA* modelis ir piemērots vai nav piemērots dotajai laikrindai un vai tas ir vai nav stabils. Tad aplūko atlikuma summas kvadrātu korelogrammu - jāpārbauda *LM* tests attiecībā uz *GARCH* efektu (*Lagrange Multiplier test for conditional heteroskedasticity*). Ja ACF un PACF ir nozīmīgas, tad var apgalvot, ka šim ARMA modelim būs nepieciešami *GARCH/ARCH* procesa uzlabojumi (Shēmā process ar nosaukumu „*GARCH* modelis un tā aprobēšana", (skat.3.5. un 4.2.nodaļu). *GARCH* jeb vispārinātais, autoregresīvi nosacīti heteroskedastiskais modelis tika izveidots 1986. gadā, un tā autors bija T.Bollerslev [15] (skat.3.5.nodaļu). Vispārinātais autoregresīvi nosacīti heteroskedastiskais process pieļauj autoregresīvai un vidējai slīdošajai komponentei heteroskedastisku dispersiju. *GARCH* modeļa konstrukcija pēc būtības ir līdzīga *ARMA* klases modeļiem. Līdz ar to modeļa pielāgošanas algoritms varētu būt līdzīgs augstāk minētajam.

Savukārt atrodot laikrindai labāko modeli pēc *ARIMA* vai *GARCH* metodoloģijas, var veikt dažādu procesu modelēšanu un prognozēšanu. Shēmā termins 'Dažādu procesu modelēšana un prognozēšana" minēts, lai vispārinātu un piemērotu izmantotās metodes gandrīz jebkurai tautsaimniecības nozarei.

Gadījumā, ja statistiskie testi nav nozīmīgi un *GARCH* nav piemērots dotajai laikrindai, tad izmantojamas promocijas darbā piedāvātās metodes – neparametriskā regresija (skat. 2.nodaļu) un *GARCH* modeļi ar autokorelācijas koeficientu uzbūvi (skat. 3.nodaļu un 4.nodaļu).

Rezumējot iepriekšminēto, promocijas darbā ir izstrādātas metodes, kas papildina *ARIMA* modeļus vai *ARIMA* modeļus ar *GARCH* efektu, gadījumā, kad standartizētā Boksa-Dženkinsa metodoloģija nestrādā (skat. 1.12., 2.4.un 4.1. nodaļu). Pielietojot aprakstīto metodi, neparametriskās regresijas meklēšanā, bez pieņēmuma par racionālu matemātisko cerību un risku (dispersiju), var ne tikai papildināt *ARIMA* klases modeļus, bet arī uzbūvēt daudz kvalitatīvākus rīkus/modeļus dažādu tautsaimniecības procesu prognozēšanai, jo minēto modeļu pamatā ir kopulas (skat. 2.1. un 2.2. nodaļu), kas ļauj būvēt sakarības ar dažādu statistisko sadalījumu un atkarības veidu. Savukārt *GARCH* modeļu papildināšana ar autokorelācijas koeficientu ļauj pamanīt, īpaši īstermiņā, datu atkarību izmaiņas un veikt, piemēram, finanšu opcijas prēmiju aprēķināšanas korekciju – rezultātā tiek mazināts risks un uzlabots uzcenojums (skat. 4.3.nodaļu).

1.1. Teorētiskā modeļa definīcija un modeļu atlikumu autokorelāciju apraksts

Informācijas par sadalījuma likumu nepietiekamības dēļ vairākos laikrindu $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ regresīvās analīzes praktiskajos uzdevumos jau parastākajā gadījumā pirmās kārtas nelineārajā diferenču vienādojumā ir jānovērtē nezināma funkcija $f(x)$ [7,9,10,11]

$$x_t = f(x_{t-1}) + h_t, \tag{1.1}$$

kur h_t- nekorelētie atlikumi ar vidējo vērtību 0.

Iepriekš aprakstīto laikrindu analīzes problēmu sauc par autoregresijas neparametrisko novērtēšanu [12].

Ar $\mathcal{F}^t$ apzīmēsim minimālo sigma-algebru, attiecībā pret kuru gadījuma lielumi ir izmērāmi. Tad meklējamo funkciju var noteikt ar nosacītās matemātiskās cerības $f(x_t) \coloneqq \mathbb{E}\{x_t/\mathcal{F}^{t-1}\}$ palīdzību.

Izmantojot sigma-algebras virkni $\{\mathcal{F}^t, t\epsilon\mathbb{Z}\}$ un nosacīto dispersiju $\sigma_t^2 \coloneqq \mathbb{E}\{h_t^2/\mathcal{F}^{t-1}\}$, atlikumus h_t vienādojumā (1.1) var atspoguļot kā „baltā trokšņa” $\{\xi_t, t\epsilon\mathbb{Z}\}$ (neatkarīgo vienādi sadalīto gadījuma lielumu virknes ar vidējo vērtību 0 un dispersiju 1) un nosacītās standartnovirzes reizinājumu: $h_t \coloneqq \sigma_t\xi_t$ [13].

Skaidrs, ka iepriekš noteiktā sigma-algebras virkne šajā gadījumā ir minimāla priekš $\{\xi_t, t\epsilon\mathbb{Z}\}$. Attiecībā uz nosacīto dispersiju σ_t^2 var minēt faktu, ka tā var būt $\mathcal{F}^{t-1}$ izmērāms gadījuma lielums, kas ir atkarīgs no $\{\xi_s, s \leq t-1\}$, un arī var tikt novērtēts.

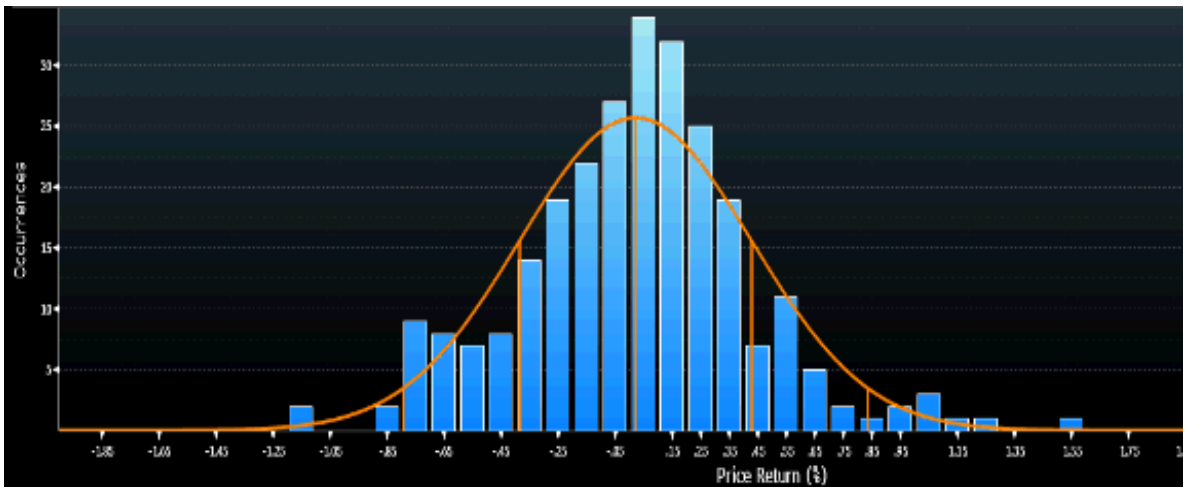
Šo atlikumu dispersijas īpašību sauc par nosacīto heteroskedastitāti, un tā tiek modelēta ar lineāro diferenču vienādojumu, kura koeficienti ir lineāri atkarīgi no „baltā trokšņa” (*GARCH(p,q)* procesi) [13].

Lai atrastu funkcijas $f(x)$ vērtību noteiktā apgabalā, veic šī apgabala diskretizāciju (t.i., sadala pietiekoši maza platuma intervālos δ) un pēc tam katrā intervālā izmanto mazāko kvadrātu metodi vai arī minimizē ar speciāli izstrādātu funkcionāli, kas balstās uz integrāli ar dažādas formas kodoliem (kodolu novērtēšana [10,14]).

Savukārt iespējamos praktiskajos pielietojumos h_t struktūra pārsvarā ir ļoti sarežģīta un atkarīga no iepriekšējo vērtību korelācijas. Lai ilustrētu šo parādību, kā ievadu 2. un 4. promocijas darba uzdevumu, apskatīsim EUR/USD valūtu kursu gada garumā — no 2013. gada 30.aprīļa līdz 2014. gada 30.aprīlim (skat. 1.3.attēlu).

1.3. att. *EUR/USD* valūtu kurss.

Apskatītā laikrinda nav stacionāra, ir svārstīga un tās dinamikas aprakstīšana ar metodēm, kas balstītas uz parastajiem Gausa-Markova nosacījumiem (ar homoskedastisko standartnormālo kļūdu struktūru), var izraisīt kļūdas (1.1.att. pirmais posms par stacionaritātes testiem). Uz to norāda arī šī valūtu pāra maiņas kursa dienas ienesīguma histogramma (skat. 1.4.attēlu), kura uzrāda „smagās astes" un „augstās virsotnes" pazīmes.



1.4.att. EUR/USD valūtu kursa dienas ienesīguma histogramma.

Ar y_t apzīmējam logaritmu no ikdienas valūtu kursu ienesīgumiem S_t. Konstruējot y_t lineāro autoregresiju, veidojas atlikumu heteroskedastiskā struktūra. Turklāt šīs parādības aprakstīšanai nav pietiekami izvēlēties *GARCH* procesu, jo var manīt sērijveida korelāciju, t.i.:

$$y_t = lnS_t \;\; ; \;\; y_{t+1} = a + by_t + \underbrace{\varepsilon_{t+1}}_{atlikumi} \; ; a, b - parametri$$

$$\varepsilon_{t+1} = \sigma_t \xi_{t+1}, \sigma_t - standartnovirze, \sigma_t \sim \mathcal{F}^{t-1} \; izmērojama$$

$$\xi_{t+1} = \rho \xi_t + \eta_{t+1} \sqrt{1-\rho^2} \, , \rho - parametrs, \eta_t \sim i.i.d. N(0,1)$$

$$Correl(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) = E\{\sigma_t \xi_{t+1} \sigma_{t-1} \xi_t\} = E\{E\{\sigma_t \xi_{t+1} \sigma_{t-1} \xi_t / \mathcal{F}^t\}\} =$$

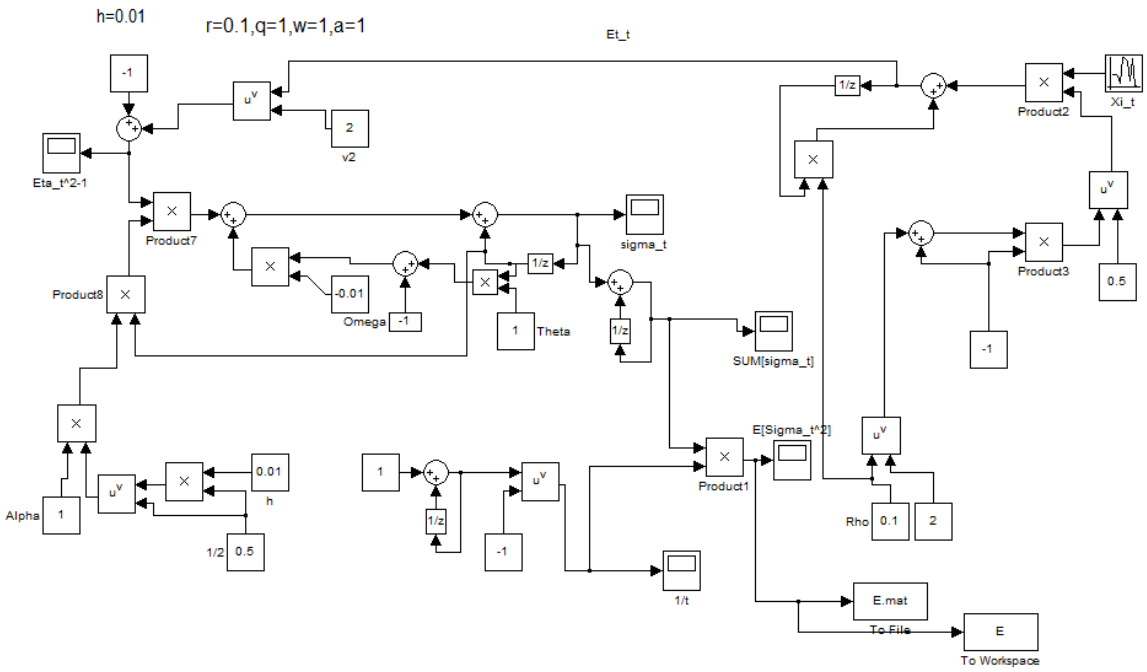
$$= \{E\{\sigma_t \xi_{t+1} \sigma_{t-1} \xi_t / \mathcal{F}^t\}\} E\left\{\sigma_t \sigma_{t-1} \xi_t \underbrace{E\{\xi_{t+1} / \mathcal{F}^t\}}_{=\rho \xi_t}\right\} =$$

$$= \rho\{E\{\sigma_t \sigma_{t-1} \xi_t^2\}\} \leq \rho \; max \underbrace{E\{\sigma_t^2 / \mathcal{F}^t\}}_{=\alpha} \underbrace{E\{\xi_t^2\}}_{stac=1} =$$

$$= \rho \geq \frac{1}{\alpha} \underbrace{Correl(\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_t)}_{y_t atlikumu \; korelācija} \approx \frac{1}{\alpha} \underbrace{0{,}08}_{no \; EUR/USD}$$

$\alpha = \max_t \{\sigma_t^2\}$ ir mazs, līdz ar to parametrs ρ varētu būt daudz lielāks par kļūdas autokorelāciju $Correl(\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_t) = 0.08$. Ja ir nepieciešams analizēt šī parametra ietekmi uz pētāmā matemātiskā modeļa dinamiku, t.i., apskatītajā piemērā ar *EUR/USD* valūtu kursa dienas ienesīgumu, koeficientam ρ jābūt vienādam ar 0, bet tas tā nav, kas nozīmē, ka hipotēzi par atlikumu autokorelāciju nevar noraidīt.

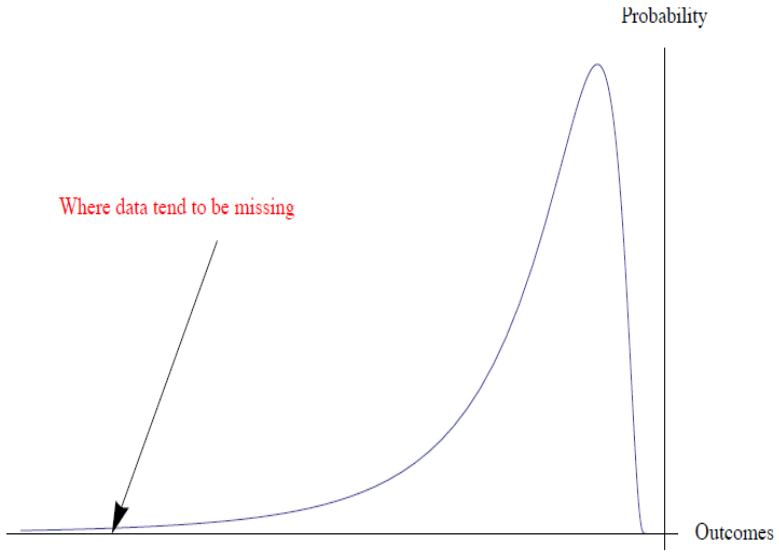
Promocijas darbā, lai izpētītu koeficienta ρ ietekmi uz *GARCH(1,1)* modeļa difūzijas aproksimācijas stacionaritāti, tika veikta imitācijas modelēšana "Matlab Simulink" vidē. Šīs problēmas atrisināšana, ļauj apstiprināt otro, aizstāvēšanai izvirzāmo tēzi (sk. promocijas darba 2. un 3. nodaļu).



1.5.att. Konverģences uz stacionāro sadalījumu pētīšanu *Matlab Simulink* vidē.

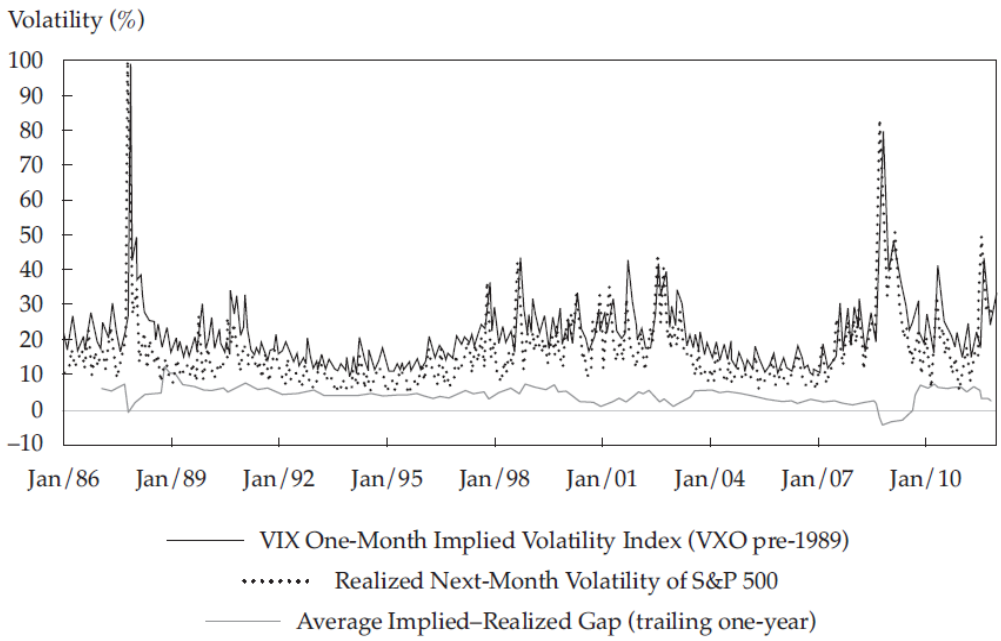
Imitācijas rezultāti (sk. 3.nodaļu) norāda uz lielo atkarību no koeficienta ρ vērtības: jo šī vērtība ir tuvāka skaitlim 1, jo vājāka ir konverģence uz stacionāro sadalījumu.

Cits piemērs ir akciju tirgi. Visbiežāk vēsturiskais akciju ienesīgums uzrāda negatīvu asimetriju (skat. 1.6.attēlu). Bet dažreiz, nosakot opcijas cenu, analītiķi nenovērtē kreiso histogrammas pusi (iespējamo „smago asti"), kas savukārt noved pie sagaidāmās vidējās vērtības nepareizas noteikšanas. Jo lielāka asimetrija akciju ienesīgumā un tievāks kreisais histogrammas gals, jo lielāka ir starpība starp sagaidāmo un patieso vidējo vērtību.



1.6. att. Vēsturiskā akciju ienesīguma histogramma.

Rezultātā, kā redzams 1.7.attēlā, vismaz divas reizes pēdējo 30 gadu laikā (1987. gadā un 2008. gadā), tas radījis katastrofālus zaudējumus opciju pārdevējiem. Opciju pārdošanas lēmumi tika balstīti uz diezgan konservatīviem pieņēmumiem par akciju ienesīguma svārstībām, kas savukārt bija nepietiekami vidējā termiņa zaudējumu segšanai ar saņemtajām opciju prēmijām.



Source: Bloomberg.

1.7. att. Akciju svārstības indeksa *VIX* sagaidāmā un reālā vērtība.

Tādējādi, lai veiktu kvalitatīvu finanšu aktīvu modelēšanu un ar to saistīto atvasināto finanšu instrumentu vērtības noteikšanu, būtu nepieciešams izmantot modeļus, kas apraksta sērijveida korelācijas atlikumus, kā arī ņem vērā dažādus atlikumu heteroskedastiskos efektus, tādus kā „smagās astes" un „augstās virsotnes" atlikumu statistiskajos sadalījumos. Esošā *ARIMA* klases struktūra, kā arī *GARCH* modeļu papildinājums neļauj veikt prognozēšanu datiem, kam piemīt dažādi sadalījumi, kā arī dažāda veida atkarības struktūra. Kopulveidīgās struktūras ir viens no labākajiem veidiem kā modelēt dažādas sakarības.

Lai risinātu minēto problēmu, ir piedāvāts izmantot neparametrisko regresiju formā:

$$t \in Z : X_t = f(X_{t-1}) + g(X_{t-1})\xi_t, \qquad (1.2)$$

kur X_t – laikrinda, $\{\xi_t, t \in Z\}$ ir i.i.d. (identiski sadalītas), *N(0; 1)*.

Funkciju $\hat{f}$ un $\hat{g}$ novērtējumu var veikt, pārveidojot vienādojumu (1.2) kopulas telpā. Savukārt, vienādojumu (1.2) var pārveidot formā, kurā tiek izdalīta atkarība no iepriekšējās vērtības:

$$t \in Z : X_t = X_{t-1} + \varepsilon f(X_{t-1}, \varepsilon) + \varepsilon g(X_{t-1}, \varepsilon)\xi_t,$$

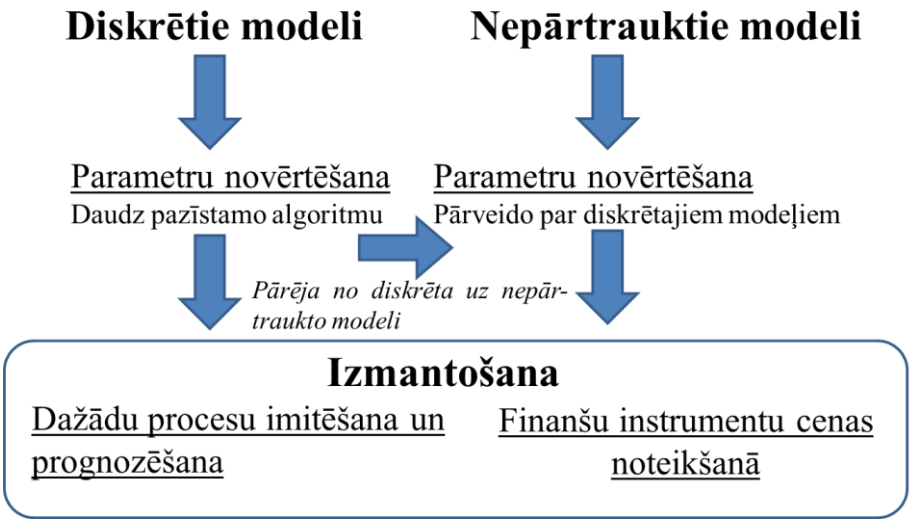
kur ε ir mazs skaitlis mazāko parametru metodes pielietošanai ar mērķi, lai veiktu robežpāreju no diskrētā stāvokļa uz nepārtraukto.

Turpmāk šo vienādojumu ir viegli izmantot difūzijas aproksimācijai (Tsarkov, 2002 [61]). Rezultātā tas dod iespēju veikt atvasināto finanšu instrumentu pārcenošanu, izmantojot modificētu Bleka–Šoulza formulu (5.uzdevums promocijas darbā). Plašāk par vienādojuma (1.2) izmantošanu finanšu aktīvu modelēšanā izklāstīts nākamajās nodaļās. Bet pirms tam dažas sadaļas tiks veltītas statistisko datu veidiem, prognozēšanas būtībai un visizplatītāko stacionāro modeļu veidiem.

1.2.Diskrētā un nepārtrauktā laika modeļu salīdzināšana

Dažādu tautsaimniecības procesu novērojumu apjoms ir milzīgs, t.i., vienā sekundē varētu notikt tūkstošiem novērojumu. Līdz ar to laika solis ir mazs un ir iemesls pāriet uz bezgalīgu laiku. Turklāt daudzi rezultāti ir iegūti tieši nepārtrauktā laikā, kā stohastisko diferenciālvienādojumu atrisinājumi vai modelēšana. Runājot par diskrēto laiku, var minēt gadījumus, kad vienādojumi ir sarežģīti un atrast konverģējošo atrisinājumu faktiski nav iespējams. Pastāv gadījumi, kad noteiktā laika momentā atrisinājums ir bezgalība vai, lai atrastu risinājumu, ir jāveic katru reizi Montekarlo imitācija. Piemēram, ja pievienotu *AR(1)* modelim kvadrātisko locekli - diskrētā laikā atrast analītisko atrisinājumu nav iespējams.

Promocijas darbā izmantota Bleka–Šoulza opciju cenošanas tehnika. Lai šo pieeju īstenotu, veikta robežpāreja (nosacītās variācijas *GARCH* modeļu difūzijas aproksimācijas metode, J.Carkovs, 2008 [52]). Opciju prēmijas noteikšana veikta uz eliptiskā diferenciālvienādojuma atrisinājuma pamata. Diskrētajā laikā tieši šis algoritms nestrādā, bet citas opciju prēmijas atrašanas metodes (sazarošanas koks u.c.) prasa lielus laika resursus un precizitātes pārbaudi katrā solī.



1.8. att. Prognozēšanas modeļu struktūra.

1.3. Kopulas un to pielietojums finanšu jomā

Kopula ir funkcija, kas savieno vienmērīgi sadalītas funkcijas daudzdimensionālā sadalījuma funkcijā. Pirmo reizi vārds „kopula" matemātikā izmantots 1959. gadā, kad Sklar pierādīja teorēmu par divdimensionālajiem sadalījumiem. Fišers (Fisher, 1997 [94]) papildināja „*Encyclopedia of Statistical Sciences*" ar vārdiem „Kopulas ir interesantas statistiķiem divu iemeslu pēc - pirmkārt, ir iespējams modelēt dažāda veida atkarības – uz sadalījuma astēm vai centrā un, otrkārt, šī pieeja ir sākumposms jebkura divdimensionālā sadalījuma uzbūvē".

Promocijas darbā apskatītas lielo datu rindas analizēšanas iespējas. Pamatā ir izmantotas divdimensionālās atkarības – tiek uzbūvēta starpību (diferenču) shēma. (skat. 3.nodaļu), kā rezultātā iegūts Markova process. Izmantotas kopulas, lai atrastu atkarību novērojumus par vienu soli atpakaļ. Darbā pierādīts, ka kopulas blīvums ir Markova procesa pārejas blīvums – rezultātā ir izveidota metode neparametriskās regresijas parametru noteikšanai.

Nelineārās laikrindas, jo laikrindai piemīt izmaiņas laikā – strukturālas, trendi, cikliskums u.c., identificēšanas iespējas, izmantojot nosacītās vidējās vērtības un nosacītās dispersijas neparametriskos novērtējumus, ir minēta vairākos rakstos (skat., piemēram, X.Chen, Y.Fan., 2006 [33]). Parasti analizē laikrindas $\{\mathbf{x_t}, \mathbf{t} \in \mathbf{Z}\}$ regresīvo modeļu atkarības struktūru, kas ir noteikta ar invariantu marginālo sadalījumu un kopulas funkciju, kas ģenerē procesa laika atkarību. Kā norādīts [32], tas ļauj nodalīt laika atkarību, piemēram, sadalījuma astes atkarību no laikrindu marginālā sadalījuma uzvedības, piemēram, sadalījuma augstas virsotnes. Darbā piedāvāts algoritms kā identificēt kopulveidīgās atkarības un novērtēt neparametriskās regresijas gaidas un svārstību funkcijas, pārejot uz kopulas telpu.

Vēl viena kopulveidīgo atkarības metodes priekšrocība ir iespēja piemērot varbūtību teorijas robežteorēmu pārejai no diferenču vienādojuma uz nepārtrauktā laika stohastisko diferenciālvienādojumu (D.B. Nelson [34], 1980. un Y. Ait-Sahalia, R. Kimmel, 2007. [35]).

Faktiski, kopula ir vispārināts veids, kas veido nosacījumus divdimensionālo sadalījumu konstruēšanai. Gadījumā, ja runa ir par lineāro regresiju, tā ir tikai Gausa kopulas parciālais gadījums. Kopulas pieeja ļauj rīkoties ar nelineārajām un nestacionārajām laikrindām.

2007.-2008. gada finanšu krīze ir skaidri parādījusi, ka tirgus risku novērtēšanai izmantotās metodes nav pietiekamas, jo tās ir būtiski kļūdainas. Viena no galvenajām

problēmām, kas parādījās vērtspapīru tirgū liela satricinājuma brīdī, bija vienvirziena aktīvu korelācijas pieaugums. Tajā pašā laikā pieredze rāda, ka ārkārtas notikumu parādīšanās vienam aktīvam, iespējams, ir saistīta ar ārkārtas notikumu iestāšanos citiem finanšu aktīviem. Tā rezultātā diversificēts vērtspapīru portfelis uzrādīja dinamiku, kas pirms 2007.-2008. gada krīzes bija gandrīz neiespējama no daudzdimensionāla normālā sadalījuma viedokļa. Daudzdimensionālo sadalījumu modelēšanai plaši tika izmantotas eliptiskas kopulas (galvenokārt Gausa) [31], kuras pirms krīzes izmantoja, lai novērtētu ieguldījumu risku. Gausa kopulas galvenais trūkums ir astes atkarības neeksistence daudzdimensionālā sadalījumā.

Lai strādātu ar kopulām, ieteicams izskatīt nozīmīgāko darbu šajā jomā. Pilnīgākais pamatjēdzienu apraksts ir uzrādīts vairākās publikācijās (Joe, 1997 [37]; Nelsen, 2006 [84]), kurās autori sniedz pārskatu par esošo kopulu saimēm, ievieš ar kopulu saistīto terminoloģiju, apskata attiecības starp modeļa parametriem un rangu korelācijas koeficientu, piedāvā risinājumus un metodes, lai modelētu gadījuma skaitļus sadalījuma saimēm. Turklāt ir vairāki raksti (Fantazzini, 2008 [85]), kuros kopulas izmantošana sīki apskatīta lietišķos ekonometriskos pētījumos. Atsevišķi atzīmējama grāmata (Mai, Scherer, 2012 [86]), kuras autori apvieno pārskatu par kopulu modelēšanas pētījumiem plašā jomā, standartizē un apkopo dažādu pētnieku rezultātus, kā arī lielu uzmanību velta efektīvu algoritmu modelēšanas problēmai dažādu gadījuma lielumu klasēm un kopulu saimēm. Dažāda pieeja daudzdimensionālo sadalījumu modelēšanai atrodama (Kole, E., Koedijk, K., Verbeek M. (2006) [81]) darbos, no kuriem izriet, ka ***t*** - kopula ir vislabākā starp eliptiskajām, savukārt Arhimēda kopulas novērtē risku precīzāk nekā eliptiskās, bet hierarhiskās vairākparametru kopulas daudz labāk apraksta finanšu riskus nekā hierarhiskās viena parametra kopulas. Kopulas tiek piemērotas ne tikai vērtspapīru portfeļa riska modelēšanai: Penikas un Simakova (2009) [87] izmantojuši kopulas, lai pārvaldītu bankas procentu likmju risku. Arhimēda kopulu piemērošana finanšu instrumentu novērtēšanā parādīta vairāku autoru darbos (Hsu, Ch.-Ch., Tseng Ch.-P., Wang Y.-H. [83]). Hierarhisko kopulu tūlītēja izmantošana un efektivitātes analīze lietota darbā (Savu, 2006 [76]; Mai, Scherer, 2012 [86]; Ane, Th., Kharoubi C. (2003) [73]). Pēdējās divas publikācijas pirmo reizi ierosināja formālu pieeju hierarhisko kopulu struktūras definēšanā, bet citos darbos struktūra nosacīta apriori, pamatojoties uz autora spriedumiem. Apkopojot dažādu darbu rezultātus, var secināt, ka hierarhiskās kopulas precīzāk modelē vērtspapīru tirgus risku izmaiņas, bet nav atrasts efektīvs algoritms, lai noteiktu hierarhiskās kopulas struktūru.

Zemāk, 1.1.tabulā, ir sistematizēts literatūras apskats, kas apliecina to, ka modelēti daudzdimensiju sadalījumi finansēm nav sadalīti normāli.

Literatūras pārskats par kopulu izmantošanas sadalījumu imitāciju 1.1.tabula

Darba autori (publikācijas gads)	**Laikrindas veids**	**Novērojumu periods**	**Labākā kopula**
Ane, Kharoubi (2003)[73]	Akciju indeksi	1987 – 2000 (dienas dati)	Kleitona
Junker, Szimayer, Wagner (2003)[75]	ASV obligāciju cenas	1982 – 2001 (mēneša dati)	Franka
Rosenberg, Schuermann (2006)[79]	Banku riski	1994 – 2002 (ceturkšņa dati)	t
Natale (2006)[78]	Akciju indeksi	1991 – 2004 (mēneša dati)	Kleitona
Tang, Valdez (2006)[80]	Apdrošināšanas riski	1992 – 2002 (pus gadīgi)	Košī
Kole, Koedijk, Verbeek (2006)[81]	Akciju indeksi, obligācijas, nekustāmais īpašums	1999 – 2004 (dienas dati)	t
Patton (2006)[82]	Valūtu kursi	1991 – 2001 (dienas dati)	SJC-Džo-Kleitona simetriskā kopula
Savu, Trede (2006)[76]	Akcijas	1996 – 2006	Gumbeļa
Cech (2006)[74]	Obligācijas	2000 – 2006 (dienas dati)	t
Hsu, Tseng, Wang (2007)[83]	Akciju indeksi	1995 – 2005	Gumbeļa
Morone, Cornaglia, Mignola (2007)[77]	Banku riski	2002 – 2005 (mēneša dati)	t

Kvantitatīvās finansēs kopulas izmanto finanšu riska menedžmentā, lai pārvaldītu un optimizētu vērtspapīru portfeļus un noteiktu cenu atvasinātajiem finanšu instrumentiem.

Kopulas lieto stresa testus un tirgus stabilitātes testus, kas ir ļoti svarīgi finanšu tirgus krituma/panikas/krīzes periodos, kad varētu notikt ekstremālas svārstības. Turklāt kopulas tika adoptētas finanšu tirgiem, lai novērtētu zaudējuma varbūtību aizņēmuma portfelim vai obligācijām.

Kopulas atkarība un lineārā korelācija

Parastā lineārā korelācija nav pietiekams dažādu finanšu instrumentu veidu atkarības rādītājs vairāku iemeslu dēļ. Pirmkārt, ienesīgumu dispersija brīžiem ir bezgalīga, tas ir, gadījumos, kad tiek novēroti ekstremāli notikumi, lineārā korelācija starp vērtspapīriem ir nenoteikta. Otrkārt, korelācija ir tikai lineāra atkarība. Treškārt, lineārā korelācija nav nemainīga ar nelineāriem, stingri pieaugošiem pārveidojumiem, kas nozīmē, ka ienesīgums var būt nekorelēts, kamēr cenas ir savstarpēji saistītas, vai otrādi. Ceturtkārt, lineārā korelācija nosaka tikai atkarības pakāpi, bet skaidri nenosaka atkarības struktūru.
2008. gadā, finanšu krīzes laikā, bija plaši novērots, ka cenu svārstības dažādos tirgos un valstīs notiek vienā un tajā pašā laika periodā, pat gadījumā, ja korelācija starp šiem tirgiem ir diezgan zema.
Atkarības struktūra ietekmē sasniegto diversifikācijas ieguvumu, kas balstīts uz lineāro korelācijas pasākumu. Vairāk izplatīta pieeja, kas novērš lineārās korelācijas trūkumus, ir atkarības modelēšana, izmantojot kopulu. Ar kopulas metodi atkarības veids, ko var modelēt, ir vispārīgāks un var ņemt vērā ekstremālo notikumu atkarību.
Biežāk kopulu izmanto, lai nošķirtu viena mainīgā (piemēram, finanšu aktīva) tīru nejaušību no savstarpējās atkarības starp to un citiem mainīgajiem lielumiem. To darot, katru mainīgo var modelēt atsevišķi, turklāt ir jānovērtē attiecības starp šiem mainīgajiem lielumiem. Tehniski tas nozīmē, ka vienreizējo varbūtības sadalījumu, kas informē par viena mainīgā gadījuma izmaiņām, var modelēt pēc izvēlēta sadalījuma, bet citu mainīgo ─ izmantojot cita veida varbūtības sadalījumu. Tādējādi, jebkuram aktīvam var izvēlēties vispiemērotāko sadalījuma veidu, kas neietekmē šo mainīgo / aktīvu savstarpējo atkarību. Šo mainīgo savstarpējo atkarību atspoguļo daudzfaktoru varbūtības sadalījuma funkcija, kas sniedz informāciju par mainīgo lielumu kopīgajiem rezultātiem, un šī daudzdimensiju sadalījuma funkcija ir kopula.

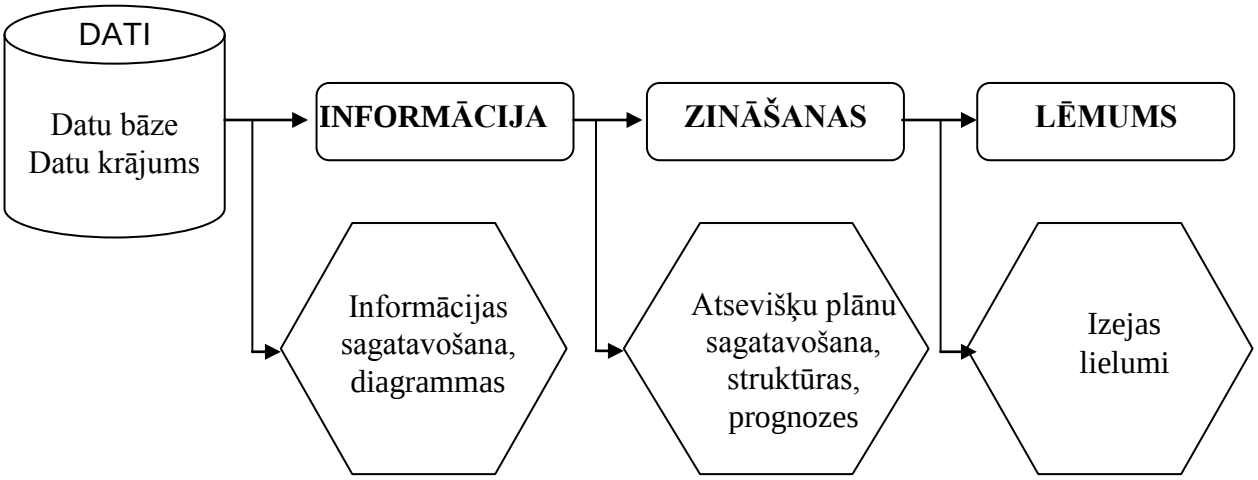
1.4. Datu ieguve un apstrāde

Turpmākās 4 apakšnodaļas ir iekļautas darbā, lai aprakstītu datu struktūras veidu, lēmumu pieņemšanu, balstoties uz datiem, un laikrindu prognozēšanas veidus.

Datos ir ierakstīti aktivitāšu, objektu un notikumu raksturlielumi, kas pielietoti uzņēmuma darbības atspoguļošanai (piemēram, ražošanas, tirdzniecības, finanšu u.c. rezultātiem) [89]. Ar datu palīdzību katru aktivitāti var atspoguļot pēc nepieciešamības detalizēti. Galvenokārt izmantoti divu tipu dati:

- *kārtējie dati*, kas satur un atspoguļo pašlaik notiekošo aktivitāšu šī brīža informāciju;
- *vēsturiskā tipa dati,* kas satur un atspoguļo informāciju par pilnīgi pabeigtām darbībām. Tie summē informāciju par uzņēmuma darbību un/vai katru aktivitāti atsevišķi. Parasti vēsturiskos datus izmanto, lai prognozētu dažādu notikumu uzvedību, piemēram, finanšu tirgus dinamiku, ražošanas, tirdzniecības un pieprasījuma apjomu.

Informācija ir lietošanai sagatavoti dati, kurus var izmantot uzņēmuma iekšējie vai ārējie lietotāji, un vairākumā gadījumu tiek precīzi definēts, kāda informācija ir pieejama katram lietotājam. Informācijas sagatavošana ir to datu uzkrāšana, kas ir vērtīgi un kurus var pielietot informācijas nodrošināšanai. Informācijas sistēma ir analoga ar ražošanas sistēmu. Dati ir informācijas sistēmas izejmateriāls. Kompilēšanas, kārtošanas, summēšanas, atskaišu veidošanas procedūras ir līdzīgas ražošanas sistēmas procedūrām.



1.9. att. Datu pielietojums prognozēšanas procesā.

Datu krājums un datu bāzes

Datus var ievākt no trim avotiem:

- *esošie uzskaites ieraksti* – vienkāršākais un lētākais datu avots. Iekšējās uzskaites datiem lietotājs var pilnīgi noteikt to precizitāti un piemērotību

atbilstošajai situācijai. Nozīmīgākais šim datu avotam ir tas, ka uzskaites ierakstu sistēma var būt elastīga un dati ir vienādi ar lietotāja prognozēšanas prasībām. Bieži gadījumā, kad uzskaites sistēma nesatur datus, kas nepieciešami vadības lēmumu pieņemšanai, tiek lemts par jaunu datu uzkrāšanu. Šo uzkrāšanas procesu var veikt divos veidos. Pirmais veids – dati ir neatkarīgi no laika. Otrais – ir nepieciešams norādīt, uz kādu laika periodu šie dati attiecas.

- *Sākotnējie dati* – nozīmīgākās priekšrocības sākotnējo datu uzkrāšanas izvēlē ir speciālu prasību ievērošana un elastīguma ieviešana uzkrāšanas procedūrās. Šī elastība un specifikācija paaugstina kopējās datu uzkrāšanas izmaksas.
- *Publicētie dati* – līdzīgi ārējiem datiem. Lietotājam ir jāsavāc nepieciešamā informācija no ārējiem avotiem. Vairākumā gadījumu šai informācijai ir vispārējs raksturs un lietotājs nevar iegūt detalizētu informāciju, kas ir daudz vairāk nepieciešama. Publicēto datu vākšana izslēdz iespēju iegūt detalizētus uzņēmuma iekšējos datus. Priekšrocība ir tāda, ka publicētie dati sniedz informāciju par konkurentiem.

Labākais datu uzkrāšanas veids ir datu bāzes. Datu bāzēs dati tiek uzkrāti vienotā sistēmā pēc dažādām mainīgo vērtībām un tie ir pieejami, kad vien nepieciešams. Datu bāze ietver trīs prognozēšanai izmantojamo datu tipus:

- dati, kas nepieciešami prognozēšanas vajadzībām;
- dati, kas pieejami, bet pagaidām nav vajadzīgi;
- dati, kas varētu būt vajadzīgi nākotnē, bet pagaidām nav pieejami.

Datu bāzes, kuras satur tikai pašlaik esošos datus, ir visprecīzākās un vislētākās sistēmas attīstīšanai. Mazas izmaksas ietver to mainīgo datu uzkrāšana, kuri pašreiz nav nepieciešami, bet varētu būt vajadzīgi nākotnē. Ja datu bāze satur visus trīs datu tipus, tad to var pielietot ikvienā situācijā un tai jābūt elastīgai. Ja datu bāze satur atšķirīgu datu vienību krājumus un tiek izstrādāta jauna prognoze, tad nepieciešamie dati jau būs pieejami. Ja datu bāze ir izveidota, tad uzkrāto datu papildus mainīgo izmaksu pieaugums ir zems.

Datu uzkrāšanas procedūrā ļoti nozīmīga ir sistēmas kļūdu un uzkrāto datu precizitātes pārbaude. Pārbaudes ir jāizdara periodiski, un, ja iespējams, tad tās vienmēr jāveic vienai un tai pašai personai.

Datu kvalitātes noteikšanai veic procesa auditu. Auditu var sadalīt trīs soļos: pirmais ir datu uzkrāšanas procesa analīze, lai noteiktu tās iespējamos uzlabojumus. Otrais – esošo datu krājuma kvalitātes detalizēta novērtēšana. Trešais audita solis ir datu uzkrāšanas izmaksu analīze un noskaidrošana, vai šīs izmaksas tiek kontrolētas.

Datu apstrādes pamatfunkcijas

Dati ir pārveidoti par "apstrādes" sistēmas informāciju. Sistēma var tik veidota no dažādām cilvēku, dokumentu, inventāra kombinācijām. Datu apstrādes sistēmai ir deviņas pamatfunkcijas:

- *iegūst* – novērtē un ieraksta notikumus, aktivitātes formā, kas būtu piemērota turpmākai apstrādei;
- *pārbauda* – kontrolē un apstiprina datus, lai nodrošinātu, ka tie ir oriģināli un pareizi;
- *sakārto* – jeb sašķiro. Šī operācija sakārto datus tādā secībā, lai tos varētu izmantot turpmāk;
- *summē* – sagrupē datus kādā matemātiskā kopā vai loģiski reducē;
- *aprēķina* – veic matemātiskas un/vai loģiskas datu operācijas;
- *uzkrāj* – ievieto datus datu bāzē, lai vēlāk tos varētu lietot;
- *atgūst* – meklē un atrod specifiskus datus no vietām, kur tie iepriekš tikuši uzglabāti;
- *atjauno* – dublē datus no vienas vietas uz citu;
- *komunicē* – pārsūta datus no vienas glabāšanas vietas uz citu.

Visās datu apstrādes sistēmās pielieto šīs minētās 9 funkcijas, lai gan ne vienmēr visas funkcijas ir nepieciešamas.

Primārie un sekundārie dati

Prognozēšanā tiek izmantoti divu veidu dati:

- *primārie dati* – prognozētājs pats vāc prognozei nepieciešamos datus;
- *sekundārie dati* – kāds cits vāc un sagatavo prognozei nepieciešamos datus.

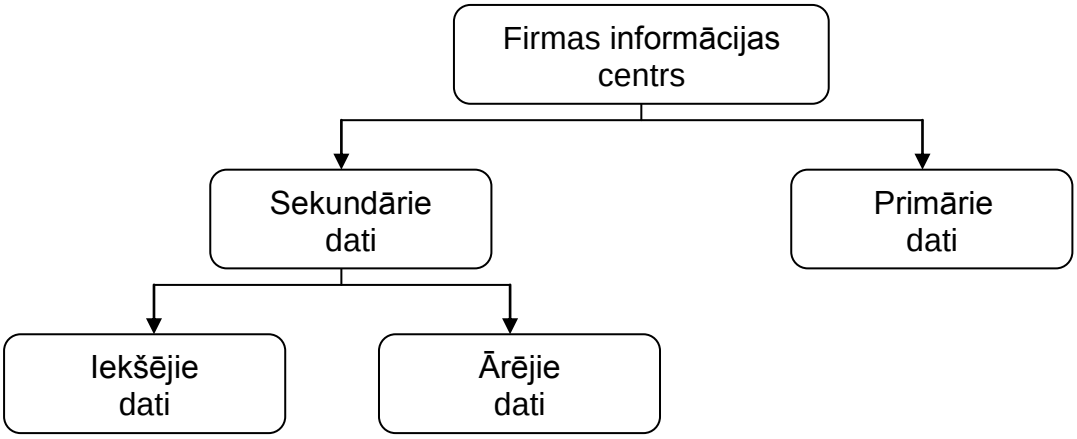
Primārie dati ir nepieciešami, ja tiek izmantoti analīzes tehnikas jauninājumi. Tādā gadījumā *primāros daus* pieprasa kā informāciju no sākotnējās bāzes un uz šīs bāzes pamata veic analīzes tehnikas atbilstības pārbaudi.

Sekundāros datus var sadalīt divās pamatkategorijās:

- *ārējie dati* – dati no firmas ārējiem avotiem, kas veido lielāko sekundāro datu daļu;
- *iekšējie dati* – šie dati ir savākti firmas iekšienē un ir normāla biznesa darbības sastāvdaļa, jo dati satur informāciju par tirdzniecības elementiem, izejmateriāliem, inventāra ierakstiem u.c. Daudzās firmās iekšējo datu uzkrāšana ir neorganizēts process un tādēļ informācija par ražošanas, tirdzniecības un

firmas vadības procesiem ir nepietiekama. Tieši šī iemesla dēļ prognozēšanā tiek izmantota informācija no ārējiem avotiem.

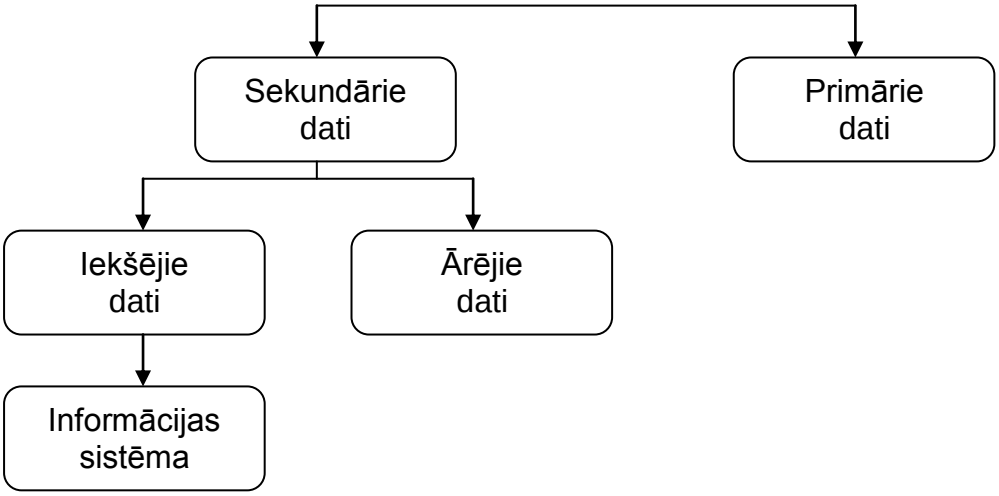
Informācijas sistēmu var aprakstīt kā organizētu cilvēku vai/un iekārtu sistēmu (skat. 1.10. attēlu), kas nodrošina sakārtotu informācijas vākšanu gan no primāriem, gan sekundāriem avotiem. Ideāli, ja šāda sistēma tiek veidota un kontrolēta centralizēti vienā struktūrvienībā, kura uzkrāj un ģenerē pilnībā datus par visiem potenciālajiem to pielietojumiem no firmas lēmuma pieņēmēju puses.



1.10. att. Saites starp informācijas sistēmu un datu avotiem.

Lielākajā daļā firmu ir sistēmas, no kurām lietotājs regulāri saņem iekšējo datu izdrukas, (piemēram, par tirdzniecības un ražošanas procesiem), bet viņam ir maz zināšanu par pieejamiem ārējiem vai primārajiem datiem.

Nākamajā attēlā ir redzama uzņēmuma informācijas sistēma (1.11.att.).



1.11. att. Tipiskas attiecības starp informācijas sistēmu un datu avotiem.

Datu ievade un kontrole

Prognozēšana ir cieši saistīta ar operāciju plānošanas un kontroles funkcijām [88].

Visi ieejas dati ir jāatlasa pēc šādiem trim faktoriem:

- laiks,
- precizitāte,
- jutīgums.

Laika faktors ir noteicošais gan kārtējiem, gan pieejamajiem datiem, un tiem būtu jābūt pietiekamiem, lai pieļautu produkcijas izmaiņas, kas rodas, veicot jaunu plānošanu.

Precizitātes veidošana sastāv no trīs soļiem: pirmais – mainīgo labošana; otrais solis ir datu ievade; trešajā solī notiek datu ievades pareizības kontrole.

Lai nodrošinātu datu jutīguma kontroli, ievaddati tiek tīšām izmainīti. Izmainītos datus lieto, lai uzlabotu prognožu precizitāti, samazinātu netipisku datu ierakstu ietekmi, izlīdzinātu datus laikā vai tos laikā sinhronizētu.

1.5. Kvantitatīvās metodes lēmumu pieņemšanā

Kvantitatīvo metožu pamatā ir zinātniski-praktiskā pieeja, kas piedāvā optimālo lēmumu pieņemšanu balstīt uz milzīga informācijas apjoma apstrādes rezultātiem, apstrādē izmantojot analītiskos vai algoritmiskos modeļus [88].

Matemātiskais (analītiskais) modelis – modelis, kurā tiek pielietoti simboli objekta vai notikuma īpašību aprakstam un raksturojumam. Šādu modeli sastāda ar formulu palīdzību.

Modeļa izveide sastāv no vairākiem soļiem:

- uzdevuma formulēšana;
- modeļa izveide;
- datu atlase modelim;
- modeļa atbilstības pārbaude;
- modeļa pielietošana;
- modeļa atjaunošana.

Modeļa efektivitāti var samazināt šādi faktori:

- neticami gala pieņēmumi;
- informācijas pieejamības un ticamības ierobežojumi;

- lietotāja bailes, neticība modeļa rezultātiem;
- vājas pielietojuma iespējas praksē;
- izstrādes dārdzība.

Atkarībā no izmantojamo matemātisko funkciju tipa izšķir šādus modeļu tipus:

- matemātiskās programmēšanas modeļi:
  - lineārā programmēšana;
  - integrālā programmēšana;
  - mērķa programmēšana.
- Plānošanas procedūras:
  - tīkla modeļi (PERT, CPM);
  - diagrammas (Ganta diagramma).
- Diskrētie un stohastiskie modeļi:
  - diskrētā programmēšana;
  - lēmumu Beijesa analīze;
  - spēļu teorijas modeļi;
  - markova analīze;
  - rindu (masu apkalpošanas) modeļi.
  - Prognozēšanas modeļi;
- citas procedūras:
  - dinamiskā programmēšana;
  - nelineārā programmēšana.

Veidojot analītiskos modeļus, vispopulārākā ir *lineārās programmēšanas* tehnika. To pielieto, risinot uzdevumus, kas saistīti ar ierobežojumiem (resursu, laika, darbaspēka, enerģijas, finanšu, materiālu) un kuru mērķa funkcija ir peļņas palielināšana. Matemātiskajā modelī būtiska ir funkcionālo attiecību linearitāte. Šādu modeļu izveidošanas tehnika balstās uz noteiktu soļu algoritma izmantošanu.

Gadījumos, kad izmantotas *stohastiskās* procedūras, atšķirībā no lineārās programmēšanas, modeļa rezultātiem ir tikai varbūtisks raksturs, t.i., tiem ir zināma nenoteiktības pakāpe, turklāt parasti ir iespējami vairāki alternatīvi lēmumi.

Tīkla modeļos un *diagrammās* ir visprecīzākās matemātiskās sakarības un tās sistēmu analīzi balsta uz pārskatāmā veidā sakārtotām darbībām.

Citas procedūras izmanto vairāku pakāpju (soļu) metodes, kas atkarīgas no risināmo uzdevumu linearitātes.

Pētot procesus un situācijas, kas savas sarežģītības dēļ nav matemātiski aprakstāmas (vai to matemātiskie modeļi ir ļoti sarežģīti), bieži izmanto algoritmisko (nematemātisko) modelēšanu.

Nākotnes iznākumu novērtējumi, kas saņemti formālu metožu izmantošanas rezultātā, ir tikai bāze gala lēmumu pieņemšanai. Parasti ir jāņem vērā papildkritēriji, tai skaitā arī tie, kuriem ir neformāls raksturs.

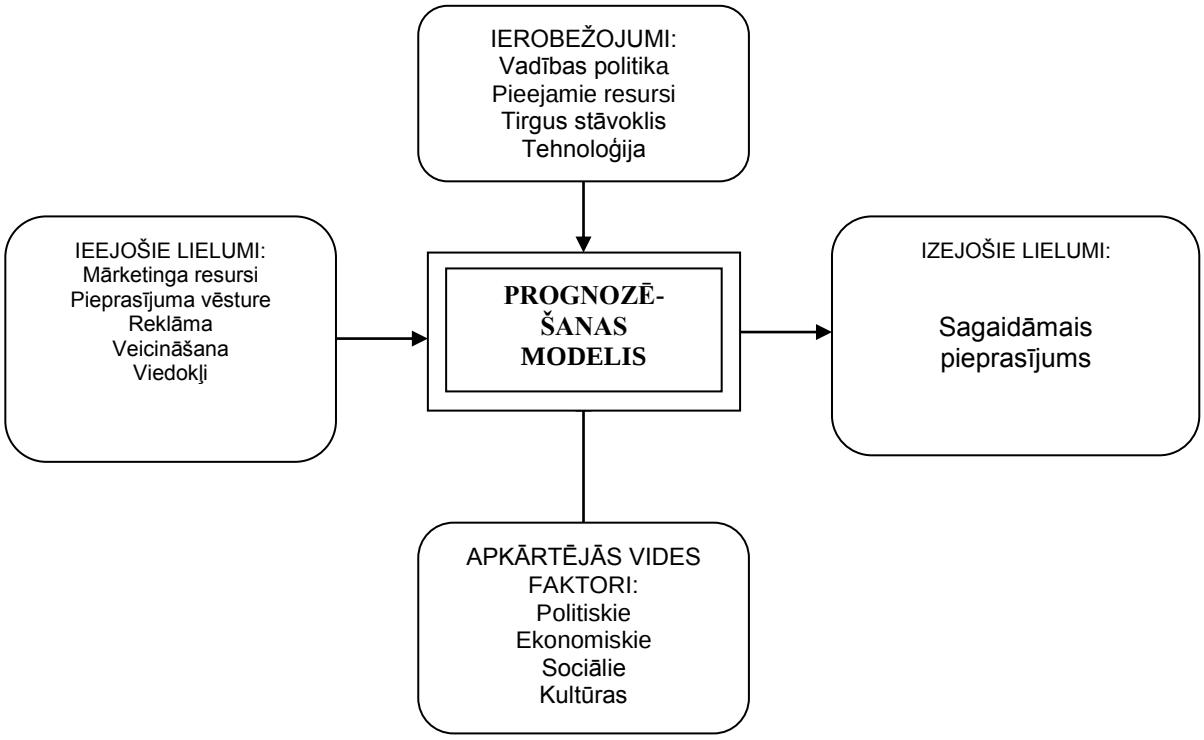
1.6. Prognozēšanas būtība

Prognozēšanas mērķis ir samazināt nekorektu lēmumu pieņemšanas risku, paredzot mainīgo lielumu iespējamās vērtības. Lēmuma pieņemšanu nosaka daudzi ārēji un iekšēji faktori, bet savukārt no lēmuma pielietošanas jomas ir atkarīga prognozēšanas modeļa izvēle. Pirms lēmuma pieņemšanas par modeļa izvēli ir jāatbild uz šādiem jautājumiem[88]:

- Kādi mainīgie lielumi ir jāprognozē? – Tas lielā mērā nosaka vadības prasības un vēsturiskās informācijas pieejamība.
- Kāda ir piemērotākā prognozēšanas metode? – Pastāv divi prognozēšanas veidi: *punktu prognozēšana* un *paredzamo intervālu prognozēšana*. Piemēram, prognozētais pārdoto vienību skaits nākamajam mēnesim ir 40 vienību. Vai arī – ar 95% varbūtību paredzamā intervāla prognoze nākamajam mēnesim ir no 38 līdz 42 vienībām. Paredzamo intervālu prognozēšana ir ļoti noderīga lēmumu pieņemšanā.
- Cik ilgam laikam nepieciešams veikt prognozēšanu? – Prognozēšana var būt nepieciešama noteiktiem laika posmiem ─ dienu, mēnešu, kvartālu vai gadu garumā. Šo laika garumu sac par prognozes vadības laiku, laika horizontu vai laika freimu. Dažādas prognozēšanas metodes ir piemērotas dažādiem vadības laikiem.
- Cik daudz vienību ir jāprognozē? – Katrs gadījums ir unikāls. Atsevišķos gadījumos ir pilnīgi pietiekoši prognozēt kopējos tirdzniecības ieņēmumus visam uzņēmumam, savukārt citos gadījumos ir nepieciešama prognoze atsevišķi katram uzņēmuma saražotajam produktam. Ja ir nepieciešamas prognozes vairākām vienībām, tad piemērotākās ir vienkāršās prognozēšanas metodes, jo tās ir lētākas un ātrākas.

- Kāda ir nepieciešamā prognozes precizitāte? – Prognozēšanas metodes *precizitāte* nozīmē precizitātes pakāpi, ar kuru tiek ģenerētas prognozes vērtības, kas izmērāmas laikā. Faktori, kuri nosaka vispiemērotāko precizitātes līmeni, ir nozīmīgi lēmuma pieņemšanā un prognozes lomai gala lēmuma ietekmēšanā. Atsevišķos gadījumos prognozes rezultāti var būt nesaistīti ar lēmuma pieņemšanu, tādā gadījumā ir pieļaujams zems precizitātes līmenis.

Veidojot prognozēšanas funkciju, vispirms ir nepieciešams noteikt izejošos lielumus (t.i., kādi lielumi tiks prognozēti) un to prognozēšanas precizitāti. Izejošo lielumu specifikācija pašā sākumā var vienkāršot prognozēšanas modeļa izvēli, bet prognozēšanas funkcijas izveide nav pabeigta, līdz nav izvēlēti ieejošie lielumi. Lielākā daļa sistēmu ir relatīvi nejūtīgas pret ieejošo lielumu lielāko daļu, t.i., izejošo lielumu vērtību galvenokārt ietekmē relatīvi neliels skaits ieejošo lielumu, līdz ar to prognozēšanas funkcijas izveides laikā ieejošo lielumu skaits tiek samazināts, ietverot tikai vissvarīgākos prognozes modeļa ieejošos lielumus.



1.12. att. Prognozēšanas funkcija.

Prognozēšana ir uz modeļa balstīta informācijas sistēma, un pastāv vairākas modeļa izvēles iespējas. Prognozēšanas modeli izvēlas, balstoties uz prognozes gala lietotāju loku, pieļaujamo sarežģītības pakāpi, laika un resursu pieejamību, pielietojuma specifiku, gala lēmuma raksturiezīmēm, datu pieejamību un datu komponentēm. Ja lietotājs, pamatojoties

uz minētajiem faktoriem, nevar izvēlēties, kurš no modeļiem būtu vispiemērotākais konkrētajā situācijā, tad testē atsevišķus modeļus, un izvēlas konkrētajai situācijai piemērotāko.

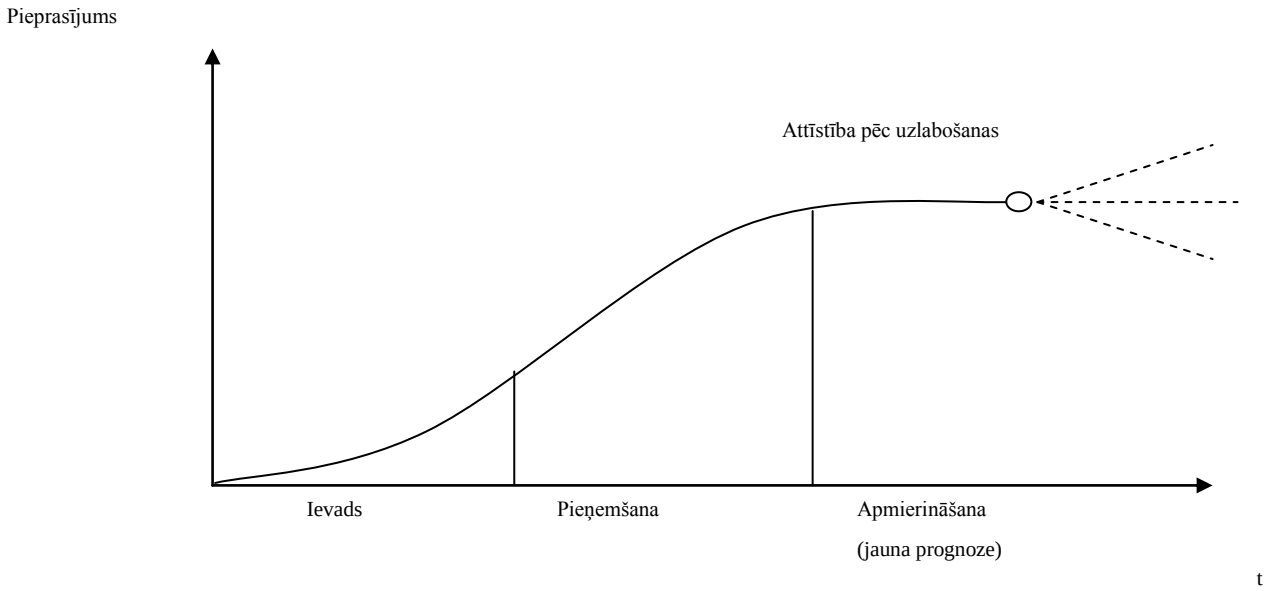
Daudzi modeļi liek lietotājam analizēt un interpretēt statistiskos datus, kā arī ir saistīti ar vēsturisko datu iegūšanu. Ja adekvātu un modeļa izveidošanai svarīgu vēsturisko datu nav vai arī to uzkrāšana dārgi izmaksā, tad automātiski atkrīt vairāku analīzes tehniku izmantošanas iespējas, jo visas kvantitatīvās prognozēšanas tehnikas ir atkarīgas no piemērotu un precīzu vēsturisko datu pieejamības.

Produkcijas pieprasījuma modeļa gala rezultātu ietekmē izvēlētā prognozēšanas tehnika. Ja atsevišķas komponentes (sezoni, cikli) ir mainīgas, tad jāizmanto progresīvākas tehnikas. Savukārt, ja pieprasījuma modelis ir svārstīgs laikā, tad nepieciešama kvalitatīva tehnika.

Veidojot prognozēšanas modeli, parasti izvirza šādus sākuma ierobežojumus:

- prognozējamās vienības (produkti, produktu grupas, montāžas u.c.);
- prognozēšanas algoritms: no augšas uz leju vai no lejas uz augšu;
- prognozēšanas tehnika (kvantitatīvie vai kvalitatīvie modeļi);
- mērvienības (nauda, vienības, svars u.c.);
- laika intervāls (nedēļas, mēneši, kvartāli u.c.);
- prognozēšanas horizonts (cik intervālu ir ietverts);
- prognozēšanas komponentes (līmeņi, virzieni, sezonas vai nejaušas novirzes);
- prognozēšanas precizitāte (kļūdas lielums);
- izņēmumu pārskats un īpašas situācijas;
- prognozēšanas modeļa parametru kontrole.

Nejaušības (jeb gadījuma) komponente prognozēšanā nosaka prognozes precizitāti. Prognoze vienību grupai nodrošina lielāku precizitāti nekā prognoze atsevišķām vienībām, jo prognozēšanas kļūdu starp grupas vienībām var savstarpēji izslēgt. Vienlaicīgi kļūdas iespēja palielinās līdz ar prognozes horizonta pieaugumu.



1.13. att. Prognozes dzīves cikls.

Prognozes dzīves ciklu var iedalīt trīs daļās:

- ievads un sākotnējā ieviešana;
- pieņemšana un tirgus attīstība;
- tirgus pieprasījuma apmierināšana.

Pēc tirgus prasību apmierināšanas pieprasījums var pieaugt un var kristies, vai arī palikt nemainīgs. Produktu grupu vai servisu var uzlabot un tad sākas jauna attīstības līkne.

1.7. Modeļa izvēle

Prognozēšanas situācijas raksturošana

Prognoze ietver sešas plānošanas un lēmuma pieņemšanas situāciju raksturiezīmes jeb dimensijas, kas spēlē būtisku lomu prasību definēšanā [92].

Sešas prognozēšanas situācijas dimensijas:

- laika horizonts – laika periods, kurā lēmuma īstenošanai jāsākas un kurā lietotājam ir skaidri jāpamato atbilstošās prognozēšanas metodes izvēle. Parasti laika horizontam ir trīs laika prognozēšanas veidi – īstermiņa, vidēja un ilgtermiņa.

- Detalizācijas pakāpe – lēmumu pieņemšanas uzdevumi var tikt izvirzīti dažādos vadības līmeņos, un, izvēloties prognozēšanas tehniku īpašai situācijai, ir jāzina detalizācijas pakāpe, kas tiks pieprasīta, lai prognozēšanas rezultāts būtu derīgs lēmumu pieņemšanai.
- Vienību skaits – gadījumā, ja uzņēmumam ir liels ražojamo produktu skaits, tad bieži tiek atrasts efektīvākais lēmums, kas mehāniski pielietojams visiem elementiem. Gadījumā, ja jāveic prognozēšana tikai vienai vienībai (jeb produktu kategorijai), tad prognoze var būt daudz sarežģītāka un detalizētāka.
- Plānošanas kontrole – gadījumiem, kad zaudēta kontrole pār ražošanas procesu, ir jāizstrādā rīcības plāns, kas būtu īstenojams iespējami ātrāk. Prognozēšanas metodei šādas izmaiņas pamatmodelī ir jāatpazīst pēc iespējas agrākā stadijā, tomēr parasti esošo modeli mēdz izmantot arī turpmāk.
- Pastāvība – prognozēšana, kas ir nemainīga laikā, un atrodas prepozīcijā ar prognozēšanu, kura ir svārstību stadijā.
- Esošās plānošanas procedūras – jebkādas prognozēšanas metodes ieviešana, kas ietver izmaiņas uzņēmuma darbības plānošanā un lēmuma pieņemšanā.

Prognozēšanas metodes izvēle

Seši svarīgākie prognozēšanas metodes izvēles faktori:

- prognozes laika perioda garums (prognozes horizonts);
- modeļa dati;
- katras izmantojamās prognozēšanas tehnikas izmaksas;
- pieejamie dati un modeļi;
- prognozēšanas tehnikas sarežģītības pakāpe;
- tehnikas precizitāte (kļūdas lielums).

Prognozēšanas perioda garums

Prognozēšanai ir trīs laika periodi: īstermiņa periods (viens līdz trīs mēneši), vidēja termiņa laika periods (trīs mēneši līdz divi gadi) un ilgtermiņa periods (vairāk nekā divi gadi).

Pagātnes datu modelis

Pagātnes datu modelis parasti ir nozīmīgākais faktors, determinējot vispiemērotākās prognozēšanas tehnikas. Pagātnes dati ietver piemēroto modeli un apakšmodeli. Apakšmodelis realizē sezonas, cikliskās un īstermiņa izmaiņas. Ja laika periods ir relatīvi īss (nedēļa, mēnesis), tad var identificēt vairākus apakšmodeļus.

Prognozēšanas tehnikas izmaksas

Pastāv trīs izmaksu kategorijas, kas būtu jāapskata, izvēloties prognozēšanas tehniku:

- *datu vākšana* – datu vākšanas izmaksas nav būtiskas, ja tiek apskatīts tikai viens vienīgs produkts un tiek pielietots laikrindu modelis. Uzņēmums rīcībā parasti ir visi vēsturiskie dati, kas nepieciešami lielākajai laikrindu modeļu daļai. Ja modelis izmanto ārējos datus, tad nepieciešama datu izpēte par potenciālajiem neatkarīgajiem mainīgajiem: tirdzniecības dati, demogrāfiskie dati. Ja tiek pielietoti ieejas-izejas dati un ekonometriskie dati, tad izmaksas var būt augstas, īpaši, ja uzņēmums attīsta unikālu modeli. Ieejas-izejas modelis ir atkarīgs no transakciju tabulas, kas attēlo ienākošo lielumu, preču un servisa plūsmu.
- *Modeļa izveide un pielietojums* – šīs izmaksas attiecas vairāk uz situāciju, ja ir ietverts aprēķinu modelis un ir trīs pamatlielumi:
  - attīstības izmaksas;
  - datu uzglabāšanas izmaksas;
  - datora izmantošanas izmaksas.
- *Kontroles izmaksas un prognozes atjaunināšana* – kontroli var veikt ar roku vai datora palīdzību. Kontrole ir svarīga sastāvdaļa katrai prognozēšanas aktivitātei. Prognozes atjaunināšana nozīmē, ka visu laiku tiek pievienoti jauni dati un esošie dati tiek pilnveidoti. Kopumā ņemot, atjaunināšana nav dārga aktivitāte.

Datu pieejamības veidi

Uzņēmumam, pirmkārt, ir jāpieņem lēmums – ko lietotājs grib prognozēt, ko nepieciešams prognozēt un cik ilgu laiku aizņems prognozēšana. Nepieciešamie dati ir atkarīgi no izvēlētā prognozēšanas modeļa.

Prognozēšanas tehnikas sarežģītība

Prognozēšanas tehnikas sarežģītību nosaka tas, kāda veida prognozēšanas modelis tiek izvēlēts un darbināts, cik daudz cilvēku ir iesaistīti prognozēšanas un lēmuma pieņemšanas procesā. Dažos gadījumos abus darbus dara viena persona, piemēram, tirdzniecības menedžeris ir viena persona, kura gan prognozē uzņēmuma tirdzniecības ienākumus, gan pieņem uz prognozēm balstītus lēmumus. Tas ir labākais risinājums, jo prognozētājs zina faktorus, kas varētu ietekmēt prognozi un līdz ar to iespējami mazāka būtu prognozes kļūda.

1.8. Dažādu prognozēšanas modeļu kritika

Šobrīd plaši pazīstamie prognozēšanas modeļi – regresijas, eksponenciālā izlīdzināšana, varbūtību modelēšana, neironu tīkli, ģenētiskie algoritmi u.c. ─ nesniedz visas atbildes uz tautsaimniecībā pastāvošām problēmām. Strādājot ar augstākminētajiem modeļiem, var saskarties ar tādiem trūkumiem, kā pārmācīšana, pastāvošā tendence (trends) u.c. [92].

- Piemēram, regresijas modeļa parametru novērtēšanā, kas balstās uz mazāko kvadrātu metodi (sk. 2.1.att.), tiek noteikts, ka obligāti jāapmierina vairāki priekšnoteikumi, kuru neizpilde var radīt būtiskas kļūdas:
    a. Gadījuma kļūdas ir ar nulles vidējo vērtību, galīgo variāciju un kovariāciju;
    b. Katrs gadījuma kļūdas mērījums raksturojas ar nulles vidējo vērtību, kas nav atkarīga no novērotā mainīgā lielumiem;
    c. Katras izlases kļūdas variācija ir vienāda, tās lielumi nav atkarīgi no novērotā mainīgā lieluma (homoskedastitāte);
    d. Kļūdu autokorelācijas trūkums, t.i., dažādu novērojumu kļūdu vērtības nav savstarpēji atkarīgas.
    e. Normālais sadalījums. Gadījuma kļūdas ir normāli sadalītas.
    f. Endogenā mainīgā vērtības nav atkarīgas no modeļa kļūdām (atlikumiem), un tām ir ierobežotas vidējās vērtības un dispersijas.
    g. Modeļa izvēles problēma un diskontēšanas problēma. Visi nosacījumi ir diezgan grūti izpildāmi modeļa atlases gaitā, kā rezultātā varētu rasties prognozēšanas kļūdas.
- Eksponenciālās izlīdzināšanas metodes pielietošanā galvenais un sarežģītākais moments ir izlīdzināšanas parametra α izvēle, sākotnējie nosacījumi un prognozējamā polinoma pakāpe. Turklāt, lai noteiktu modeļa sākotnējos parametrus, joprojām būtiski ir iepriekš uzskaitītie trūkumi un autokorelācijas problēma.
- Varbūtību modelēšanas trūkums ir sākotnējā statistiskā sadalījuma nezināšana, līdz ar to prasība pēc lielā novērojumu skaita sadalījuma identificēšanai.
- Problēmas un trūkumi metodēm, kas tiek īstenotas, pamatojoties uz neironu tīkliem. Nav skaidras metodes slāņa skaita izvēlei un neironu skaita izvēlei

slānī. Gradienta metodes ar pastāvīgu mācības soli lēnā konverģence, sarežģītība ar optimālo mācīšanās ātrumu, α izvēli, izlīdzināšanas koeficientu nejaušās inicializācijas ietekme uz vidējās kvadrātisko kļūdu funkcijas minimumu. Viena no nopietnākajām neironu tīkla mācīšanas grūtībām ir pārkvalifikācijas (pārmācīšanas) parādība. Turklāt dažāda mēroga datu izmantošana var izraisīt "paralīzi" tīklā.

- Problēmas un trūkumi metodēm, kas tiek īstenotas, pamatojoties uz ģenētiskajiem algoritmiem. Problemātiski ir kodēt informāciju, kas ietverta neironu tīkla modelī, kā arī izpratnes un programmatūras ieviešanas sarežģītība.

Skaidrs, ka, veidojot reālās prognozes, vienmēr ir jāņem vērā ne tikai izmantoto metožu īpatnības, bet arī to ierobežojumi un trūkumi. Promocijas darbā piedāvātie algoritmi risina finanšu u.c. tautsaimniecības problēmas, kur ir saskarsme ar nelineārajiem procesiem un mazo varbūtību iestāšanās iespējamība ir daudz lielāka, nekā to paredz normālais sadalījums.

1.9. Stacionāru laikrindu modeļi un to identifikācija

Šī sadaļa par *ARIMA* procesiem ir pievienota, lai radītu priekšstatu par ekonometriskajiem modeļiem – modeļiem, kas veic prognozes, balstoties uz esošās izlases datiem. Ir izstrādāta *ARIMA* klases modeļu metodoloģija, kura ļauj pielāgot noteiktā modeļa veidu gadījuma procesam [93]. Šī modeļa pielāgošanas tehnika, kas balstās uz statistiskajiem testiem par datu stacionaritāti, modeļu parametru izvēli u.c., galvenokārt paredz gadījuma procesa stacionaritāti. Ja stacionaritātes nav (skat.1.1.att.), ir varianti, kā varētu pārveidot datus, lai iegūtu stacionaritāti. Turpmāk, apskatīsim stacionaritātes, *ARIMA* modeļu definīcijus un galvenās īpašības.

Analizējamās laikrindas x_t gadījumā atlikumu ε_t uzvedību adekvāti aprakstošo modeļu meklēšanu, protams, veic stacionāro laikrindu klases ietvaros [25].

<u>Definīcija 1.</u> Rindu x_t sauc par stingri stacionāru (vai stacionāru šaurā nozīmē), ja jebkuriem τ, un $t_1,\ldots, t_m$ m novērojumu $\{x_{t_i}\}_{i=1}^{m}$ varbūtību savstarpējais sadalījums ir tāds pats kā m novērojumiem $\{x_{t_i+\tau}\}_{i=1}^{m}$.

Respektīvi, stingri stacionāras laikrindas īpašības nemainās, mainoties laika atskaites sākuma punktam. Precīzāk, pie m=1 no pieņēmuma par laikrindas x_t stingro stacionaritāti seko, ka gadījuma lieluma x_t varbūtību sadalījuma likums nav atkarīgs no t,

tātad, no t nav atkarīgi arī visi gadījuma lieluma skaitliskie pamatraksturotāji, tajā skaitā vidējā vērtība $\boldsymbol{E}x_t = \mu$ un dispersija $\boldsymbol{D}x_t = \sigma^2$.

Acīmredzot μ (vidējais) nosaka pastāvīgu līmeni attiecībā pret kuru svārstās analizējamā laikrinda x_t, savukārt σ (standartnovirze) raksturo pastāvīgu svārstību amplitūdu. Tā kā gadījuma lieluma x_t varbūtību sadalījuma likums ir vienāds visiem t, tad gan sadalījums, gan tā skaitliskie pamatraksturotāji var tikt novērtēti pēc novērojumiem $x_1, \ldots, x_T$.

Tajā skaitā:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \text{ – vidējās vērtības novērtējums,} \tag{1.3}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \tilde{\mu}\right)^2 \text{ – dispersijas novērtējums.} \tag{1.4}$$

Autokovariācijas funkcija γ(τ)

Autokovariācijas funkcijas vērtības tiek statistiski novērtētas no esošajiem laikrindas novērojumiem pēc formulas [25]:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}\left(x_t - \hat{\mu}\right)\left(x_{t+\tau} - \hat{\mu}\right),$$

kur τ = 1,… T – 1, bet $\hat{\mu}$ aprēķināts pēc formulas (1.3).

Acīmredzot autokovariācijas funkcijas vērtība pie τ=0 nav nekas cits kā laikrindas dispersija, un, atbilstoši

$$\hat{\gamma}(0) = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \hat{\mu}\right)^2. \tag{1.5}$$

Autokorelācijas funkcija *r*(τ)

Viena no galvenajām laikrindu veidojošās novērojumu rindas atšķirībām no nejaušas izlases ir tā, ka laikrindas locekļi, vispārīgi runājot, ir savstarpēji statistiski saistīti. Statistiskās saistības ciešuma pakāpi starp diviem gadījuma lielumiem var izmērīt ar korelācijas koeficientu. Tā kā mūsu gadījumā koeficients mēra starp vienas un tās pašas laikrindas locekļiem pastāvošo korelāciju, to pieņemts saukt par autokorelācijas

koeficientu. Veicot lieluma $r(\tau)$ analīzi atkarībā no τ vērtības, ir pieņemts runāt par autokorelācijas funkciju $r(\tau)$.

Autokorelācijas funkcijas grafiku parasti sauc par korelogrammu.

Autokorelācijas funkcija (atšķirībā no autokovariācijas) ir bezizmēra, t.i., nav atkarīga no analizējamās laikrindas vērtību mēroga. Tās vērtības pēc definīcijas var svārstīties no -1 līdz +1. Turklāt no laikrindas stacionaritātes seko, ka $r(\tau)=r(-\tau)$, tādēļ autokorelācijas funkciju analīze aprobežojas tikai ar pozitīvu τ vērtību aplūkošanu.

Autokorelācijas funkcijas vērtības tiek statistiski novērtētas no esošajiem laikrindas novērojumiem pēc formulas [93]:

$$\hat{r}(\tau)=\frac{\frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}(x_t-\hat{\mu})(x_{t+\tau}-\hat{\mu})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu})^2}=\frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)},\tau=1,...,T-1. \qquad (1.6)$$

Pastāv vispārējas raksturīgās īpašības, kas apraksta stacionāras laikrindas autokorelācijas funkcijas uzvedību. Citiem vārdiem sakot, ir iespējams vispārīgi aprakstīt stacionāras laikrindas korelogrammas shematisku veidu. To nosaka šāda acīmredzama atziņa: jo vairāk laikrindas locekļu ir izkliedēti laikā, jo vājāka ir šo locekļu savstarpējā saistība un tātad lielumam $r(\tau)$ jābūt mazākam pēc absolūtās vērtības. Turklāt virknei gadījumu pastāv tāda $r(0)$ robežvērtība, sākot ar kuru visas vērtības būs identiski vienādas ar nulli.

Speciālā autokorelācijas funkcija $r_{spec}(\tau)$

Ar šīs funkcijas palīdzību mēra starp laikrindas locekļiem x_t un $x_{t+\tau}$ pastāvošo savstarpējo saistību dažādām τ vērtībām, pie novērstas visu šīs laikrindas starplocekļu pastarpinātās ietekmes uz šo savstarpējo saistību. Speciālo 1-ās kārtas autokorelāciju var izskaitļot, izmantojot sakarību [93]:

$$r_{\text{spec}}(2)=r\left(x_t,x_{t+2}\middle|x_{t+1}=\mu\right)=\frac{r(2)-r^2(1)}{1-r^2(1)}, \qquad (1.7)$$

kur μ – analizējamā stacionārā procesa vidējā vērtība.

Augstākas kārtas speciālās autokorelācijas var izskaitļot analogā veidā, izmantojot vispārīgās korelācijas matricas $R = \|r_{ij}\|$, elementus, kur $r_{ij} = r(x_i, x_j) = r(|i - j|)$, $i, j =$

1,…, T un $r(0) = 1$. Piemēram, 2.kārtas speciālā autokorelācija tiek noteikta pēc formulas [93]:

$$r_{\text{spec}}(3) = r\left(x_t, x_{t+3} \middle| x_{t+1} = x_{t+2} = \mu\right) = \frac{r(1) - r(2)r(1)}{\sqrt{\left(1 - r^2(2)\right)\left(1 - r^2(1)\right)}}. \tag{1.8}$$

Empīriskās (izlases) autokorelācijas funkciju versija tiek iegūta ar to pašu attiecību (1.7) un (1.8) palīdzību, mainot tajās ietilpstošās teorētiskās autokorelācijas $r(\tau)$ vērtības ar to statistiskajiem novērtējumiem $\hat{r}(\tau)$.

Autokorelācijas funkcijas $r(\tau)$ un $r_{\text{spec}}(\tau)$ vērtības ir nozīmīgs palīgs analizējamās laikrindas modeļa piemeklēšanas un identifikācijas uzdevuma risināšanā.

Spektrālais blīvums *p*(ω)

Stacionāras laikrindas spektrālo blīvumu nosaka, izmantojot tās autokorelācijas funkciju, kas balstās uz sakarību:

$$p(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{i\tau\omega}, \text{ kur } i = \sqrt{-1}.$$

Tā kā $r(\tau) = r(-\tau)$, spektrālo blīvumu var pierakstīt formā $p(\omega) = 1 + 2\sum_{\tau=1}^{\infty} r(\tau)\cos(\tau\omega)$.

Tātad funkcija $p(\omega)$ ir harmoniska ar trendu 2π. Spektrālā blīvuma grafiku sauc par spektru, un tas ir simetrisks attiecībā pret $\omega = \pi$. Tādēļ $p(\omega)$ uzvedības analīzē aprobežojas ar vērtībām $0 \leq \omega \leq \pi$. Spektrālajam blīvumam ir tikai negatīvas vērtības.

Šīs funkcijas īpašību izmantošana praktiskajā laikrindu analīzē tiek saukta par „laikrindu spektrālo analīzi", un pietiekami pilnīgs šīs pieejas apraksts dots, piemēram, [10] un [34]. Šī pieeja neguva plašu izplatību ekonomisko laikrindu statistiskajā analīzē, jo spektrālā blīvuma empīriskajai analīzei ir nepieciešamas vai nu pietiekoši garas stacionāras laikrindas, vai arī vairākas analizējamās laikrindas trajektorijas (gan viena, gan otra situācija ir diezgan reta ekonomisko dinamikas rindu statistiskās analīzes praksē). Analīzei svarīgi, ka spektrālā blīvuma lielums raksturo savstarpējās saistības spēku, kas eksistē starp laikrindu x_t un harmoniju ar periodu $2\omega/\pi$. Tas ļauj izmantot spektru kā periodiskuma noteikšanas līdzekli analizējamajā laikrindā.

Ja rinda satur slēptu harmoniju ar frekvenci ω, tad tajā ietilpst arī periodiskie locekļi ar frekvencēm ω/3, ω/4 u.t.t. Tā ir tā saucamā „atbalss", ko spektrs atkārto zemās frekvencēs. „Atbalss" efekts analizēts rakstā [19], par piemēru izmantojot ikmēneša bezskaidras naudas norēķinu starp ASV bankām.

Iespējams nedaudz paplašināt konkrēto ekonomiskās dinamikas rindu analīzē izmantojamo stacionāro laikrindu modeļu klasi.

Definīcija 2. Rindu sauc par vāji stacionāru (vai stacionāru plašā nozīmē), ja tās vidējā vērtība, dispersija un kovariācija nav atkarīgas no *t*.

Tātad, atšķirībā no prognozes, kura balstīta uz regresīvo modeli, kas ignorē gadījuma atlikumu vērtības, laikrindu x_t prognozē izmanto savstarpējo atkarību un pašu gadījuma atlikumu prognozi.

Ieviesīsim apzīmējumus. Tā kā šeit aprakstīta gadījuma atlikumu uzvedība, tad ar ε_t apzīmēsim modelējamo laika rindu, un uzskatīsim, ka visiem *t* tās matemātiskā cerība ir vienāda ar nulli, t.i., $\boldsymbol{E}\varepsilon_t, \equiv \mathbf{0}$. Savukārt ar δ_t apzīmēsim laikrindu, kas veido „balto troksni".

Turpmāk apskatīto modeļu aprakstu un analīzi formulēsim ar vispārējā lineārā procesa terminiem, kas izteikts ar pašreizējās un iepriekšējo „baltā trokšņa" vērtību svērto summu, bet precīzāk:

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \delta_{t-k}, \tag{1.9}$$

kur $\beta_0 = 1$ un $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$.

Tādā veidā "baltais troksnis" izsaka impulsu sēriju, kas plašā reālu situāciju klasē ģenerē pētāmās laikrindas gadījuma atlikumus.

Ekvivalenti (1.9) laikrindu ε_t var izteikt formā, kas iegūta no klasiskā lineārā daudzfaktoru regresijas modeļa, kuram kā skaidrojošie mainīgie ir laikrindas vērtības visos iepriekšējos laika momentos:

$$\varepsilon_t = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \varepsilon_{t-k} + \delta_t. \tag{1.10}$$

Šeit svara koeficienti π_1, π_2,… savā starpā ir saistīti ar noteiktiem likumiem, kas nodrošina rindas ε_t stacionaritāti.

Apskatīsim arī jaukta tipa procesu, kas satur gan paša procesa autoregresīvos locekļus, gan slīdošo „baltā trokšņa" summēšanu:

$$\varepsilon_t = \sum_{k=1}^{p} \pi_k \varepsilon_{t-k} + \delta_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \delta_{t-j}.$$

Uzskatīsim, ka p un q var būt arī bezgalīgi lielas vērtības un atsevišķos gadījumos daži (vai pat visi) koeficienti π un/vai β ir vienādi ar 0.

1.9.1. P-tās kārtas autoregresijas modeļi (*AR(p)*-modeļi)

Sākumā apskatīsim vienkāršākos speciālos gadījumus.

Autoregresijas 1-ās kārtas modelis – *AR(1)* (Markova process)

Šis modelis apraksta vienkāršāko autoregresīva tipa procesa modeli, kad (1.10) visi koeficienti π_k, $k=2,\ldots,\infty$ ir vienādi ar nulli. Atbilstoši to parāda izteiksme:

$$\varepsilon_t = \alpha\varepsilon_{t-1} + \delta_t, \tag{1.11}$$

kur α – skaitliskais koeficients, kas pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 1 ($|\alpha| < 1$), bet δ_t – gadījuma lielumu virkne, kas veido „balto troksni". Turklāt ε_t ir atkarīgs no δ_t un visām iepriekšējām ε_t vērtībām, bet ne no δ nākotnes vērtībām. Līdz ar to δ_t sauc par inovāciju (jauninājumu).

Virknes ε_t , kas apmierina attiecību (1.11), bieži sauc par Markova procesiem. Tas nozīmē, ka

$$\boldsymbol{E}\varepsilon_t \equiv 0, \tag{1.12}$$

$$r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t\pm k}) = \alpha^k, \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{D}\varepsilon_t = \frac{\sigma_0^2}{1-\alpha^2}, \tag{1.14}$$

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t\pm k}) = \alpha^k \boldsymbol{D}\varepsilon_t. \tag{1.15}$$

Svarīgs secinājums no (1.15) ─ ja lielums $|\alpha|$ ir tuvs vieniniekam, tad ε_t dispersija būs daudz lielāka par δ dispersiju, kas savukārt nozīmē, ka, ja rindas ε_t blakus vērtības ir stipri korelētas, tad diezgan vāju jauninājumu rinda δ_t izsauks lielu ε_t svārstību atlikumu.

Rindas (1.11) stacionaritātes nosacījumi noteikti ar koeficientu α:

$$|\alpha| < 1,$$

t.i., vienādojuma $1 - \alpha z = 0$ saknei z_0 pēc absolūtās vērtības jābūt lielākai par vienīnieku.

Markova procesa autokorelācijas funkcija noteikta no sakarības (1.13):

$$r(\tau) = r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t\pm\tau}) = \alpha^{\tau}. \qquad (1.16)$$

kam seko parametra α parastā varbūtiskā interpretācija: $\alpha = r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t\pm1})$, t.i., α vērtība nosaka korelācijas lielumu starp rindas ε_t divām blakus vērtībām.

No (1.16) redzams, ka korelācijas stipruma pakāpe starp virknes (1.11) locekļiem eksponenciāli samazinās, tiem vienam no otra attālinoties laikā.

Speciālo autokorelācijas funkciju $r_{\text{spec}}(\tau) = r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau} \mid \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \ldots = \varepsilon_{t+\tau-1} = 0)$ var izskaitļot ar formulu (1.7)-(1.8) palīdzību. Tieša izskaitļošana pēc šīm formulām dod šādu vienkāršu rezultātu: speciālās korelācijas funkcijas $r_{\text{spec}}(\tau)$ vērtības ir vienādas ar nulli visiem τ = 2,3….. Šo īpašību var izmantot modeļa piemeklēšanā: ja izlasei izskaitļotās speciālās korelācijas $\hat{r}_{spec}$ statistiski nenozīmīgi atšķiras no nulles pie τ = 2,3, tad 1-ās kārtas autoregresijas modeļa izmantošana laikrindas gadījuma atlikumu uzvedības aprakstīšanai nav pretrunā ar sākotnējiem statistiskajiem datiem.

Markova procesa spektrālo blīvumu $p(\tilde{\omega})$ *(1.11)* var aprēķināt, izmantojot formulu

$$p(\tilde{\omega}) = \frac{2\sigma_0^2}{2 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(2\pi\tilde{\omega})}, \qquad 0 \le \tilde{\omega} \le \frac{1}{2} \qquad \left(\tilde{\omega} = \frac{\omega}{2\pi}\right).$$

Gadījumā, kad parametra α vērtība ir tuva vieniniekam, rindas ε_t blakus vērtības ir tuvas viena otrai pēc liekuma; autokorelācijas funkcija eksponenciāli samazinās, paliekot pozitīva, bet spektrā dominē zemas frekvences, kas nozīmē diezgan lielu vidējo attālumu starp rindas ε_t virsotnēm. Parametra α vērtībai, kas tuva – 1, rinda ātri oscilē (spektrā pastāv augstas frekvences), bet autokorelācijas funkcijas grafiks eksponenciāli nokrīt līdz nullei ar pārmaiņus zīmju maiņām.

Modeļa identifikācija, t.i., tā parametru α un σ_0^2 novērtēšana pēc esošās laikrindas x_t realizācijas (jāatceras, ka atlikumi ir nenovērojami), ir balstīta uz sakarībām (1.12)-(1.15) un var tikt realizēta ar momentu metodes palīdzību. Šim nolūkam vispirms jāatrisina komponentes $\hat{f}(t)$ izdalīšanas uzdevums, kas ļauj operēt ar tālākajiem atlikumiem

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{f}(t). \tag{1.17}$$

Pēc tam tiek iegūts atlikumu dispersijas $\hat{\gamma}(0)$ novērtējums izlasēs pēc formulas

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})^2,$$

kur $\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{e=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t}{N}$, bet atlikumus aprēķina pēc formulas (1.11).

Parametra α novērtējumu $\hat{\alpha}$ iegūstam ar formulas (1.13) palīdzību, ievietojot tajā korelācijas koeficienta vietā tā izlases vērtību, t.i.,

$$\hat{\alpha} = \frac{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})(\hat{\varepsilon}_{t+1} - \bar{\varepsilon})}{\hat{\gamma}(0)}$$

Visbeidzot, parametra σ_0^2 novērtējums $\hat{\sigma}_0^2$ balstās uz sakarību (1.14), kurā lielumi $\boldsymbol{D}\varepsilon_t$ un α tiek atbilstoši aizvietoti ar novērtējumiem $\hat{\gamma}(0)$ un $\hat{\alpha}$: $\hat{\sigma}_0^2 = (1-\hat{\alpha}^2)\hat{\gamma}(0)$.

Autoregresijas 2-ās kārtas modeļi – *AR(2)* (Jūla procesi)

Šis modelis, tāpat kā *AR(1)*, izsaka autoregresīva procesa atsevišķu gadījumu, kad (1.10) visi koeficienti π_k, $k=3,\ldots,\infty$ vienādi ar nulli. Tātad to var izteikt ar sakarību

$$\varepsilon_t = \alpha_1\varepsilon_{t-1} + \alpha_2\varepsilon_{t-2} + \delta_t, \tag{1.18}$$

kur virkne δ_1, δ_2,… veido „balto troksni”.

Rindas (1.18) stacionaritātes nosacījumi (nepieciešamie un pietiekamie) tiek noteikti kā [7]

$$\begin{cases} |\alpha_1| < 2, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

Vispārējās modeļu teorijas ietvaros tos pašus stacionaritātes nosacījumus iegūst no prasības, lai visas atbilstošā raksturīgā vienādojuma saknes neatrastos vienības riņķī. Raksturīgajam 2-ās kārtas autoregresijas modeļa vienādojumam ir šāda forma: $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 = 0$.

Jūla procesa autokorelācijas funkcija tiek izskaitļota šādā veidā. Divas pirmās vērtības $r(1)$ un $r(2)$ izteiktas ar sakarībām:

$$r(1) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2},$$

$$r(2) = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2},$$

bet vērtības $r(\tau)$, $\tau = 3, 4, \ldots$ izskaitļotas ar rekurento sakarību

$$r(\tau) = \alpha_1 r(\tau - 1) + \alpha_2 r(\tau - 2).$$

Otrās kārtas autoregresijas modelī ģenerētajai laikrindas *speciālajai autokorelācijas funkcijai* ir šāda raksturīgā īpašība: $r_{spec}(\tau) = 0$ visiem $\tau = 3, 4, \ldots$

Spektrālo blīvumu $p(\tilde{\omega})$ *Jūla procesam* var aprēķināt ar formulas palīdzību:

$$p(\tilde{\omega}) = \frac{2\sigma_0^2}{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1(1 - \alpha_2)\cos(2\pi\tilde{\omega}) - 2\alpha_2 \cos(4\pi\tilde{\omega})}, 0 \le \tilde{\omega} \le \frac{1}{2}.$$

2-ās kārtas autoregresijas modeļa identifikācija pamatojas uz sakarībām, kas modeļa parametrus α_1, α_2 un σ_0^2 saista ar „novērojamās" laikrindas vērtībām ε_t.

Pēc vērtībām $\hat{\varepsilon}_t$ tiek izskaitļoti novērtējumi $\hat{\gamma}(0), \hat{r}(1)$ un $\hat{r}(2)$, atbilstoši dispersijai $\boldsymbol{D}\varepsilon_t$ un autokorelācijai $r(1)$ un $r(2)$. Tas darīts ar attiecību (1.7) un (1.8) palīdzību:

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})^2,$$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T-k}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})(\hat{\varepsilon}_{t+k} - \bar{\varepsilon})}{\hat{\gamma}(0)}, k = 1,2$$

Pēc tam var iegūt novērtējumus $\hat{\alpha}_1$ un $\hat{\alpha}_2$ no sakarībām

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{r}(1)(1-\hat{r}(2))}{1-\hat{r}^2(1)}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{\hat{r}(2)-\hat{r}^2(1)}{1-\hat{r}^2(1)}.$$

Visbeidzot parametra σ_0^2 novērtējumu iegūst šādi:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\gamma}(0)\frac{1+\hat{\alpha}_2}{1-\hat{\alpha}_2}\left[(1-\hat{\alpha}_2)^2 - \hat{\alpha}_1^2\right].$$

P-tās kārtas autoregresijas modeļi – *AR(p)* (p≥3)

Šie modeļi, veidojot apakškopu vispārējo lineāro modeļu klasē, paši ietver diezgan plašu modeļu klāstu. Ja vispārējā lineārajā modelī (1.10) visus parametrus π_k, izņemot pirmos *p* koeficientus, uzskatīsim par vienādiem ar nulli, tad nonāksim pie *AR(p)*-modeļa

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j} + \delta_t, \tag{1.18}$$

kur gadījuma lielumu virkne δ_1, δ_2,… nosaka „balto troksni”.

Stacionaritātes nosacījumi procesam, ko ģenerē modelis (1.18), arī tiek formulēti ar tā raksturīgā vienādojuma $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \ldots - \alpha_p z^p = 0$ sakņu vērtībām. Procesa stacionaritātei nepieciešami un pietiekami, lai visas raksturīgā vienādojuma saknes atrastos ārpus vienības riņķa, t.i., pēc moduļa pārsniegtu vieninieku.

Procesa (1.18) autokorelācijas funkciju var noteikt ar rekurentu formulu palīdzību, izmantojot pirmās *p* vērtības $r(1),\ldots, r(p)$:

$$r(\tau) = \alpha_1 r(\tau-1) + \alpha_2 r(\tau-2) + \ldots + \alpha_p r(\tau-p),\ \tau = p+1, p+2,\ldots \tag{1.19}$$

Speciālā procesa autokorelācijas funkcijai (1.18) būs ne nulles vērtības tikai pie $\tau \le p$, savukārt visas vērtības $r_{spec}(p)$ pie τ>p būs nulles (sk., piemēram, [17,19]). Šī speciālās autokorelācijas funkcijas īpašība *AR(p)*-procesam visbiežāk tiek izmantota, lai piemeklētu kārtu konkrētai analizējamai laikrindai autoregresijas modelī. Ja, piemēram, visi speciālie autokorelācijas koeficienti, sākot ar pakāpi *k*, statistiski nenozīmīgi atšķiras no nulles, tad autoregresijas modeļa kārtu ir dabiski noteikt vienādu ar *p=k-1*.

P-tās kārtas autoregresijas procesa spektrālais blīvums tiek noteikts ar šādas formulas palīdzību:

$$p(\tilde{\omega}) = \frac{2\sigma_0^2}{\left|1-\alpha_1 e^{-i2\pi\tilde{\omega}} - \alpha_2 e^{-i4\pi\tilde{\omega}} - \ldots - \alpha_p e^{-i2p\pi\tilde{\omega}}\right|^2}, 0 \le \tilde{\omega} \le \frac{1}{2}.$$

P-tās kārtas autoregresijas modeļa identifikācija balstīta uz sakarībām, kas saista modeļa nezināmos parametrus ar pētāmās laikrindas autokorelācijas funkcijas vērtībām. Lai iegūtu šīs sakarības, vērtības τ = 1,2,…..,*p* pakāpeniski ievieto (1.19), tādā veidā iegūstot lineāru vienādojumu sistēmu attiecībā pret α_1, α_2,…, α_p:

$$\begin{cases} r(1) = \alpha_1 + \alpha_2 r(1) + \ldots + \alpha_p r(p-1), \\ r(2) = \alpha_1 r(1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p r(p-2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r(p) = \alpha_1 r(p-1) + \alpha_2 r(p-2) + \ldots + \alpha_p. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Šo vienādojumu sistēmu sauc par Jūla-Vokera vienādojumiem. Novērtējumus $\hat{\alpha}_k$ parametriem α_k iegūst, aizvietojot autokorelāciju $r(k)$ teorētiskās vērtības ar to novērtējumiem $\hat{r}(k)$ un atrisinot tādā veidā iegūto vienādojumu sistēmu.

Parametra σ_0^2 novērtējums tiek iegūts no sakarības $\sigma_0^2 = \gamma(0)\left(1-\alpha_1 r(1) - \alpha_2 r(2) - \ldots - \alpha_p r(p)\right)$, aizvietojot visus lielumus vienādojuma labajā pusē ar to novērtējumiem.

1.9.2. Slīdošā vidējā q-tās kārtas modeļi (*MA(q)*-modeļi)

Apskatīsim vispārīgā lineārā procesa (1.9) speciālu gadījumu, kad tikai pirmie *q* koeficienti β_j nav nulles. Šajā gadījumā procesu var aprakstīt šādā formā:

$$\varepsilon_t = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \theta_2\delta_{t-2} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}, \tag{1.21}$$

kur $\theta_1,\ldots, \theta_q$ izmantoti, lai apzīmētu galīgu parametru β kopu, kas ietilpst (1.9).

Procesu (1.21) sauc par q-tās kārtas slīdošā vidējā modeli (*MA(q)*).

Divējādība *AR* – un *MA*-modeļu attēlojumā un jēdzienā par *MA*-modeļu atgriezeniskumu

No (1.9) un (1.10) redzams, ka vienu un to pašu vispārīgo lineāro procesu var attēlot vai nu bezgalīgas kārtas AR-modeļa veidā, vai arī bezgalīgas kārtas MA-modeļa veidā. Sakarību (1.21) var pārrakstīt kā

$$\delta_t = \varepsilon_t + \theta_1\delta_{t-1} + \theta_2\delta_{t-2} + \ldots + \theta_q\delta_{t-q},$$

no kurienes

$$\delta_t = \varepsilon_t - \pi_1\varepsilon_{t-1} - \pi_2\varepsilon_{t-2} - \ldots, \tag{1.22}$$

kur koeficientus π_j (j = 1, 2,…) noteiktā veidā izsaka ar parametriem $\theta_1,\ldots, \theta_q$. Līdz ar to sakarību (1.22) var pierakstīt bezgalīgas kārtas autoregresijas vienādojuma veidā (t.i., apgrieztā izvirzījuma veidā): $\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty}\pi_j\varepsilon_{t-j} + \delta_t$.

Zināms (sk., piemēram, [21]), ka nosacītās *MA(q)* modeļu apgriežamības (t.i., rindas $\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j$ konverģences) nosacījumi tiek formulēti ar modeļa (1.21) raksturīgā vienādojuma terminiem šādā veidā:

Visām raksturīgā vienādojuma $1-\theta_1 z-\theta_2 z^2-\ldots-\theta_q z^q = 0$ saknēm jāatrodas ārpus vienības riņķa, t.i., $|z_j| > 1$ visiem $j = 1,2,\ldots,q$.

***MA(q)* procesa raksturojumi**

Procesa kovariācijām ir spēkā šāda izteiksme:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \sigma_0^2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_q^2\right), & \tau = 0; \\ \sigma_0^2\left(-\theta_\tau+\theta_1\theta_{\tau+1}+\theta_2\theta_{\tau+2}+\ldots+\theta_{q-\tau}\theta_q\right), & 1 \le \tau \le q; \\ 0 & \tau > q. \end{cases} \tag{1.23}$$

Procesa MA(q) autokorelācijas funkcija tiek iegūta no (1.23):

$$r(\tau)=\begin{cases}\dfrac{-\theta_\tau+\theta_1\theta_{\tau+1}+\theta_2\theta_{\tau+2}+\ldots+\theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_q^2}, & \tau=1,\ldots,q;\\ 0, & \tau>q.\end{cases} \qquad (1.24)$$

Tādā veidā *MA(q)* procesa autokorelācijas funkcija $r(\tau)$ ir vienāda ar nulli visām τ vērtībām, kas ir lielākas par procesa kārtu q. Šī svarīgo īpašību izmanto *MA(q)*-modeļa kārtas piemeklēšanai eksperimentālajiem datiem.

MA(q) procesa spektrālo blīvumu var izskaitļot ar šādas sakarības palīdzību:

$$p(\tilde{\omega})=2\sigma_0^2\left|1-\theta_1 e^{-i2\pi\tilde{\omega}}-\theta_2 e^{-i4\pi\tilde{\omega}}-\ldots-\theta_q e^{-i2q\pi\tilde{\omega}}\right|^2, 0\le\tilde{\omega}\le 1/2.$$

MA(q) modeļa identifikācija notiek, balstoties uz sakarību (1.24), jeb, precīzāk, šādā veidā:

1) pēc vērtībām $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{f}(t)$ ar formulas

$$\hat{r}(\tau)=\frac{\dfrac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}(\hat{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon})(\hat{\varepsilon}_{t+\tau}-\bar{\varepsilon})}{\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon})^2}, \tau=1,2,\ldots,q,$$

palīdzību tiek aprēķinātas $\hat{r}(1),\ldots,\hat{r}(q)$ vērtības;

2) τ = 1,……., q vērtības secīgi tiek ievietotas sakarībā (1.24), tās kreisajā pusē lielumus $r(\tau)$ aizvietojot ar iepriekš iegūtajiem novērtējumiem $\hat{r}(\tau)$;

3) šādā veidā iegūtā q vienādojumu sistēma tiek risināta attiecībā pret nezināmajām vērtībām $\theta_1,\ldots,\theta_q$; šīs sistēmas atrisinājumi $\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_q$ arī dos novērtējumus modeļa nezināmajiem parametriem;

4) parametra σ_0^2 novērtējumu var iegūt, izmantojot (1.23) pirmo sakarību, $\gamma(0)$, $\theta_1,\ldots,\theta_q$ vietā ievietojot to novērtējumus.

Atzīmēsim, ka atšķirībā no Jūla-Vokera vienādojumu sistēmas (1.20), vienādojumi MA(q) modeļa parametru novērtējumu noteikšanai ir nelineāri. Tāpēc šie vienādojumi jārisina ar iterāciju procedūru palīdzību (sk., piemēram, [22]).

1.9.3. Autoregresīvie slīdošā vidējā modeļi (*ARMA (p, q)* modeļi)

MA tipa procesa izteikšana autoregresijas formā ir neefektīva no tā parametrizācijas viedokļa. Analogi *AR* procesu nevar efektīvi izteikt ar vidējā slīdošā modeļa palīdzību. Tādēļ efektīvas parametrizācijas iegūšanai dažreiz ir lietderīgi iekļaut locekļus, kas modelē atlikumus slīdošā vidējā formā. Tādiem lineārajiem procesiem ir šāda forma:

$$\varepsilon_t = \alpha_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p} + \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q} \qquad (1.25)$$

un tos sauc par autoregresīviem slīdošā vidējā procesiem ar kārtu (p, q) (*ARMA(p, q)*).

ARMA (p, q) - procesu stacionaritāte un atgriezeniskums

Pierakstot procesu (1.25) formā

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j} + \bar{\delta}_{qt}, \qquad (1.26)$$

kur $\bar{\delta}_{qt} = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}$, var veikt stacionaritātes analīzi pēc tās pašas shēmas, kā AR(p) procesiem. Turklāt „atlikumu” $\bar{\delta}_{qt}$ и δ_t starpība nekādi neietekmēs nosacījumus, kas nosaka autoregresijas procesa stacionaritātes nosacījumu.

Analogi, apzīmējot $\varepsilon_{pt} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j}$ un apskatot procesu (1.25) formā $\bar{\varepsilon}_{pt} = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}$, attiecībā uz šī procesa apgriežamības nosacījumiem iegūstam tos pašus secinājumus kā *MA(q)* procesam: *ARMA(p, q)* procesa apgriežamībai nepieciešami un pietiekami, lai visas *MA(q)* procesa raksturīgā vienādojuma saknes atrastos ārpus vienības riņķa.

Autokorelācijas funkciju analizē analogi tam, kā tas tika darīts *AR*- un *MA*-procesiem, kas ļauj izdarīt šādus secinājumus:

1) no sakarībām $\gamma(\tau) = \alpha_1\gamma(\tau - 1) + \ldots + \alpha_p\gamma(\tau - p) + \gamma_{\varepsilon\delta}(\tau) - \theta_1\gamma_{\varepsilon\delta}(\tau - 1) - \ldots - \theta_q\gamma_{\varepsilon\delta}(\tau - \ - q)$, kur $\gamma_{\varepsilon\delta}(k) = \boldsymbol{E}(\varepsilon_{t-k}\delta_t)$ – kovariācijas funkcija virknēm ε_t un δ_t) ja $\tau = 0, 1, \ldots, q$ seko, ka kovariācijas $\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(q)$ un atbilstoši autokorelācijas $r(1), \ldots, r(p)$ savā starpā saistītas noteiktu atkarību sistēmā ar q slīdošā vidējā parametriem $\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(q)$ un p autoregresijas parametriem $r(1), \ldots, r(p)$. Turklāt kovariācijas $\gamma_{\varepsilon\delta}(\tau)$, $\gamma_{\varepsilon\delta}(\tau - 1), \ldots, \gamma_{\varepsilon\delta}(\tau - q)$ pozitīvās laika nobīdes vērtības ir vienādas ar nulli, bet negatīvām tās var

izteikt parametru $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ terminos ar šāda paņēmiena palīdzību: pieņemot, ka $k>0$, tad $\gamma_{\varepsilon\delta}(-k) = \boldsymbol{E}(\varepsilon_{t-k}\delta_t)$; izvedumā $\varepsilon_{t-k}\delta$ ar $(k+1)$-kārtas secīgo pirmā reizinātāja ievietošanu formulā (1.25) aizvieto ar lineāro kombināciju ε_{t-1}, ... „baltā trokšņa" elementiem δ un modeļa parametriem (tā kā $\boldsymbol{E}(\varepsilon_{t-1}\delta_t)= 0$).

2) Autokorelācijas funkcijas vērtības $r(\tau)$, ja $\tau \geq q + 1$ tiek aprēķinātas no rekurentām sakarībām $r(\tau) = \alpha_1 r(\tau - 1) + \alpha_2 r(\tau - 2) + \ldots + \alpha_p r(\tau - p)$, kas precīzi atkārto analogu rekurento sakarību (1.19) AR(p) procesa autokorelācijas funkcijai. Tas nozīmē, ka, sākot no $\tau = q + 1$, *ARMA(p, q)* procesa autokorelācijas funkcija uzvedas tāpat kā *AR(p)* procesa autokorelācijas funkcija, t.i., tā sastāv no dilstošu eksponenšu un (vai) rimstošu sinusoīdu kopuma, un tās īpašības nosaka koeficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ un sākuma vērtības $r(1), \ldots, r(p)$.

Speciālā ARMA (p, q) procesa autokorelācijas funkcija uzvedas kā *MA(q)* procesa speciālā autokorelācijas funkcija. Tas nozīmē, ka tajā ir dilstošo eksponenšu un (vai) rimstošo sinusoīdu tipa locekļi (to savstarpējā attiecība ir atkarīga no *MA(q)* procesa kārtas un parametru vērtībām).

ARMA (p, q) procesa spektrālo blīvumu var izskaitļot ar šādas sakarības palīdzību:

$$p(\tilde{\omega}) = 2\sigma_0^2 \frac{\left|1 - \theta_1 e^{-i2\pi\tilde{\omega}} - \theta_2 e^{-i4\pi\tilde{\omega}} - \ldots - \theta_q e^{-i2q\pi\tilde{\omega}}\right|^2}{\left|1 - \alpha_1 e^{-i2\pi\tilde{\omega}} - \alpha_2 e^{-i4\pi\tilde{\omega}} - \ldots - \alpha_p e^{-i2p\pi\tilde{\omega}}\right|^2}, 0 \leq \tilde{\omega} \leq \frac{1}{2}.$$

ARMA (p, q) procesa identifikācija bāzējas (tāpat kā *AR*- un *MA*- modeļiem) uz modeļa parametru statistisko novērtējumu ar momentu metodi. Parametru α_k ($k = 1, 2, \ldots, p$), θ_j ($j = 1, 2, \ldots, q$) un σ_0^2 novērtēšanas procedūra dalās divos etapos: pirmajā etapā iegūst parametru α_k novērtējumus, otrajā – parametru θ_j un σ_0^2 novērtējumus.

<u>Pirmais etaps.</u> Modeļa autokorelācijas komponentes parametri (1.25) atbilst kineāru vienādojumu sistēmai:

$$\begin{cases} r(q+1) - \alpha_1 r(q) - \alpha_2 r(q-1) - \ldots - \alpha_p r(q-p+1) = 0, \\ r(q+2) - \alpha_1 r(q+1) - \alpha_2 r(q) - \ldots - \alpha_p r(q-p+2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r(q+p) - \alpha_1 r(q+p-1) - \alpha_2 r(q+p-2) - \ldots - \alpha_p r(q) = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Ievietojot (1.27) $r(k)$ vietā to izlases novērtējumu vērtības un risinot iegūto sistēmu attiecībā pret α_j ($j = 1,\ldots, p$), iegūstam novērtējumus $\hat{\alpha}_1,...,\hat{\alpha}_p$.

<u>Otrais etaps.</u> Ievietojot iegūtos novērtējumus $\hat{\alpha}_1,...,\hat{\alpha}_p$ (1.25), iegūstam q+1 sakarību kopu:

$$\varepsilon_t - \sum_{k=1}^{p} \hat{\alpha}_k \varepsilon_{t-k} = \delta_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \delta_{t-j},$$

$$\varepsilon_{t+1} - \sum_{k=1}^{p} \hat{\alpha}_k \varepsilon_{t+1-k} = \delta_{t+1} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \delta_{t+1-j},$$

$$\varepsilon_{t+q} - \sum_{k=1}^{p} \hat{\alpha}_k \varepsilon_{t+q-k} = \delta_{t+q} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \delta_{t+q-j}.$$

Šī sistēma ļauj iegūt nelineāras sakarības, kas saista meklējamos parametrus σ_0^2, $\theta_1,\ldots, \theta_q$ ar autokorelācijām un 1-ajā etapā iegūtajiem novērtējumiem.

Autoregresīvie slīdošā vidējā vektoriālie modeļi

Ekonometriskajā literatūrā un pielietojumos tiek apspriesti un izmantoti arī *ARMA* daudzspektru modeļi un, kā to speciālie gadījumi, vektoriālie *AR*- un *MA*-modeļi. Būtībā šie jautājumi attiecas uz daudzspektru regresijas problemātiku un vienlaicīgu vienādojumu sistēmām. Sīkāku informāciju par autoregresijas vektoriālajiem modeļiem var atrast, piemēram, [23].

Ekonomisko rādītāju prognozēšana uz laikrindu pamata

Tagad apskatīsim, kā iepriekšējās sadaļās aprakstītās metodes un modeļi tiek izmantoti ekonomisko rādītāju prognozēšanā. Koncentrēsimies uz prognozes metodēm, kurās esošā rinda ekstrapolējas uz priekšu, bet citas rindas, kas, iespējams, ietver noteiktu informāciju par pirmās uzvedību, prognozēšanā netiek izmantotas. Tā kā neeksistē visiem dzīves gadījumiem piemērotas universālas prognozēšanas metodes, tad attiecīgas metodes izvēle un tās efektivitāte ir atkarīga no daudziem nosacījumiem.

Tai skaitā no:

- vajadzīgā prognozēšanas horizonta;
- analizējamās laikrindas garuma;
- sezonālās komponentes vai jebkādu „nestandarta” īpašību esamības vai neesamības rindā.

Tāpēc prognozēšanas metode jāizvēlas, ņemot vērā visas specifiskās prognozes mērķu un analizējamās laikrindas īpatnības.

Prognozēšana uz *ARIMA* modeļu bāzes

ARIMA modeļi aptver diezgan plašu laikrindu spektru, bet nelielas šo modeļu modifikācijas ļauj diezgan precīzi aprakstīt arī laikrindas ar sezonalitāti. Vispirms apskatīsim laikrindu prognozēšanu ar metodēm, kas balstās uz *ARIMA* modeļu izmantošanu. Apskatīsim *ARIMA* modeļus vispārīgi, ņemot vērā, ka šajā klasē ietilpst arī speciāli gadījumi – *AR* - , *MA* – un *ARMA* – modeļi. Turklāt pieņemsim, ka piemērota modeļa izvēle analizējamai laikrindai, ieskaitot šī modeļa identifikāciju, jau ir izdarīta. Tāpēc turpmāk uzskatīts, ka visi modeļa parametri jau ir novērtēti.

Prognozēsim nezināmo vērtību x_{t+l}, $l \geq 1$, uzskatot, ka x_t ir pēdējais analizējamās laikrindas novērojums, kas ir mūsu rīcībā. Apzīmēsim šādu prognozi ar $\hat{x}_t^l$.

Atzīmēsim, ka, kaut arī $\hat{x}_t^l$ un $\hat{x}_{t-1}^{l+1}$ apzīmē tās pašas nezināmās vērtības x_{t+l} prognozi, tomēr tie ir aprēķināmi dažādi, jo ir dažādu uzdevumu risinājumi.

ARIMA(p, k, q) modeļu ietvaros analizējamo rindu x_τ, jebkuram $\tau > k$, aprakstīsim šādā veidā:

$$\left(1-\alpha_1 L-\ldots-\alpha_p L^p\right)\sum_{j=0}^{k}(-1)^k C_k^j x_{\tau-j}=\delta_\tau-\theta_1\delta_{\tau-1}-\ldots-\theta_q\delta_{\tau-q}, \qquad (1.28)$$

kur L – laika funkcijas operators iepriekšējam solim.

No sakarības (1.28) var izteikt x_τ jebkuriem $\tau = t-q,\ldots, t-1, t, t+1,\ldots, t+l$:

$$x_\tau=\left(\sum_{j=1}^{p}\alpha_j L^j\right)x_\tau+\left(1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j L^j\right)\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x_{\tau-i}\right)+\left(1-\sum_{j=1}^{q}\theta_j L^j\right)\delta_\tau. \quad (1.29)$$

Šīs sakarības labajā pusē ir lineāras kombinācijas no $p+k$ iepriekšējām (attiecībā pret kreisajā pusē esošo) analizējamā procesa x_τ vērtībām, kurām pieskaitītas lineārās kombinācijas kārtējai un q iepriekšējām gadījuma atlikumu δ_τ vērtībām. Turklāt koeficienti, ar kuru palīdzību šīs lineārās kombinācijas aprēķinātas, ir zināmi, jo tiek izteikti jau novērtētā modeļa parametros.

Šis fakts dod arī iespēju izmantot sakarību (1.29), lai iegūtu analizējamās laikrindas prognozējamo vērtību l laika soļiem uz priekšu. Teorētisko bāzi šādai prognozēšanas

pieejai nodrošina zināms rezultāts, saskaņā ar kuru vislabākā (vidējās kvadrātiskās kļūdas nozīmē) lineārā prognoze l soļiem uz priekšu no sākuma laika momenta t ir nosacītā gadījuma lieluma x_{t+l} matemātiskā cerība, kas aprēķināta pie nosacījuma, ka visas x_τ vērtības, līdz laika momentam t, ir zināmas. Šis rezultāts ir vispārējās prognozēšanas teorijas speciāls gadījums (sk. [18]).

Nosacīto matemātisko cerību $\boldsymbol{E}(x_{t+l} \mid x_1,\ldots, x_t)$ iegūst, pielietojot vidējās vērtības operatoru abām daļām (1.29) pie $\tau = t + l$, ievērojot šādas sakarības:

$$\mathbf{E}(x_{t-j} \mid x_1,\ldots, x_t) = x_{t-j} \qquad \text{visiem } j = 0, 1, 2,\ldots, t-1; \tag{1.30}$$

$$\mathbf{E}(x_{t+j} \mid x_1,\ldots, x_t) = \hat{x}_t^j \qquad \text{visiem } j = 1, 2,\ldots; \tag{1.31}$$

$$\mathbf{E}(x_{t+j} \mid x_1,\ldots, x_t) = 0 \qquad \text{visiem } j = 1, 2,\ldots; \tag{1.32}$$

$$\mathbf{E}(x_{t-j} \mid x_1,\ldots, x_t) = x_{t-j} - \hat{x}_{t-j-1}^1 \text{visiem } j = 0, 1, 2,\ldots, t-1. \tag{1.33}$$

Tādā veidā tiek noteikta šāda procedūra prognozes izveidei pēc laikrindas trajektorijas zināmā momentā:

1) pēc formulām (1.29) aprēķina prognozes $\hat{x}_{t-q-1}^1$, $\hat{x}_{t-q}^1,\ldots,$ $\hat{x}_{t-1}^1$ laikrindas iepriekšējām vērtībām; turklāt, aprēķinot sākuma prognozes $\hat{x}_{t-q+m-1}$ lielumiem x_{t-q+m} (m = 0, 1,…) vidējo $\boldsymbol{E}(\delta_{t-q+m-j} \mid x_1,\ldots, x_{t-q+m})$, ko vispārīgā gadījumā izskaitļo pēc formulām (1.33).
2) izmantojot formulas (1.29) pie $\tau > t$ un sakarības (1.30)-(1.33), tiek aprēķinātas nosacītās matemātiskās cerības prognozes vērtību izskaitļošanai.

Mēs šeit nepieskārāmies svarīgiem iegūstamo prognožu novērtēšanas jautājumiem, kuru teorētiskie aspekti ir apskatīti, piemēram, [24].

1.10. *ARIMA* modeļu trūkumi

ARIMA metodoloģija nespēj apstrādāt liela apjoma informāciju [71]. Daudzās prognozēšanas jomās, piemēram, ekonomikā, dati ir trokšņaini; mēdz būt arī pēkšņas datu dinamikas izmaiņas.

Daudzos zinātnieku darbos, analizējot un modelējot makroekonomiskos rādītājus, kas raksturo inflācijas, ārējās tirdzniecības, procentu likmju, valūtas kursu u. c. procesus, konstatētas vispārīgas likumsakarības novērojamo modeļu gadījuma atlikumu (prognozes kļūdu) uzvedībā: to lielās un mazās vērtības grupējas veseliem klasteriem vai sērijām, t. i.,

mijas mierīgo un nemierīgo stāvokļu periodi [41]. Turklāt tas nenoved pie to stacionaritātes un homoskedastitātes (t.i., kļūdu sadalījuma vienmērības) traucējumiem salīdzinoši lielos laika intervālos. Ar *ARMA* modeļiem šo fenomenu neizdevās izskaidrot, tāpēc bija nepieciešama zināmo modeļu modifikācija [6]).

ARIMA modeļu priekšrocības ir tās, ka šie modeļiem ir ļoti skaidrs matemātisks un statistisks pamats, kas padara šos modeļus par vieniem no visvairāk zinātniski pamatotajiem, novērtējot visu prognozēšanas modeļu kopumu,

Vēl viena to priekšrocība ─ aprobēta un zināma metodoloģija, pēc kuras var izvēlēties modeli, kas ir vispiemērotākais katrai konkrētajai laikrindai. Formāla atbilstības modeļa pārbaude ir pavisam vienkārša, un izstrādātās metodes vislabāko *ARIMA* modeļu automātiskai atlasei atvieglo pētnieku darbu.

Turklāt punktu un intervālu prognozes izriet no paša modeļa un nav nepieciešami atsevišķi aprēķini.

Viena no acīmredzamām šo modeļu nepilnībām ir laikrindu datu apjoms: lai izveidotu adekvātu *ARIMA* modeli, ir jābūt vismaz 40 novērojumiem [43], tomēr praksē tos ne vienmēr ir iespējams iegūt.

Vēl viens nopietns trūkums ir *ARIMA* parametru jutīgums pret datu izmaiņām: ja *ARIMA* modelim ir pievienoti jauni dati, nepieciešama periodiska parametru pārvērtēšana un dažkārt pat pāridentificēšana.

Trešais trūkums: lai veidotu apmierinošu *ARIMA* modeli, nepieciešams daudz resursu un laika[86]. Modeļa konstruēšana ir drīzāk "māksla", t.i., prasa lielu iesaistītā prognozētāja pieredzi.

Bet šīs priekšrocības un trūkumi attiecas tikai uz modeļa konstruēšanas procesu. Interesants ir *ARIMA* modeļu prognozēšanas precizitātes salīdzinājums ar citiem modeļiem, ko veica Starptautiskais Prognozētāju institūts [89] *(International Institute of Forecasters).*

Līdz 1982. gadam prognozētāji plaši uzskatīja, ka *ARIMA* modeļi nodrošina visprecīzākās prognozes. Tomēr pēc pirmā prognozēšanas precizitātes testa dažādu modeļu ietvaros izrādījās, ka ARIMA modelis nav labāks par eksponenciālās izlīdzināšanas modeļiem. Rezultātā tika secināts, ka katrā konkrētajā gadījumā izmantojams tikai noteikts modelis [90].

Iepriekš minētais izvirza jautājumu, kādēļ tās pašas metodes, kuras ir tik labi pamatotas no matemātiskās statistikas viedokļa, nepārsniedz prognozēšanas precizitātē citas metodes, kurām pilnīga statistiskā izpēte notikusi tikai 21. gadsimtā sākumā [90].

Atbilde uz šo jautājumu slēpjas pieejā, kas ir *ARIMA* modeļu pamatā - visa to struktūra balstīta uz pieņēmumu, ka laikrinda ģenerējas bezgalīgi saskaņā ar noteiktu funkciju. Tādēļ ir nepieciešama šīs funkcijas parametru izvērtēšana. Līdz ar to *ARIMA* metodes pamatā ir pieņēmums par „iesaldēto" procesu, kas nav evolucionējošs, jo sākumā šie modeļi bija izstrādāti fizisko un tehnisko procesu prognozēšanai (piemēram, viens no *ARIMA* dibinātājiem Jūls [91] savos zinātniskajos darbos modelēja saules plankumus), kur gandrīz visi procesu veidi tika aprakstīti vai nu kā stacionāri, vai kā diferenču stacionāri. Tādējādi problēmas prognozēšanā rodas tad, kad nepieciešama neatgriezenisko procesu izmaiņu paredzēšana. Tādi procesi varētu būt ekonomikā – piemēram, ne vienmēr IKP lielums atkarīgs no iepriekš veiktiem novērojumiem. Varētu parādīties kādi jauni faktori, piem., biznesa jomā u.c., kas ietekmētu IKP lielumu – savukārt "tehniskā" attieksme pret jaunajiem faktoriem neļautu ņemt vērā to īpašības, un tādēļ nebūtu iespējams veikt precīzu prognozēšanu.

Turklāt pašreizējās vērtības atkarība no iepriekšējās laikrindas ir vairāk virtuāla nekā reāla: formāli, konstruējot korelogrammas, mēs redzēsim, ka šie notikumi ir savstarpēji saistīti. Skaidrs, ka patiesībā tā nav, un līdz ar to uz to balstītie modeļi arī būs nepatiesi.

Protams, *ARIMA* modeļu pamatā ir savas nepilnības. Tomēr tas nekādā veidā neliecina par to, ka no šiem modeļiem būtu jāatsakās. Vienkārši ir jāņem vērā šo modeļu pozitīvos un negatīvos aspektus, un jābalstās uz tām prognozēm, par kurām (pamatojoties uz ekspertu viedokli un nozares veikto fundamentālo analīzi) varam teikt, ka tās labāk raksturos reālo situāciju nākotnē. Tādējādi, prognozētājam būtu jālieto metodes, kas ir robustas pret iepriekšminētajām problēmām. Viens no veidiem ─ kopulu un autokorelācijas koeficientu *GARCH(1,1)* modeļa atlikumu izmantošana.

1.11. Stohastiskie diferenciālvienādojumi un Markova īpašība

Šajā nodaļā izklāstīta diferenciālvienādojumu izmantošanas nepieciešamība Markova procesu aprakstīšanai. Apskatītā teorija pielietota, lai iegūtu 3. un 4. nodaļas rezultātus.

Pieņemsim, ka filtrētā [62] varbūtību telpā (Ω, F, F^t, P) ir uzdots skalārs stohastiskais diferenciālvienādojums

$$dx = a(t,x)dt + \sigma(t,x)dw(t), \qquad (1.34)$$

kas apmierina sākuma uzdevuma

$$x(s) = x \qquad (1.35)$$

atrisinājuma eksistences un unifikācijas nosacījumus uz pusass $[s,\infty)$ visiem $s \geq 0, x \in \mathsf{R}$. Šo atrisinājumu, kā telpā $(\Omega, \mathsf{F}, \mathsf{F}^t, \mathsf{P})$ uzdotu gadījuma procesu, apzīmēsim $X_{s,x} := \{x(t,s,x), t \geq s\}$. Lai aprakstītu atrisinājuma skaitliskos vai varbūtību raksturotājus atkarībā no sākuma nosacījumiem (1.35), šos nosacījumus norādīsim kā apakšējo indeksu, atbilstoši matemātiskai cerībai vai varbūtībai, t.i., $\mathsf{P}_{s,x}(x(t) \in A) := \mathsf{P}(x(t,s,x) \in A)$,

$$\mathsf{E}_{s,x}\{f(x(t))\} := \mathsf{E}\{f(x(t,s,x))\},\ \mathsf{P}_{s,x}(\tau_r \leq t) := \mathsf{P}_{s,x}\left(\sup_{s\leq\theta\leq t} x(\theta) \geq r\right) := \mathsf{P}\left(\sup_{s\leq\theta\leq t} x(\theta,s,x) \geq r\right)$$

un tā joprojām.

Laika momentā $s \geq 0$ sākuma nosacījums var būt arī gadījuma lielums $\xi : \Omega \to \mathsf{R}$: šim gadījuma lielumam jābūt F^s-izmērāmam, un tas nedrīkst būt atkarīgs no Brauna kustības procesa pieaugumiem uz pusass $[s,\infty)$. Turklāt sākuma gadījuma lielums var nebūt Brauna kustības procesa $\{w(\theta), 0 \leq \theta \leq s\}$ funkcionālis, bet vienkārši no procesa $W := \{w(t), t \geq 0\}$ neatkarīgs gadījuma lielums ar uzdotu varbūtību sadalījumu. Tāpēc, analizējot stohastiskos vienādojumus (1.34) uzskatīsim, ka F^t ir minimālā filtrācija, kas satur Brauna kustības filtrāciju un notikumus no kādas no procesa $W := \{w(t), t \geq 0\}$ neatkarīgas sigma-algebras Γ. Parādīsim, ka, izpildoties šiem pieņēmumiem, vienādojums (1.34) viennozīmīgi uzdod *Markova procesu* attiecībā pret filtrāciju F^t, t.i., gadījuma procesu $X := \{x(t), t \geq 0\}$, kuram spēkā ir īpašība

$$\forall s \geq 0, \forall t \geq s, \forall A \in \mathsf{B}:\ \mathsf{P}\{x(t) \in A / \mathsf{F}^s\} = \mathsf{P}_{s,x(s)}\{x(t) \in A\} := P(s, x(s), t, A) \qquad (1.36)$$

kur B ir Boreļa kopu sigma-algebra uz skaitļu ass. Šajā definīcijā lietoto funkciju $\{P(s,x,t,A),\ t \geq s \geq 0, x \in \mathsf{R}, A \in \mathsf{B}\}$ sauksim par Markova procesa *pārejas varbūtību funkciju*. Ja šī funkcija, kā mērs uz B, ir absolūti nepārtraukta attiecībā pret Lebega mēru, eksistē *pārejas varbūtību blīvuma funkcija*, kuru var izteikt ar (1.37) formulu

$$t \geq s \geq 0, x \in \mathsf{R}, A \in \mathsf{B} : P(s,x,t,A) = \int_A p(s,x,t,y)dy \qquad (1.37)$$

Markova procesu $X := \{x(t), t \geq 0\}$ sauc par *difūziju procesu*, ja tā pārejas varbūtībām piemīt šādas īpašības:

1. $\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathsf{R}: \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{|x-y|>\varepsilon} P(t, x, t+\Delta, dy) = 0$
2. eksistē tādas Bēra funkcijas $a(\cdot,\cdot)$ (*pārnese*) $\sigma(\cdot,\cdot)$ (*difūzija*), ka

2.i. $\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathrm{R}: \lim_{\Delta \downarrow 0}, \frac{1}{\Delta} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (y-x) P(t,x,t+\Delta,dy) \ = a(t,x)$

2.ii. $\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathrm{R}: \lim_{\Delta \downarrow 0}, \frac{1}{\Delta} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (y-x)^2 P(t,x,t+\Delta,dy) \ = \sigma^2(t,x)$

Piezīme 2.1. Minētie nosacījumi izriet no šādiem priekšnoteikumiem:

1*. eksistē tāds $\delta > 0$, ka

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathrm{R}: \lim_{\Delta \downarrow 0}, \frac{1}{\Delta} \int_{\mathrm{R}} |x-y|^{2+\delta} \ P(t,x,t+\Delta,dy) \ = 0$$

2.* eksistē tādas Bēra funkcijas $a(\cdot,\cdot)$ $\sigma(\cdot,\cdot)$, ka

2.i*. $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathrm{R}: \lim_{\Delta \downarrow 0}, \frac{1}{\Delta} \int_{\mathrm{R}} (y-x) P(t,x,t+\Delta,dy) \ = a(t,x)$

2.ii*. $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathrm{R}: \lim_{\Delta \downarrow 0}, \frac{1}{\Delta} \int_{\mathrm{R}} (y-x)^2 P(t,x,t+\Delta,dy) \ = \sigma^2(t,x)$

kurus reizēm ir vieglāk pārbaudīt. Lai to pierādītu, pietiek izmantot vienādību

$$\int_{|x-y| \leq \varepsilon} (y-x)^j P(t,x,t+\Delta,dy) \ = \int_{\mathrm{R}} (y-x)^j P(t,x,t+\Delta,dy) \ - \int_{|x-y| > \varepsilon} (y-x)^j P(t,x,t+\Delta,dy)$$

pie *j=1,2* un nevienādības

$$\int_{|x-y| > \varepsilon} P(t,x,t+\Delta,dy) \ \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta}} \int_{\mathrm{R}} |x-y|^{2+\delta} \ P(t,x,t+\Delta,dy) \ = o(\Delta)$$

$$\int_{|x-y| > \varepsilon} (x-y) P(t,x,t+\Delta,dy) \ \leq \frac{1}{\varepsilon^{1+\delta}} \int_{\mathrm{R}} |x-y|^{2+\delta} \ P(t,x,t+\Delta,dy) \ = o(\Delta)$$

$$\int_{|x-y| > \varepsilon} (x-y)^2 P(t,x,t+\Delta,dy) \ \leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta}} \int_{\mathrm{R}} |x-y|^{2+\delta} \ P(t,x,t+\Delta,dy) \ = o(\Delta)$$

Vispirms pārbaudīsim turpmākajam izklāstam nepieciešamu nevienādību.

Lemma 2.1. *Ja vienādojumā* (1.34) *funkcijas* $a(t,x)$ *un* $\sigma(t,x)$ *apmierina lokālos Lipšica nosacījumus un sublineāra pieauguma nosacījumus, tad*
visiem $x \in \mathrm{R}. m \in \mathrm{N}, s \geq 0$ *un* $t \geq s$ *vienādojuma (1.34)-(1.35) atrisinājums apmierina nevienādību*

$$\mathrm{E}|x(t,s,x)|^{2m} \leq (1+|x|^{2m}) e^{h(m)(t-s)} \tag{1.38}$$

Pierādījums: visiem $r > |x|$ līdz pirmajam momentam τ_r iziešanas no $U_r := \{|x| < r\}$ var izmantot Ito formulu funkcijai $v(t,x) := (1+x^{2m}) e^{-ct}$ jebkurā *c>0.*

$$dv(t,x(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathsf{L}\right) v(t,x(t))dt + 2e^{-ct} m(x(t))^{2m-1} \sigma(x(t),t)dw(t) =$$
$$= [-cv(t,x(t)) + e^{-ct}(2m(x(t))^{2m-1} a(x(t),t) + m(2m-1)(x(t))^{2m-2} \sigma^2(x(t),t)))]dt +$$
$$+2e^{-ct} m(x(t))^{2m-1} \sigma(x(t),t)dw(t):$$

Sakarā ar to, ka no sublineārā pieauguma nosacījuma izriet nevienādība

$$2|x|^{2m-1}|a(x,t)| + (2m-1)|x|^{2m-2}\sigma^2(x,t) \le (2m+1)|x|^{2m-2}(|x||a(x,t)| + \sigma^2(x,t)) \le$$
$$\le (2m+1)|x|^{2m-2}(2|x|^2 + 2|a(x,t)|^2 + \sigma^2(x,t))) \le 2(K+1)(2m+1)|x|^{2m-2}(1+|x|^2) \le$$
$$\le 4(K+1)(2m+1)(1+|x|^{2m})$$

tad $c = 4(K+1)(2m+1)$ var rakstīt

$$\mathsf{E}_{s,x} v(\tau_r(t), x(\tau_r(t))) = v(s,x) + \mathsf{E}_{s,x}\left\{\int_s^{\tau_r(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathsf{L}\right) v(u,x(u))du\right\} \le v(s,x)$$

Tagad varam izmantot faktu, ka, izpildoties lemma nosacījumiem, varbūtība, ka process $\tau_r(t)$ galīgā laikā aizies bezgalībā ir nulle. Tāpēc visiem $t \ge 0$ varam rakstīt vienādību $\mathsf{P}_{s,x}(\lim_{r\to\infty} \tau_r(t) = t\} = 1$. Tātad arī

$$\mathsf{E}_{s,x}(x(t))^{2m} = \lim_{r\to\infty} \mathsf{E}_{s,x}(x(\tau_r(t))^{2m} \le e^{ct} \lim_{r\to\infty} \mathsf{E}_{s,x}\left[v(\tau_r(t), x(\tau_r(t)))\right] \le v(s,x)e^{ct} = (1+x^{2m})e^{h(m)(t-s)}$$

no kurienes arī seko (1.39), ja $c = h(m) = 4(K+1)(2m+1)$.

Secinājums 2.1. *Izpildoties iepriekšējās lemmas nosacījumiem,*

$$\mathsf{E}([1+x^2(t,s,x)]^2) \le 4(1+x^4)e^{h(2)(t-s)}. \qquad (1.38^*)$$

Teorēma 2.1. *Ja funkcijas* $a(t,x)$ *un* $\sigma(t,x)$ *vienādojumā* (1.34) *ir nepārtrauktas pēc saviem argumentiem kopumā, kā arī apmierina Lipšica nosacījumus un sublineārā pieauguma nosacījumu, tad vienādojums* (1.34) *definē Markova difūzijas procesu ar pārejas varbūtībām* (1.36)*, pārnesi* $a(t,x)$ *un difūziju* $\sigma(t,x)$.

Pierādījums. Ievērojot, ka ir apmierinātas atrisinājuma eksistences un unifikācijas teorēmas un lemmas 2.1 nosacījumi visiem $s \ge 0$ un visiem F^s– izmērāmiem sākuma nosacījumiem ξ, kuriem eksistē otrais moments, redzams, ka vienādojumam (1.34)-(1.35) ir viens vienīgs atrisinājums, kuram eksistē otrais moments pie visiem $t \ge s$. No šejienes seko iespēja izmantot vienādību

$$\forall s \ge 0, \forall t \ge s: x(t,0,\xi) = x(t,s,x(s,0,\xi)). \qquad (1.39)$$

Tāpēc

$$\forall s \ge 0, \forall t \ge s, \forall A \in \mathsf{B}: \mathsf{P}\{x(t,0,\xi) \in A / \mathsf{F}^s\} = \mathsf{E}\{1_A(x(t,0,\xi) / \mathsf{F}^s\} =$$
$$= \mathsf{E}\{1_A(x(t,s,x(s,0,\xi)) / \mathsf{F}^s\} = \mathsf{E}\{1_A(x(t,s,x)\}\big|_{x=x(s,0,\xi)} =$$
$$= \mathsf{P}\{x(t,s,x) \in A\}\big|_{x=x(s,0,\xi)} = P(s,x(s),t,A)$$

kas ir ekvivalenti Markova īpašībai ar pārejas varbūtību (1.36).

Tagad pierādīsim, ka ar vienādību (1.36) uzdotajai pārejas varbūtībai izpildās īpašība 1*, ja $\delta = 2$. Šim nolūkam izmantosim vienādību

$$\int_{\mathrm{R}} (x-y)^4 P(t,x,t+\Delta,dy) \ = \mathsf{E}\{(x(t+\Delta,t,x)-x)^4)\}$$

un apskatāmo integrāli novērtēsim no augšas ar acīmredzamu nevienādību

$$\mathsf{E}\{(x(t+\Delta,t,x)-x)^4)\} \le 4\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+\Delta} a(s,x(s))ds\right)^4\right\} + 4\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+\Delta} \sigma(s,x(s))dw(s)\right)^4\right\} \qquad (1.40)$$

Atsevišķi novērtēsim katru no saskaitāmajiem labajā pusē. No sublineārā pieauguma nosacījuma un Heldera nevienādības seko nevienādība

$$\left(\int_t^{t+\Delta} a(s,x(s))ds\right)^4 \le \left(\left(\int_t^{t+\Delta} a(s,x(s))ds\right)^2\right)^2 \le \left(\Delta\int_t^{t+\Delta} a^2(s,x(s))ds\right)^2 \le$$

$$\le \Delta^3 \int_t^{t+\Delta} a^4(s,x(s))ds \le K^2\Delta^3 \int_t^{t+\Delta} (1+x^2(s))^2 ds \le 2K^2\Delta^3 \int_t^{t+\Delta} (1+x^4(s))ds$$

Tāpēc, saskaņā ar (1.37) ,

$$\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+\Delta} a(s,x(s))ds\right)^4\right\} \le 2K^2\Delta^3\left\{\int_t^{t+\Delta}(1+\mathsf{E}_{t,x}\{x^4(s)\})ds\right\}$$

$$\le 2K^2\Delta^3\left\{\Delta+(1+x^4)e^{h(2)\Delta}\Delta\right\} \le 2K^2\left(1+e^{h(2)}\right)(1+x^4)\Delta^4 := c(1+x^4)\Delta^4 \qquad (1.41)$$

visiem $x \in \mathrm{R}, t \in \mathrm{R}$ un $\Delta \in (0,1)$. Lai novērtētu stohastiskā integrāļa ceturtās pakāpes matemātisko cerību izteiksmē (1.40), izmantosim Ito formulu gadījuma procesam

$y(u) := \int_t^{t+u} \sigma(s,x(s))dw(s)$, kas pie $u \ge 0$ uzdots ar stohastisko vienādojumu

$dy(u) = \sigma(u,x(u))dw(u)$ un sākuma nosacījumu $y(0) = 0$:

$$\mathsf{E}_{t,x}\{y^4(u)\} = 6\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{\sigma^2(t+s,x(t+s))y^2(s)\right\}ds \le$$

$$\le 12\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{|\,\sigma(t+s,x(t+s))-\sigma(t,x))\,|^2\ y^2(s)\right\}ds + 12\sigma^2(t,x))\int_0^u\int_t^{t+s} \mathsf{E}_{t,x}\left\{\sigma^2(\theta,x(\theta))\right\}d\theta ds \le$$

$$\le 12K\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{|\,x(t+s)-x\,|^2\ y^2(s)\right\}ds + 12K^2(1+x^2)\int_0^u\int_t^{t+s}\left(1+(\mathsf{E}_{t,x}\left\{|\,x(t+\theta)\,|^2\right\}\right)d\theta ds \le$$

$$\le 24K\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+s} a(\theta,x(\theta))d\theta\right)^2 y^2(s)\right\}ds + 24K\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{y^4(s)\right\}ds + 24K^2(1+x^2)^2u^2e^{h(1)u}$$

Tagad, izmantojot (1.41), viegli var iegūt nevienādību

$$\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+s} a(\theta,x(\theta))d\theta\right)^2 y^2(s)\right\}ds \le \frac{1}{2}\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+s} a(\theta,x(\theta))d\theta\right)^4\right\}ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{y^4(s)\right\}ds \le \frac{1}{2}c(1+x^4)u^4 + \frac{1}{2}\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{y^4(s)\right\}ds$$

Tāpēc visiem $x \in \mathsf{R}, t \in \mathsf{R}, \Delta \in (0,1)$ un $u \in (0,\Delta)$ izpildās nevienādība

$$\mathsf{E}_{t,x}\{y^4(u)\} \le 24K\left(cK(1+x^4)u^4\right) + 96K\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{y^4(s)\right\}ds + 24K^2(1+x^2)^2u^2e^{h(1)} \le$$

$$\le c_1(1+x^4)\Delta^2 + c_2\int_0^u \mathsf{E}_{t,x}\left\{y^4(s)\right\}ds$$

pie kaut kādām konstanšu c_1 un c_2 vērtībām. No šejienes varam secināt, ka

$$\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_t^{t+\Delta} \sigma(s,x(s))dw(s)\right)^4\right\} \le c_1(1+x^4)\Delta^2 e^{c_2} \text{ visiem } \Delta \in (0,1).$$

Ievietojot šo novērtējumu un (1.41) izteiksmē (1.40), iegūsim apgalvojumu 1*.

Izmantojot pierādīto apgalvojumu un martingalu nevienādību, pie $\Delta \in (0,1)$, viegli var iegūt novērtējumu

$$\mathsf{E}_{t,x}\left\{\sup_{0\le u\le\Delta}[x(t+u)) - x]^2\right\} \le 2\Delta\int_t^{t+\Delta} \mathsf{E}_{t,x}\{a^2(s,x(s))\}ds + 8\int_t^{t+\Delta} \mathsf{E}_{t,x}\{\sigma^2(s,x(s))\}ds \le$$

$$\le 2(\Delta+4)K\int_t^{t+\Delta}(1+\mathsf{E}_{t,x}x^2(s))ds \le K_1(1+x^2)\Delta$$

ar kaut kādu no $t \ge 0$:, $x \in \mathsf{R}$ un Δ neatkarīgu konstanti K_1. Tātad visiem $c > 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\mathsf{P}_{t,x}\left\{\sup_{0\le u\le\Delta}[x(t+u)) - x] > c\right\} \le \frac{1}{c^2}\lim_{\Delta\to 0}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\sup_{0\le u\le\Delta}[x(t+u)) - x]^2\right\} = 0$$

un tāpēc $\mathsf{P}_{t,x}\left\{\lim_{\Delta\to 0} x(t+\Delta) = x\right\} = 1$. No šī apgalvojuma, sublineārā pieauguma nosacījuma un vienādojuma (1.34)-(1.35) momentu eksistences seko vienādības

$$\lim_{s\downarrow t}\mathsf{E}_{t,x}\left\{a(s,x(s))\right\} = a(t,x), \qquad \lim_{s\downarrow t}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\sigma^2(s,x(s))\right\} = \sigma^2(t,x),$$

un tāpēc

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\left\{a(s,x(s))\right\}ds = a(t,x) \tag{1.42}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\sigma^2(s,x(s))\right\}ds = \sigma^2(t,x) \tag{1.43}$$

No (1.42) uzreiz izriet vienādība 2.i* tāpēc, ka

$$\int_{\mathsf{R}}(y-x)P(t,x,t+\Delta,dy) = \mathsf{E}_{t,x}\left\{(x(t+\Delta)-x)\right\} = \int_{t}^{t+\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\left\{a(s,x(s))\right\}ds$$

Lai pierādītu 2.ii* , izmantosim izvirzījumu

$$\int_{\mathsf{R}}(y-x)^2P(t,x,t+\Delta,dy) := \mathsf{E}_{t,x}\left\{(x(t+\Delta)-x)^2\right\} = \mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)^2\right\}+$$

$$+2\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)\right\}+\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)^2\right\}$$

Heldera nevienādību

$$\left(\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)\right\}\right)^2 \le \mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)^2\right\}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)^2\right\}$$

un nevienādības

$$\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)^2\right\} \le \Delta\int_{t}^{t+\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\{a^2(s,x(s))\}ds \le \Delta K\int_{t}^{t+\Delta}(1+\mathsf{E}_{t,x}\{|x(s)|^2\})ds$$

$$\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)^2\right\} = \int_{t}^{t+\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\sigma^2(s,x(s))\right\}ds \le \Delta K\int_{t}^{t+\Delta}(1+\mathsf{E}_{t,x}\{|x(s)|^2\})ds,$$

kam seko asimptotiska vienādība

$$\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)^2\right\}+2\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}a(s,x(s))ds\right)\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)\right\} = o(\Delta)$$

Tāpēc visiem $t \ge 0$:un $x \in \mathsf{R}$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{\mathsf{R}}(y-x)^2P(t,x,t+\Delta,dy) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\left(\int_{t}^{t+\Delta}\sigma(s,x(s))dw(s)\right)^2\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{t}^{t+\Delta}\mathsf{E}_{t,x}\left\{\sigma^2(s,x(s))\right\}ds = \sigma^2(s,x)$$

Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Piezīme 2.1. No visiem $0<u<s<t, x\in\mathsf{R}$ un Boreļa kopām A pareizas vienādības

$$\mathsf{P}_{u,x}\{x(t)\in A\} = \mathsf{P}\{x(t,u,x)\in A\} = \mathsf{P}\{x(t,s,x(s,u,x))\in A\} =$$

$$= \mathsf{E}\{\ \mathsf{P}\{x(t,s,x(s,u,x))\in A/\mathsf{F}^{s}\}\} = \mathsf{E}\{\ \mathsf{P}_{s,y}\{x(t)\in A\}|_{y=x(s,u,x)}\} =$$

$$= \mathsf{E}\{P(s,x(s,u,x),t,A)\}$$

viegli var iegūt *Čepmena-Kolmogorova* vienādojumu pārejas varbūtībām

$$P(u,x,t,A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(s,y,t,A)P(u,x,s,dy) \tag{1.44}$$

Ja pārejas varbūtībai eksistē blīvuma funkcija $p(s,x,t,y)$, t.i., varbūtība $P(s,x,t,A)$, ka kopas A funkcija ir absolūti nepārtraukta attiecībā pret Lebega mēru, un visiem $0<s<t, x\in\mathrm{R}$ ir spēkā vienādība

$$P(s,x,t,A)=\int_{A}p(s,x,t,y)dy\,,$$

tad var rakstīt *Čepmena-Kolmogorova vienādojumu pārejas varbūtību blīvuma funkcijām*

$$p(u,x,t,z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(s,y,t,z)p(u,x,s,y)dy \tag{1.45}$$

Teorēma 2.2. *Pieņemsim, ka ar vienādojumu (1.34) uzdotā Markova difūzijas procesa pārejas varbūtību blīvuma funkcijai* $p(s,x,t,y)$ *eksistē atvasinājumi* $\frac{\partial p}{\partial s},\frac{\partial p}{\partial x}$ *un* $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ *,kas ir nepārtraukti pēc* x, *vienmērīgi pa* y *katrā galīgajā intervālā* $\alpha\le y\le\beta$. *Tad*

$$\frac{\partial}{\partial s}p(s,x,t,y)+a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}p(s,x,t,y)+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(s,x,t,y)=0 \tag{1.46}$$

Pierādījums. Apskatīsim patvaļīgu nepārtrauktu funkciju $\varphi(x)$, kas vienāda ar nulli ārpus kāda intervāla (x_1,x_2). Apzīmēsim:

$$\psi(s,x):=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,p(s,x,t,y)dy \tag{1.47}$$

un izmantosim Čepmena-Kolmogorova vienādojumu (1.45) ar patvaļīgiem $0<s<\theta<t$:

$$\psi(s,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{-\infty}^{\infty}p(\theta,z,t,y)p(s,x,\theta,z)dzdy=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\theta,z)p(s,x,\theta,z)dz\,. \tag{1.48}$$

Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem funkcijai $\psi(s,x)$ eksistē nepārtraukti atvasinājumi $\frac{\partial\psi}{\partial s},\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, un tāpēc varam lietot Teilora formulu

$$\psi(\theta,z)-\psi(\theta,x)=+\varepsilon^2O(\delta_\varepsilon) \tag{1.49}$$

kur $\delta_\varepsilon := \sup_{|z-x|\le\varepsilon}\left|\frac{\partial^2\psi(\theta,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(\theta,x)}{\partial x^2}\right|, \varepsilon\to 0$. Jāatzīmē, ka no Markova difūzijas procesa īpašībām katram fiksētajam $\varepsilon>0$ seko asimptotika

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} p(s,x,s+\Delta,y)dy := \mathsf{P}_{s,x}(|x(s+\Delta)-x|>\varepsilon)=o(\Delta)$$

$$\int_{|x-y|\le\varepsilon}(y-x)p(s,x,s+\Delta,y)dy=a(s,x)\Delta+o(\Delta)$$

$$\int_{|x-y|\le\varepsilon}(y-x)^2 p(s,x,s+\Delta,y)dy=\sigma^2(s,x)\Delta+o(\Delta)$$

Tāpēc no (1.47)-(1.48) var iegūt vienādību

$$\begin{aligned}\psi(s,x)-\psi(\theta,x)&=\int_{-\infty}^{\infty}[\psi(\theta,z)-\psi(\theta,x)]p(s,x,\theta,z)dz=\\&=\int_{|x-z|\le\varepsilon}[\psi(\theta,z)-\psi(\theta,x)]p(s,x,\theta,z)dz+o(|\theta-s|)\end{aligned}\tag{1.50}$$

Tagad var pielietot Teilora formulu (1.49)

$$\begin{aligned}&\int_{|x-z|\le\varepsilon}[\psi(\theta,z)-\psi(\theta,x)]p(s,x,\theta,z)dz=\frac{\partial\psi(\theta,x)}{\partial x}\int_{|x-z|\le\varepsilon}(z-x)p(s,x,\theta,z)dz+\\&+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(\theta,x)}{\partial x^2}+O(\varepsilon)\right)\int_{|x-z|\le\varepsilon}(z-x)^2p(s,x,\theta,z)dz+o(|\theta-s|)=\\&=\left[\frac{\partial\psi(\theta,x)}{\partial x}a(s,x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(\theta,x)}{\partial x^2}\sigma^2(s,x)+O(\varepsilon)\right](\theta-s)+o(|\theta-s|)\end{aligned}$$

Liekot ε tiekties uz nulli, ievietojot iegūto izteiksmi formulā (1.50), izdalīsim to ar $\theta-s$ un pāriesim uz robežu, ja $\theta\to s$:

$$\lim_{\theta\to s}\frac{1}{\theta-s}\int_{-\infty}^{\infty}[\psi(\theta,z)-\psi(\theta,x)]p(s,x,\theta,z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\left\{\left(a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)p(s,x,t,z)\right\}dz$$

$$\lim_{\theta\to s}\frac{\psi(s,x)-\psi(\theta,x)}{\theta-s}=-\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,x)=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial s}p(s,x,t,z)dz$$

No šejienes seko, ka patvaļīgai, nepārtrauktai funkcijai $\varphi(z)$ ar kompaktu nesēju visiem $0<s<t, x\in\mathsf{R}$ ir spēkā vienādība

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}+a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)p(s,x,t,z)\right\}dz=0\tag{1.51}$$

Pateicoties $\varphi(z)$ patvaļīgajai izvēlei, tie ir ekvivalenti (1.46).

Piezīme 2.2. Vienādojumu (1.46) sauc par *apgriezto Kolmogorova vienādojumu*.

Piezīme 2.3. Lietojot paragrāfa sākumā ievestos apzīmējumus, (1.47) var pārrakstīt formā $\psi(s,x)=\mathsf{E}_{s,x}\{\varphi(y(t))\}$, bet (1.48) – vienādojuma formā

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}+a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathsf{E}_{s,x}\{\varphi(x(t))\}=0 \tag{1.52}$$

ar robežnosacījumiem

$$u(t,x)=\varphi(x) \tag{1.53}$$

Šis vienādojums (1.52) literatūrā ir pazīstams kā *Feinmana-Kaca formula*.

Teorēma 2.3. *Pieņemsim, ka* $p(s,x,t,y)$ *ir Markova difūzijas procesa, kas uzdots ar vienādojumu (1.34), pārejas varbūtību blīvuma funkcija. Ja eksistē nepārtraukti atvasinājumi* $\frac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial t}, \frac{\partial(a(t,y)p(s,x,t,y))}{\partial y}$ *un* $\frac{\partial^2(\sigma^2(t,y)p(s,x,t,y))}{\partial y^2}$, *tad pārejas varbūtību blīvuma funkcija* $p(s,x,t,y)$ *apmierina tiešo Kolmogorova vienādojumu*

$$\frac{\partial}{\partial t}p(s,x,t,y)=-\frac{\partial}{\partial y}[a(t,y)p(s,x,t,y)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t,y)p(s,x,t,y)] \tag{1.54}$$

Pierādījums. Izraudzīsimies patvaļīgu, divreiz nepārtraukti diferencējamu funkciju ar kompaktu nesēju $\varphi(x)$, t.i., šī funkcija ir vienāda ar nulli ārpus kāda intervāla (x_1,x_2), un lietosim Ito formulu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial t}p(s,x,t,y)dy:=\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}_{s,x}\left\{\varphi(x(t))\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathsf{L}\,\varphi)(y)\,p(s,x,t,y)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left\{a(t,y)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi\right)(y)\,p(s,x,t,y)dy$$

Parciāli integrējot, iegūsim vienādību

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial t}p(s,x,t,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left\{a(t,y)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi\right)(y)\,p(s,x,t,y)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{\partial}{\partial y}[a(t,y)p(s,x,t,y)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t,y)p(s,x,t,y)]\right\}\varphi(y)dy$$

kas, pateicoties funkcijas $\varphi(y)$ patvaļīgajai izvēlei, ir ekvivalenta tiešajam Kolmogorova vienādojumam (1.54).

Atzīmēsim dažus faktus par *homogēniem, stohastiskiem Ito diferenciālvienādojumiem*, t.i., par vienādojumiem, kas uzrakstāmi šādā veidā

$$dx=a(x)dt+\sigma(x)dw(t), \tag{1.55}$$

pieņemot, ka eksistē viens vienīgs uzdevuma (1.55)-(1.34) atrisinājums visiem $\forall x \in \mathrm{R}$. Intuitīvi ir skaidrs un pierādāms, ka šajā gadījumā atrisinājuma varbūtību raksturotājiem arī piemīt homogenitāte laikā

$$\forall x \in \mathrm{R}, \forall f \in \mathrm{C}(\mathrm{R}), \forall s \geq 0, \forall t \geq 0 : \mathrm{E}_{s,x} f(x(t+s)) = \mathrm{E}_{0,x} f(x(t)) . \qquad (1.56)$$

Šāda pati homogenitāte piemīt arī pārejas varbūtībām, kuras homogēniem Markova procesiem var rakstīt kā triju argumentu funkcijas

$$P(s,x,t+s,dy) \equiv P(0,x,t,dy) := P(x,t,dy) . \qquad (1.57)$$

Homogēnu Markova procesu varbūtību raksturotāju analīzei ir ērti lietot pusgrupu teorijas aparātu. Sākotnēji, izmantojot (1.57) izmērāmu, ierobežotu funkciju telpā $\mathrm{B}(\mathrm{R})$, ar normu $\| f \| = \sup_{x \in \mathrm{R}} | f(x) |$, definēsim lineāros operatorus $\{T(t), t \geq 0\}$ ar vienādību

$$x \in \mathrm{R}; t \in \mathrm{R}, f \in \mathrm{B}(\mathrm{R}) : (T(t) f)(x) := \mathrm{E}_{s,x}\{ f(x(t+s))\} . \qquad (1.58)$$

Pateicoties (1.57) homogenitātei, var rakstīt vienādības

$$(T(t-s) f)(x) := \mathrm{E}_{s,x}\{ f(x(t))\} = \mathrm{E}_{s,x}\{\mathrm{E}_{u,x(u,s,x)}\{ f(x(t))\}\} = \mathrm{E}_{s,x}\{\mathrm{E}_{u,x(u,s,x)}\{ f(x(t))\} / \mathrm{F}^{u}\} =$$
$$= \mathrm{E}\{\mathrm{E}_{u,z}\{ f(x(t))\}|_{z=x(u,s,x)}\} := \mathrm{E}\{(T(t-u) f)(z)|_{z=x(u,s,x)}\} :=$$
$$:= \mathrm{E}\{(T(t-u) f)(x(u,s,x))\} = \mathrm{E}_{s,x}\{(T(t-u) f)(x(u))\} = (T(u-s)(T(t-u) f)(x)$$

t.i.,

$$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, \forall f \in \mathrm{R}, \forall x \in \mathrm{R} : (T(t+s) f)(x) = (T(t) T(s) f)(x) . \qquad (1.59)$$

Šo vienādību sauc par *lineāru, nepārtrauktu operatoru vienparametra saimes* $\{T(t), t \geq 0\}$ *pusgrupas īpašību*.

Homogēnu Markova procesu sauc par *Fellera procesu*, ja ar vienādību (1.57) uzdotā pusgrupa $\{T(t), t \geq 0\}$ ir invarianta telpā $\mathrm{C}(\mathrm{R})$, t.i.,

$$t \in \mathrm{R}, f \in \mathrm{C}(\mathrm{R}) \Rightarrow T(t) f \in \mathrm{C}(\mathrm{R}) . \qquad (1.60)$$

Markova difūzijas procesiem Fellera īpašība viegli iegūstama no vienādības $\forall x \in \mathrm{R} : \mathrm{P}_{s,x}\left(\lim_{t \to 0} x(t+s) = x\right) = 1$. Izmantojot pusgrupu teorijas aparātu, var pierādīt, ka šajā gadījumā pusgrupa $\{T(t), t \geq 0\}$ tiek viennozīmīgi uzdota ar tās *infinitezimālo operatoru*

$$f \in \mathrm{C}(\mathrm{R}) : \lim_{t \to 0} \frac{\| T(t) f - f \|}{t} := \lim_{t \to 0} \frac{\sup_{x \in \mathrm{R}} | \mathrm{E}_{s,x}\{ f(x(t+s))\} - f(x) |}{t} , \qquad (1.61)$$

kuru sauc par *Markova procesa C-infinitezimālo operatoru*. Fellera pusgrupu ar infinitezimālā operatora palīdzību var uzdot ar integrālvienādību

$$t \in \mathrm{R}, f \in \mathrm{D}(\mathrm{L}) : T(t) f = f + \int_0^t T(s) f ds$$

vai diferenciālvienādojumu telpā $\mathrm{C}(\mathrm{R})$

$$\frac{d}{dt}T(t)f = T(t)\mathrm{L}f = \mathrm{L}\,T(t)f\,.$$

Difūzijas procesa C-infinitezimālo operatoru, kā jau iepriekš pārliecinājāmies, var uzdot ar vienādību

$$\forall x \in \mathrm{R} : \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{E}_{s,x}\{f(x(t+s))\} - f(x)}{t} = \left(\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f\right)(x) := (\mathrm{L}f)(x) \qquad (1.62)$$

.

Tā definīcijas apgabals ir visu divreiz nepārtraukti diferencējamu funkciju kopa $\mathrm{C}^2(\mathrm{R})$, kurām $\mathrm{L}f \in \mathrm{C}^2(\mathrm{R})$. Diemžēl, pat, ja pārnese un difūzija apmierina Lipšica nosacījumus, šis operators nav definēts visā telpā $\mathrm{C}^2(\mathrm{R})$, jo $\mathrm{L}f$, iespējams, vairs nav ierobežota funkcija. Tāpēc, lai analizētu (1.55) atrisinājumus, lielākoties pielieto ar izteiksmi (1.57) uzdotus operatorus, kam ir lielāks definīcijas apgabals, un tiek izmantota iespēja uzdot operatorus (1.57) uz visiem izmērāmajem (ne obligāti ierobežotiem) attēlojumiem $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, kuriem eksistē matemātiskā cerība $\mathrm{E}_{s,x}\{f(x(t+s))\}$ un kuriem ir spēkā vienādība $\lim_{t\to 0}\mathrm{E}_{s,x}\{f(x(t+s))\} = f(x)$ visiem $x \in \mathrm{R}$.

Šiem operatoriem, līdzīgi kā iepriekš, var pārbaudīt pusgrupas īpašību un definēt infinitezimālo operatoru ar vienādības (1.62) palīdzību. Ja operatora (1.62) definīcijas apgabals tiek noteikts kā izmērāmu funkciju kopa, kurām

$$\forall x \in \mathrm{R}, \exists \Delta > 0, \exists r > 0 : \sup_{t\in(0,\Delta),\, x\in U_r}\frac{|\mathrm{E}_{s,x}\{f(x(t+s))\} - f(x)|}{t} < \infty\,, \qquad (1.63)$$

tad pie šiem nosacījumiem definēto operatoru sauc par *Markova procesa vājo infinitezimālo operatoru*. Turpmāk, ja nebūs noteikts citādi, ar L apzīmēsim vājo infinitezimālo operatoru. Tāpat kā Fellera pārejas funkcijas gadījumā, arī pusgrupu $t \ge 0, x \in \mathrm{R} : (T(t)f)(x) := \mathrm{E}_{s,x}\{f(x(t+s))\}$ viennozīmīgi paradā tās vājais infinitezimālais operators ar vienādības

$$x \in \mathrm{R}, t > 0,\ f \in \mathrm{D}(\mathrm{L}) \subset \mathrm{B}_{loc}(\mathrm{R}) : T(t)f(x) = f(x) + \int_0^t (T(s)\mathrm{L}f)(x))ds \qquad (1.64)$$

palīdzību.

Gadījumā, ja nav iespējams garantēt matemātiskās cerības $\mathsf{E}_{s,x}\{f(x(t+s))\}$ eksistenci visiem $t \geq 0$ un $x \in \mathsf{R}$, atrisinājumu var lokalizēt mums vajadzīgajā apgabalā U un izteiksmes (1.64) vietā lietot *Dinkina formulu*

$$x \in U \subset \mathsf{R}, t > 0, : \mathsf{E}_{0,x}\left\{f(x(\tau_U)\right\} = f(x) + \mathsf{E}_{0,x}\left\{\int_0^{\tau_U} (\mathsf{L} f)(x(s))ds\right\}, \tag{1.65}$$

kur τ_U - ir pirmais moments procesa iziešanā no apgabala U. Ja izteiksmē (1.53) pārnesei un difūzijai izpildās lokālais Lipšica un sublineāra pieauguma nosacījums, operatora definīcijas apgabals satur vismaz divreiz nepārtraukti diferencējamu funkciju telpu $\mathsf{C}^2_{loc}(\mathsf{R})$. Ar to praktiski vienmēr pietiek, lai lietotu stohastiskās analīzes aparātu uz visas pusass $t \geq 0$ definētajiem difūzijas procesiem. Tomēr, ja tiek apskatīti stohastiskie vienādojumi, kas var būt definēti tikai kādā atklātā apgabalā $U \subset \mathsf{R}$, tad runa ir par (1.67) apturētajiem atrisinājumiem, un iepriekš dotās definīcijas vairs nav izmantojamas. Šādos gadījumos Markova procesu teorijā lieto lineāru operatoru pusgrupu

$$x \in U, t > 0, f \in \mathsf{B}(U) : (\tilde{T}(t) f)(x) := \mathsf{E}_{s,x}\{f(x(\tau_U(t)+s))\} \tag{1.66}$$

kur $\tau_U(t) = \min\{t, \tau_U\}$, un izmērāmajiem attēlojumiem $f : \mathsf{B}(U) \to \mathsf{B}(U)$ *raksturīgais operators* tiek uzdots ar izteiksmi

$$(\mathrm{A} f)(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\mathsf{E}_{s,x}\{f(x(\tau_r))\} - f(x)}{\mathsf{E}_{s,x}\tau_r}, \tag{1.67}$$

kur τ_r - ir pirmais moments procesa iziešanā no apkārtnes $U_r(x) := \{|y - x| < r\} \subset U$.

Markova difūzijas process ar nepārtrauktu pārnesi un difūziju operators (1.34) tāpat tiek uzdots ar formulu (1.62).

Markova procesu teorijā tiek pierādīts, ka Markova process ir viennozīmīgi definēts ar savu infinitezimālo, vājo infinitezimālo vai raksturīgo operatoru.

1.12. Hestona modelis un to pārveidošana diskrētajā laikā

Šī darba nolūks ir sniegt priekšstatu par *ARIMA* modeļu pielietojumu, lai veiktu nepārtraukto Markova procesu reprezentāciju diskrētā laika gadījumā. Kā zināms, katru nepārtrauktu Markova procesu var uzskatīt par diskrēta Markova procesa robežgadījumu, un Kolmogorova difūzijas vienādojumu atrisinājumus var aproksimēt ar Kolmogorova diferenciālo vienādojumu atrisinājumiem [34]. Šis pieņēmums ļauj diskreditēt nepārtrauktos modeļus ar mērķi noteikt parametrus, pārbaudīt stacionaritāti u.t.t.

Turpmāk tiks apskatīts Hestona svārstību modelis. Šī metode ir pielāgota, lai dotu intuitīvu izpratni par Hestona modeli ne tikai tehniski, bet arī tādēļ, lai nākamās sadaļas

būtu vieglāk uztveramas. Nepieciešamībās gadījumā sīkākas tehniskās detaļas ir atrodamas, izmantojot attiecīgās atsauces.

Hestons [70] piedāvāja šādu modeli:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t}\, S_t dW_t^1, \tag{1.68}$$

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}\, dW_t^2, \tag{1.69}$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt,$$

kur $\{S_t\}_{t\geq 0}$ un $\{V_t\}_{t\geq 0}$ attiecīgi ir cenas un svārstīguma procesi; $\{W_t^1\}_{t\geq 0}$, $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ ir korelēti Brauna kustības procesi (ar korelācijas parametru ρ); μ ir determinēta bezriska procentu likme. $\{V_t\}_{t\geq 0}$ ir atgriešanās procesa vidējās vērtības kvadrātsakne, kas pirmo reizi izmantota Koksa, Ingersola un Rosa darbā [28], ar ilgtermiņa vidējo vērtību θ, standartnovirzi σ un atgriešanos pie vidējā koeficientu k; ρ ir definēts kā difūzijas svārstības. Visi parametri $k, \mu, \theta, \rho, \sigma$ ir laikā un stāvokļos homogēni.

ρ var interpretēt kā korelācijas starp ienesīguma logaritmu un aktīvu cenas svārstībām, kas ietekmē "smago astu" parādīšanos sadalījumā.. Ja ρ > 0, tad svārstības pieaugs, jo aktīvu cenas/ienesīgums palielināsies. Tas izplatīsies uz labo sadalījuma asti un saspiedīs kreiso sadalījuma asti, radot sadalījumu ar smago labo asti.

Un otrādi, ja ρ <0, tad aktīvu cenas svārstības pieaugs un aktīva cena samazināsies, tādējādi izplatoties uz kreiso sadalījuma asti un saspiežot labo sadalījuma asti, radot sadalījumu ar smago kreiso asti (uzsverot faktu, ka vairumā gadījumu kapitāla atdeve un ar to saistītās svārstības korelē negatīvi). Turklāt ρ ietekmē arī sadalījuma novirzi.

Ir daudz ekonomisku, empīrisku un matemātisku iemeslu modeļu izvēlei šādā formā (skat.[31] detalizēto statistisko/empīrisko analīzi). Empīriskie pētījumi liecina, ka aktīvu logaritmiskais ienesīguma sadalījums nav pēc Gausa. To raksturo "smagas astes" un augstas virsotnes *(leptokurtic)*. Eksistē arī empīriskie pierādījumi un ekonomiskie argumenti, kas liecina, ka akciju ienesīgums un to svārstības korelē negatīvi (dažreiz to sauc par "pleca" efektu – *the leverage effect*). Šī novirze no normāla sadalījuma apgrūtina Bleka–Šoulza–Merona modeļa izmantošanu. Savukārt Hestona modeli var pielietot dažādu sadalījumu gadījumā.

Noslēgto opciju iespējamās prasības nosaka viens vai vairāki tirgus aktīvi Bleka–Šoulza–Merona modelī. Gadījuma pazīmju kopums opcijas vērtībai veidojas tikai aktīvu cenas gadījuma rakstura dēļ. Ņemot vērā, ka paši aktīvi ir tirgojami, opcijas var hedžēt uz

nepārtrauktas tirgošanās pamata, kas padara tirgu pilnīgu, t.i., katru iespējamo prasību var nohedžēt.

Iespējamās prasības (noslēgtai opcijai) stohastiskajā svārstību modelī nosaka aktīvu cenas $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gadījuma raksturs un aktīvu atgriešanas procesa $\{V_t\}_{t\geq 0}$ gadījuma svārstības. Tikai viens no šiem elementiem ir tirgojams. Svārstīgums nav tirgojams aktīvs. Tas padara tirgu par nepilnīgu un lielā mērā ietekmē opciju cenu veidošanos, kā arī citu atvasināto finanšu instrumentu vērtības.

Tāpēc ir jāatrod diskrētā Hestona modeļa reprezentācija un jāpiemeklē iespējamais *ARIMA* klases modelis, lai, izmantojot laikrindu tehniku, pārbaudītu hipotēzi par heteroskedastiskā efekta esamība modeļa atlikumos. Pretējā gadījumā nav pamatojuma izmantot Hestona modeli izvēlētajai finanšu instrumenta cenai. Promocijas darbā augstākminētie jautājumi ir apskatīti, balstoties uz reāliem datiem.

1.12.1. Cenas procesa pārveidošana diskrētajā laikā

Pirmkārt, atradīsim vienādojuma (1.68) atrisinājumu un izveidosim stohastiskā modeļa diskrēto reprezentāciju:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t}\, S_t dW_t \quad .$$

Aizvietojot $y_t = \ln S_t$ un pieņemot, ka $V_t = const$, varam izmantot Ito teorēmu:

$$dy_t = (\ln(S_t))' \mu S_t dt + (\ln(S_t))' \sqrt{V_t}\, S_t dW_t + \frac{1}{2}(\ln(S_t))'' V_t^2 \mu S_t^2 dt =$$

$$= \mu dt + \sqrt{V}\, dW_t - \frac{1}{2} V^2 \mu dt =$$

$$= (\mu - \frac{1}{2}V^2)dt + \sqrt{V}\, dW_t \quad . \qquad (1.70)$$

Atrisinot vienādojumu (1.70), iegūstam:

$$y_t - y_0 = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}V^2)dt + \int_0^t \sqrt{V}\, dW_s =$$

$$= (\mu - \frac{1}{2}V^2)dt + \sqrt{V}\, dW_t \ .$$

vai

$$\ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}V^2)dt + \sqrt{V}\, dW_t \ .$$

Tad

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}V^2)t + \sqrt{V}\, W_t \ .$$

Iegūtais vienādojums savā ziņā ir vienādojums opcijas (vai cita finanšu instrumenta) cenas atkarībai no iepriekšējā cenu līmeņa.

Šāds rezultāts ir viegli iegūstams, aizvietojot $y_t = \ln S_t$ un ņemot rekurento izteiksmi no iepriekšējām vērtībām. Vienmērīgi sadalot intervālu [*0;T*] apakšintervālos $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ (praktiski var izmantot $\Delta t = 1$) un pieņemot, ka $t_i = i\frac{T}{N}$ katrai $t_i = i,...,n$, kā arī $W_t \sim \varepsilon_t$, kur $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, iegūstam:

$$y_t - y_{t-1} = (\mu - \frac{1}{2}V^2) + \sqrt{V}\, \varepsilon_t . \tag{1.71}$$

No vienādojuma (1.71) novērtējuma redzams, ka nepārtrauktu Markova procesu var reprezentēt diskrētajā laikā, un galvenā daļa Hestona modelī tagad ir *ARIMA* (*AR(1)*) process.

Mūsdienās Markova *AR(1)* process ir pietiekami detalizēti izpētīts un turpmākajām modeļa konstruēšanas un/vai testēšanas vajadzībām var izmantot *ARIMA* tehniku, lai noskaidrotu modeļa atbilstību novērojamiem finanšu instrumenta cenu datiem.

1.12.2. Svārstību procesa pārveidošana diskrētajā laikā

Hestona modeļa otrā vienādojuma atrisinājuma iegūšanai var izmantot turpmāk izklāstīto metodoloģiju. Kaut gan eksistē daudzas alternatīvas, kā pārveidot stohastisko diferenciālvienādojumu diskrētajā telpā, tomēr Koksa-Ingersola-Rosa modeļa gadījumā ir iespējams iegūt arī vienādojuma analītisko atrisinājumu [28].

Apskatīsim difūzijas procesu, kuru apraksta Koksa-Ingersola-Rosa modelis:

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}\, dW_t \tag{1.72}$$

Izslēgsim vienādojuma difūzijas daļu, savukārt atlikušo apzīmēsim ar

$$Y_t = k(\theta - V_t)dt \quad . \tag{1.73}$$

Reizināsim vienādojuma (1.73) abas puses ar e^{kt}, kā rezultātā iegūsim:

$$e^{kt}Y_t = f(V_t) = e^{kt}(k(\theta - V_t) \tag{1.74}$$

Tomēr faktiski difūzija vienādojumā ir saglabājusies un tiek apskatīta funkcija, kas atkarīga no stohastiskā procesa $\{V_t\}_{t\geq 0}$.

Lai aprakstītu diferenču dinamiku, nepieciešams izmantot Ito teorēmu. Vispirms aprēķināsim parciālos atvasinājumus:

$$\frac{\partial f(V_t)}{\partial t} = ke^{kt}Y_t;$$
$$\frac{\partial f(V_t)}{\partial V_t} = -ke^{kt};$$
$$\frac{\partial f(V_t)}{\partial V_t^2} = 0. \quad .$$

Pēc parciālo atvasinājumu atrašanas varam izmantot Ito teorēmu:

$$\begin{aligned} f(V_t) - f(V_0) &= \int_0^t \frac{\partial f(V_t)}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial f(V_t)}{\partial V_t} dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial f(V_t)}{\partial V_t^2} ds = \\ &= \int_0^t ke^{ks}Y_s ds - \int_0^t ke^{ks}[Y_s ds + \sigma dW_s] = \\ &= -\int_0^t ke^{ks}\sigma dW_s. \end{aligned} \tag{1.75}$$

No vienādojuma (1.75) redzams, ka priekš V_t iegūta rekurentā izteiksme, kas atkarīga no iepriekšējiem novērojumiem. Nelieli pārveidojumi ļauj izteiksmi vienkāršot:

$$e^{kt}Y_t - e^{kt}Y_0 = -\int_0^t ke^{ks}\sigma dW_s;$$

$$ke^{kt}(\theta - V_t - k(\theta - V_0)) = -\int_0^t ke^{ks}\sigma dW_s;$$

$$-ke^{kt}V_t = -k\theta e^{kt} + k\theta - kV_0 - \int_0^t ke^{ks}\sigma dW_s;$$

$$V_t = \theta(1-e^{kt}) + e^{kt}V_0 + \int_0^t ke^{ks}\sigma dW_s. \qquad (1.76)$$

Tādā veidā ir iegūta rekursīvā izteiksme priekš V_t un, sadalot intervālu [*0; T*] *N* apakšintervālos $t_i = i\frac{T}{N}$, $t_i = i,...,n$, kā arī apzīmējot laika soli $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, iegūstam svārstību vienādojumu diskrētajā laikā:

$$V_{t_i} = \theta(1-e^{-k\Delta t}) + e^{-k\Delta t}V_{t_{i-1}} + \varepsilon_{t_i}, \qquad (1.77)$$

kur

$$\varepsilon_{t_i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} ke^{-k(t_i-s)}\sigma dW_s.$$

Citiem vārdiem sakot, esam ieguvuši Gausa pārejas blīvuma pirmos divus momentus V_t :

$$V_{t_i} / F_{t_{i-1}} \sim \mathrm{N}(\theta(1-e^{kt}) + e^{kt}V_{t_{i-1}}, \varepsilon_{t_i}^2)$$

Atliek atrast ērtāko veidu, kā izteikt ε_{t_i}, lai iegūtu šo izteiksmi tādā formā, kāda būtu izmantojama imitāciju veikšanai (dažādu finanšu procesu u.c. modelēšanai). Kaut arī tas nav acīmredzami, bet ε_{t_i} faktiski ir pārejas blīvuma dispersija. To var apgalvot, jo ε_{t_i} ir stohastisks integrālis ar nulles matemātisko cerību. Atcerēsimies, ka kvadrātisku svārstību process W_t ir Brauna kustības process, ka

$$E[\varepsilon_{t_i} / F_{t_{i-1}}] = 0.$$

Tomēr Koksa-Ingersola-Rosa modelim pārejas blīvums seko necentrētam χ^2 sadalījumam, kuru ir diezgan grūti aprēķināt. Šajā sakarā Ball un Roma [65] pierādījuši, ka nelielos laika intervālos difūzija, kas rodas stohastiskajos diferenciālvienādojumos, uzvedas kā Brauna kustības process un tādējādi normāli sadalīts pārejas blīvums ir labs tuvinājums vienādojumam (1.72). Līdz ar to imitācijas vajadzībām varam izmantot necentrētā χ^2 sadalījuma pirmos divus momentus un pieņemt, ka [29]:

$$V_{t_i} / F_{t_{i-1}} \sim \mathrm{N}[\theta(1-e^{kt}) + e^{kt}V_{t_{i-1}}, \frac{\theta\sigma^2}{2k}(1-e^{kt})^2 + \frac{\sigma^2}{k}(e^{-kt} - e^{-2kt})V_{t_{i-1}}].$$

Ņemot vērā, ka finanšu instrumentu, kuriem ir χ^2 sadalījums, pētīšana var aizņemt daudz laika un radīt neparedzamus rezultātus, situācija būtu uzlabojama, izmantojot regresijas analīzi (autoregresijas).

Iegūtie rezultāti atvieglo parametru noteikšanas procesu Hestona modelim, kā arī paver iespēju pielietot *ARIMA* klases modeļu izvēles, pielāgošanas un novērtēšanas paņēmienus, kas varētu palīdzēt izdarīt pareizus statistiskos secinājumus, kā arī veikt modelēšanu un prognozi.

Nākamajā sadaļā apskatīts diskrētā Hestona modeļa pielāgošanas mehānisms reālajiem datiem, paralēli pārbaudot šī modeļa atbilstību izvēlētajiem datiem.

1.12.3. VIX indeksa modelēšana ar Hestona modeli

Aplūkosim piemēru, kurā ir apvienota Hestona modeļa diskrētā reprezentācija ar *ARIMA* modeļa pielāgošanas/testēšanas metodi (skat. 1.18.att. un 1.pielikumu). Analizēsim *VIX* – akciju tirgus svārstīguma indeksa – ikdienas datus no 2007. gada 27.marta līdz 2010.gada 21.oktobrim. *VIX* ir tirgus instruments, kas novērtē bāzes akciju tirgus indeksā S&P 500 ietverto nenoteiktību 30 dienām uz priekšu. Spēja pilnvērtīgi interpretēt *VIX* kustības un tā vērtības reakciju uz notikumiem tirgū var sniegt investoriem neapšaubāmas priekšrocības tirdzniecības portfeļa riska/ienesīguma pārvaldībai, kā arī palīdzēt izstrādāt portfeļa stratēģijas, izmantojot atvasinātos finanšu instrumentus un balstoties uz *VIX* pozīcijām. Rezultātā tas ļauj maksimizēt savu peļņu no *VIX* un *S&P 500* indeksa korelācijas, kas mainās laikā.

1.14. att. *VIX* akciju indeksa vēsturiskā dinamika.

1.14.attēlā redzam, ka *VIX* laikrindai ir nestacionaritātes pazīmes, it īpaši īsos laika intervālos. Turklāt vērojamas dažas tendenču izmaiņas 2008.gada oktobrī. Laikrindas autokorelācijas dažādām laika nobīdēm samazinās lineāri [7], kas ir tipiska nestacionāro rindu pazīme. Arī Diki - Fulera (*Dickey-Fuller vai ADF tests)* tests uzrāda vienības saknes eksistenci. Līdz ar to pašreizējā līmeņu formā VIX indeksa datus no 2007. gada 27.aprīļa līdz 2010.gada 21.oktobrim nevar pielietot stacionārā modeļa veidošanai un tā rezultātā iegūtais modelis nav izmantojams prognozēšanas nolūkiem.

Tādējādi, lai izlīdzinātu datus, ir nepieciešams izvēlēties pirmo diferenci. Šī jaunā sērija DVIX ir nosacīti heteroskedastiska. Jaunizveidotajai laikrindai pēc Diki - Fulera testa rezultātiem nav vienības saknes un, balstoties uz autokorelāciju rezultātiem, var izvēlēties atbilstošo modeli – *AR(1)* ar *ARCH(2)* atlikumiem. Savukārt, laikrindas stabilitātes tests (Čou pārtraukto punktu tests) [7] uzrāda režīmu nomaiņu 2008. gada oktobrī. Tādēļ dati analizēti tikai pēc 2008. gada oktobra, izveidojot jaunu laikrindu.

Jaunajai rindai apskatāmajā periodā ir skaidri izteikta tendence. Līdz ar to laika tendence *(trends)* tiek izslēgta, un tālāk analizēta jaunā laikrinda vix2 laika periodam no 2008. gada 10.oktobra līdz 2010.gada 21.oktobrim:

$$vix2_t = vix_t - vix_{t-1}$$

Iegūtā sistēma (1.37), (1.43) no Hestona modeļa diskretizācijas aptuveni ir vienāda ar *AR(1)* modeli un ar *GARCH-M(1,0)* atlikumiem, kur kvadrātiskā dispersija ar fiksēto koeficientu 0,5 ir iekļauta AR(1) vienādojumā priekš $vix2_t$.

Izmantojot programpaketi *WINRATS*, ir novērtēti parametri laikrindai $vix2_t$ šādā formā:

$$\begin{cases} vix2_t = -16{,}743 + 0{,}5\, V_t^2 + 0{,}954 \cdot vix2_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = v_t \sqrt{V_t} \\ V_t = 5{,}9934 + 0{,}04138979 \cdot V_{t-1} \end{cases}.$$

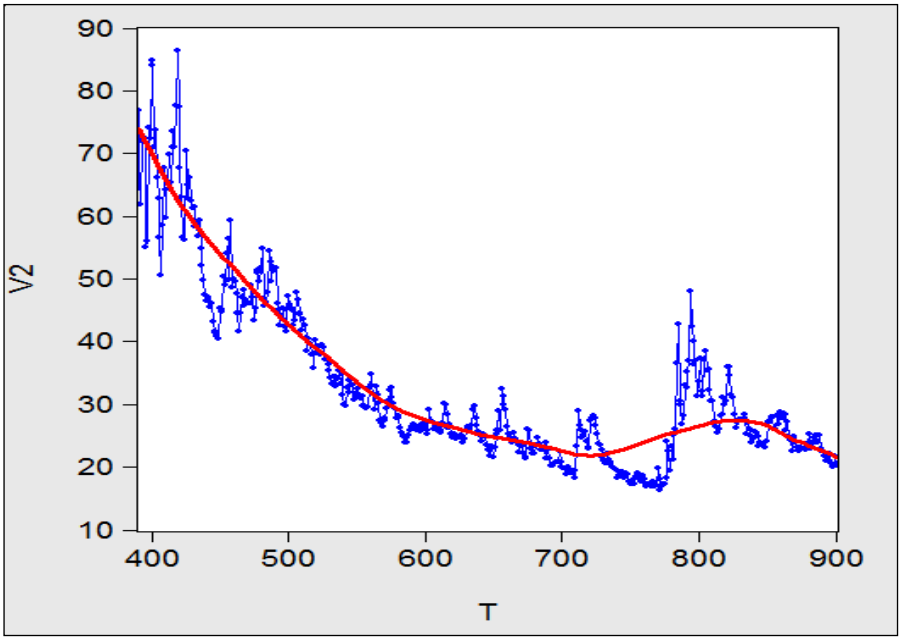
Šajā gadījumā koeficients pie V_t^2 bija nofiksēts 0,5 līmenī. Diemžēl nevar apgalvot, ka šis modelis, kas iegūts no Hestona modeļa diskretizācijas, būtu vislabākais (protams, mūsu secinājumi balstās uz pieejamo izlasi). Savukārt, ja koeficients pie V_t^2 netiek fiksēts, aktuālais modelis būtu vienāds ar :

$$\begin{cases} vix2_t = -10{,}3265 + 0{,}24347\, V_t^2 + 0{,}95319 \cdot vix2_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = v_t \sqrt{V_t} \\ V_t = 6{,}7326 + 0{,}0849 \cdot V_{t-1} \end{cases}.$$

Iespējams, ka eksistē kāds cits *ARMA/GARCH* modelis, kas būtu labāk piemērots datiem nekā iepriekšminētais, bet no izskatītā modeļu klāsta šis modelis datiem bija optimālais.

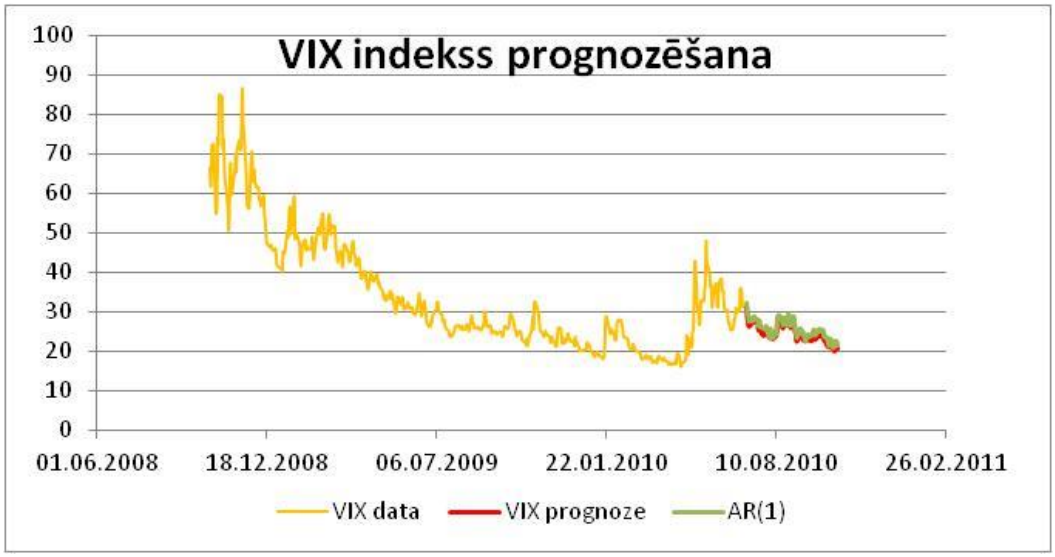
Tādējādi, kaut arī regresiju analīze dod vairāk iespēju laikrindas analīzei, tomēr Hestona modelis ļauj sašaurināt piemērotāko modeļu klasi, jo labākā modeļa atrašanas process ir diezgan darbietilpīgs.

Grafiski novērtējumu problēmu var veiksmīgi atrisināt arī programpaketē Eviews ar lokālo regresijas metodi, izvēloties tiešo kodolu un novērtējot standartnovirzes no sākotnējās laikrindas hipotētiskās līknes (sk. 1.15.attēlu, kur šī līkne ir sarkanā krāsā).

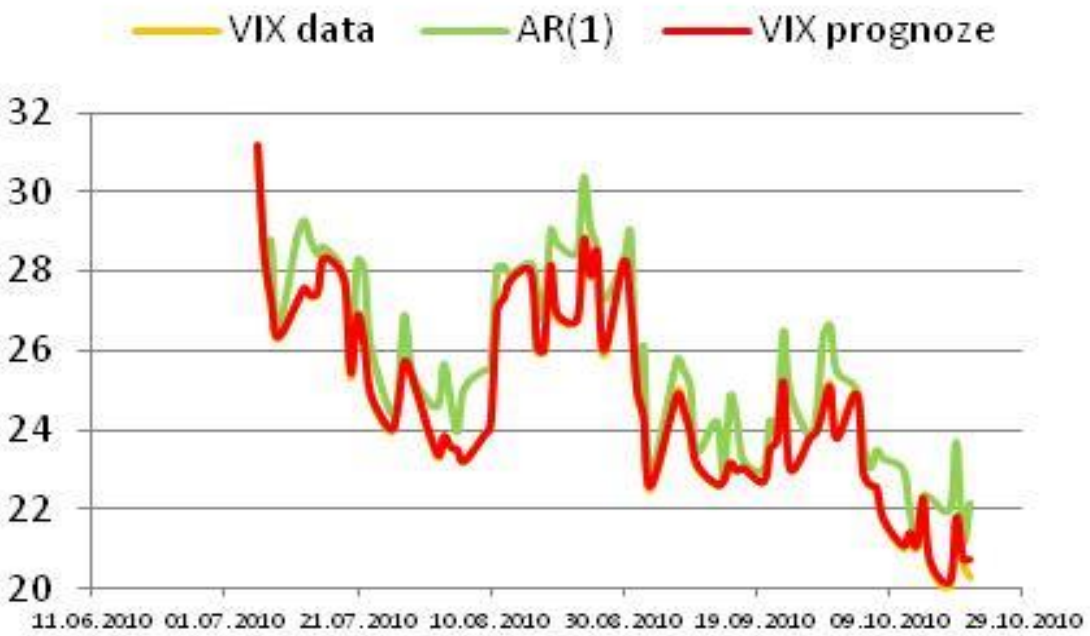


1.15. att. Laikrindas vix2t novērtēšana ar lokālās regresijas metodi.

Diskrētā Hestona modeļa reprezentācija ir piemērota, lai atrisinātu problēmu, kas saistīta ar stohastiskā modeļa atbilstību finanšu laikrindai. Turklāt *ARIMA* tehnikas izmantošana Hestona modeļu parametru novērtēšanā būtiski vienkāršo šo procesu, savukārt modeļa diskretizācija vienkāršo parametru novērtēšanu. Tomēr, ņemot vērā iepriekšminētos vienādojumu koeficientus, *VIX* datu modelēšana un attiecīgi indeksa nākotnes līmeņu prognozēšana, izmantojot Hestona modeli, ne vienmēr ir korekta. Tādējādi stohastiskā Hestona modeļa diskretizācijas pieeja ir izmantojama arī citu līdzīgu stohastisko diferenciālvienādojumu atbilstības reālajiem datiem pārbaudei.

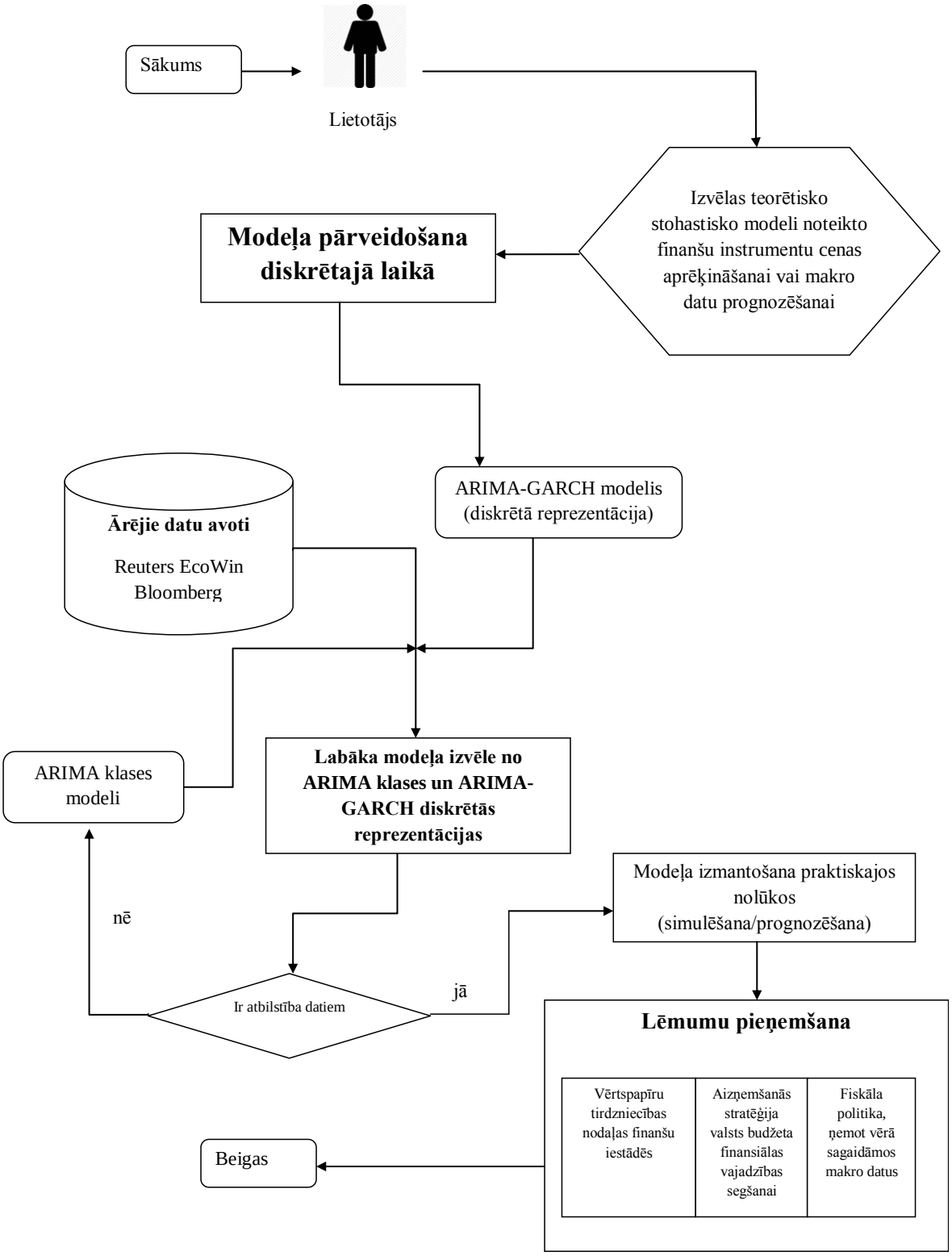


1.16. att. *VIX* indekss un modeļu prognozētās vērtības.



1.17. att. *VIX* indekss un modeļu salīdzinošās prognozes.

Līdz ar to secinām, ka stohastisko modeļu pārveidošana diskrētajā laikā dod iespēju noteikt modeļa atbilstību novērojumu datiem, kas savukārt palielina prognozes precizitāti.



1.18. att. Hestona modeļa diskretizācijas praktiskā pielietošana.

2. NEPARAMETRISKĀS REGRESIJAS UN TO DEFINĒŠANAS VEIDS AR KOPULĀM

Kaut arī lielākā daļa pētījumu, kuros izmantotas kopulas, ir koncentrēti uz atkarības modelēšanu starp dažādām sērijām vai datu novērojumiem, ir arvien vairāk darbu, kas izmanto kopulas, lai modelētu vienfaktora nelineāro laikrindu laika atkarību. Granger (2003) [72] definē noturību (piemēram, "ilgu atmiņu" vai "īsu atmiņu") vispārīgajiem nelineārajiem laika sēriju modeļiem, izmantojot kopulu. Darsow, Nguyen un Olsen (1992) [36] sniedz raksturlielumus uz kopulām balstītām laikrindām kā Markova procesu. Joe (1997) [37] ierosina parametrisko stacionāro Markova modeļu klasi, kas balstīta uz parametru kopulām un parametrisko invariantu (vienas dimensijas marginālo) sadalījumu. Chens un Fans (2006) [33] pētījuši neparametrisko stacionāro Markova modeļu klasi, kas balstīta uz parametru kopulām un neparametrisko invariantu sadalījumu. Ja $\{Y_t\}$ ir stacionārs Markova process, ar nepārtrauktu marginālo sadalījuma funkciju G, tad tā varbūtiskās īpašības pilnībā nosaka divdimensionālā funkcija no Y_t un Y_{t-1}, t.i. $H(y_1, y_2)$. Pēc Sklara teorēmas (skat. Frees, E.W., Valdez, E.A. (1998) [38], Nelsen (2006) [84], var vienīgi izteikt H (•, •) attiecībā uz invariantu sadalījumu G un kopulas funkciju C (•, •) no Y_{t-1} un Y_t, $H(y_1, y_2) = C(G(y_1), G(y_2))$. Tādējādi vienmēr var norādīt stacionāro pirmās kārtas Markova modeli ar nepārtrauktā stāvokļa telpu, tieši norādot $\{Y_t\}$ marginālo sadalījumu un Y_{t-1} un Y_t divargumentu kopulas funkciju. Kopulas pieejas priekšrocība ir tā, ka var brīvi izvēlēties marginālo sadalījumu un kopulas funkciju atsevišķi. Marginālais sadalījums apraksta uzvedību, piemēram, laikrindas $\{Y_t\}$ "smagās astes" un / vai asimetrijas, kamēr kopulas funkcija raksturo visas no laika atkarīgās īpašības, kas ir nozīmīgas jebkurai pārveidei un laikrindas atkarības īpašībai.

Turpmāk aprakstīts pirmās kārtas Markova modelis, kas izveidots, izmantojot kopulu, un ir ļoti elastīgs. Šis modelis paplašina nelineāro laikrindu modeļu klāstu (sk.2.1.attēlu) un ļauj analizēt ekstremālās vērtības, kas iegūtas no laikrindu sadalījumu astes, novērtējot "smagās astes", asimetriskās atkarības un citu dinamiku, kas piemīt daudziem populāriem nelineārajiem modeļiem, ilga atmiņa, modeļi ar strukturāliem pārrāvumiem u.c. Turpmāk 3. nodaļā detalizēti izklāstīta kopulveidīgo regresiju uzbūves metode, kas papildina *ARIMA* klases modeļus (skat. 1.1.attēlu) augstākminētajos gadījumos.

2.1. Kopulas matemātiskā definīcija un veidi

Pieņemam, ka $(X_1,...,X_N) \in R^N$ ir gadījuma vektors ar kopējo sadalījuma funkciju [40]:

$$F(x_1,...,x_N) = P(X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N)$$

un marginālajām funkcijām :

$$F_k(x_k) = P(X_k \le x_k),\ 1 \le k \le N.$$

Kopula C no F ir definēta, kā kopējā sadalījuma funkcija ar varbūtībām segmentā $[0,1]^N$, kur:

1. $\forall\ 1 \le k \le N,\ 0 \le u_k \le 1$

$$C_k(u_k) = C(1,...,1,u_k,1,...,1) = u_k;$$

2. $\forall\ (x_1,...,x_N)$, kur x_k ir funkcijas $F_k (1 \le k \le N)$ nepārtrauktības punkts,

$$F(x_1,...,x_N) = C(F_1(x_1),...,F_N(x_N)).$$

Divdimensiju gadījumā kopula ir funkcija $C:[0,1]^2 \to [0,1]$, tāda, kur :

1. $\forall\ (u,v) \in [0,1]^2$,

$$\begin{cases} C(u,0) = C(0,v) = 0 \\ C(u,1) = u\ un\ C(1,v) = v \end{cases}$$

2. $\forall\ (u_1,v_1,u_2,v_2) \in [0,1]^4,\ u_1 \le u_2,\ v_1 \le v_2$,

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \ge 0.$$

Citiem vārdiem sakot, kopula ir divu gadījuma lielumu U un V kopējā sadalījuma funkcija. Turklāt $C(u,v) = P(U \le u, V \le v)$.

Par nosacīto sadalījuma funkciju divdimensiju gadījumā sauc $C_1(u,v) = \dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$.

Ja, piemēram, X un Y kopējā sadalījuma funkcija ir dota kā $F(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$, tad nosacītā sadalījuma funkcija $Y \mid X = x$ ir uzrakstāma šādā

veidā: $F_{Y|X}(y) = C_1(F_X(x), F_Y(y))$. Vispārīgi kopulas nosacītā sadalījuma funkcija tiek izteikta pēc formulas:

$$C_1(u_1,...,u_k,...,u_N) = \frac{\partial C_1(u_1...,u_k,...,u_N)}{\partial u_1}.$$

Ja funkcija C_1 ir pietiekami vienkārša, lai iegūtu inverso funkciju, tad kopējā sadalījuma funkciju viegli modelējama, izmantojot atvasināto nosacīto sadalījumu, t.i., pirmkārt, modelē vērtību U, nosaka u, pēc tam modelē vērtību V no C_1, kas ir nosacītais sadalījums $V \mid U = u$.

Ar $c(u,v)$ var definēt atbilstošo blīvuma funkciju, kas ir 2. kārtas parciālais atvasinājums no $C(u,v)$, t.i., $c(u,v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u \partial v}$. Vispārīgā gadījumā kopulas blīvuma funkcija definējama šādi:

$$c(u_1,...,u_k,...,u_N) = \frac{\partial C(u_1...,u_k,...,u_N)}{\partial u_1...\partial u_k...\partial u_N}.$$

Savukārt kopējās sadalījuma funkcijas F blīvuma funkcija ir

$f(x_1,...,x_k,...,x_N) = c(F_1(x_1),...,F_k(x_k),...,F_N(x_N))\prod_{k=1}^{N} f_k(x_k)$, kur f_k ir funkcijas F_k blīvuma funkcija.

Nepārtrauktajām kopulas funkcijām atkarības parametru parasti pārveido par atkarības mēru. Viens no tādiem mēriem ir Kendalla τ, kas ir ierobežots intervālā [-1,1] un nav atkarīgs no marginālā sadalījuma funkcijas formas.

Divi korelētu vērtību pāri ar vienādu kopulu var būt korelēti ar dažādiem korelācijas koeficientiem. Bet jebkurām korelētajām vērtībām, kurām ir vienāda kopula, var definēt šīs kopulas τ, kas ir konstantes no kopulas. Kendalla korelāciju τ definē šādā veidā:

$$\tau = 4E(C(u,v)) - 1.$$

Gadījumā, ja korelācija ir perfekta, t.i., $U = V$, tad $\tau = 1$, jo $E(C(u,v)) = \frac{1}{2}$.

Šāda veida aprēķins ļauj definēt τ kā korelācijas koeficientu.

Sklara teorēma[40]

Pieņem, ka F ir n-dimensiju sadalījuma funkcija ar marginālajām funkcijām $F_1,...,F_n$, tad eksistē tāda n-kopula C, ka visiem $y \in R^n$ izpildās

$$F(y) = C(F_1(y_1),\ldots,F_n(y_n)) \quad . \tag{2.1}$$

Ja visas marginālās funkcijas $F_1,...,F_n$ ir nepārtrauktas, tad šāda kopula C ir vienīgā.

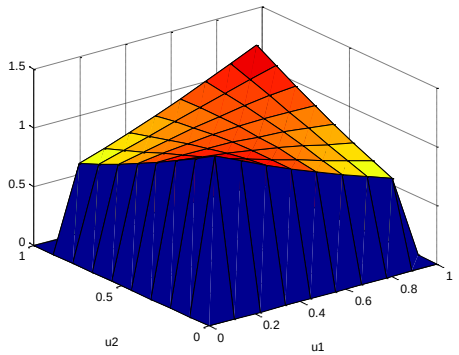
Un otrādi, ja C ir n-kopula un $F_1,...,F_n$ ir sadalījuma funkcijas, tad funkcija F, kas definēta ar vienādojumu (2.1), ir n-dimensiju sadalījuma funkcija ar marginālajām funkcijām $F_1,...,F_n$. [37].

<u>Sklara teorēma divdimensiju gadījumā [37]</u>:

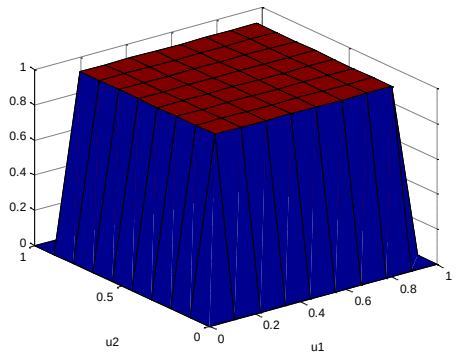
pieņem, ka X un Y ir divi gadījuma lielumi ar kopējo sadalījuma funkciju F. Ja F_X un F_Y ir nepārtrauktas marginālas funkcijas, atbilstoši no X un Y, tad eksistē vienīgā tāda kopula C, kur $F(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$.

Balstoties uz Sklara teorēmu, ar kopulas funkcijas palīdzību vienmēr var modelēt jebkuru daudzdimensiju sadalījumu, modelējot tā marginālā sadalījuma funkcijas un tā kopulas funkciju atsevišķi, kur kopula ietver sevī visas iespējamās atkarības, neraugoties uz daudzdimensiju sadalījuma mērogu.

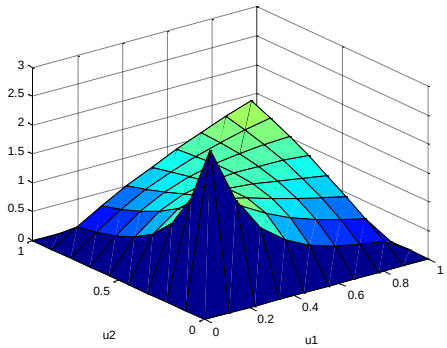
Franka kopula



Gumbeļa kopula



Kleitona kopula



2.18. att. Arhimēda tipa kopulu piemēri, kas visbiežāk sastopami finanšu jomā.

Turpmāk darbā izmantotas vienparametra Arhimēda tipa kopulas – Kleitona, Gumbeļa un Franka, kuras ļauj modelēt asimetriskos sadalījumus, kā arī ņemt vērā smago astu efektus. Kā zināms, šāda veida sadalījumi ļoti bieži vērojami dažādu finanšu tirgus aktīvu dinamikā.

2.2. Neparametrisko regresiju modeļu nostādne

Nelineārās laikrindas identificēšanas iespēja, izmantojot nosacītās vidējās vērtības un nosacītās dispersijas neparametriskos novērtējumus, ir minēta vairākās publikācijās (skat., piemēram, [33]). Parasti analizē stacionāro laikrindu $\{x_t, t \in Z\}$ regresīvo modeļu atkarības struktūru, kas ir noteikta ar invariantu marginālo sadalījumu un kopulas funkciju, kas ģenerē procesa atkarību laikā. Kā norādīts [33], tas ļauj nodalīt laika atkarību (piemēram, "astes" atkarību) no laikrindu marginālā sadalījuma uzvedības (piemēram, "smagās astes"). Vēl viena šī veida regresīvās metodes priekšrocība ir iespēja piemērot varbūtību teorijas robežteorēmu pārejai no diferenču vienādojuma uz nepārtraukto laika stohastisko diferenciālvienādojumu ([34], [35]).

Šajā darbā kopulu klase pētīta, pamatojoties uz neparametrisko, stacionāro Markova modeli skalāra diferenciālvienādojuma formā:

$$t \in Z : X_t = X_{t-1} + \varepsilon f(X_{t-1}, \varepsilon) + \varepsilon g(X_{t-1}, \varepsilon)\xi_t \qquad (2.2)$$

kur $\{\xi_t, t \in Z\}$ ir i.i.d. N(0,1), un ε ir neliels pozitīvs parametrs, kas tiks izmantots regresijas (2.2) difūzijas aproksimācijai. Regresija (2.2) bieži tiek pielietota imitāciju veikšanai un stohastiskā svārstību modeļa [33] parametru novērtēšanai. Bet, diemžēl, Markova ķēde, kas ir noteikta ar vienādojumu (2.2), nav kompakta fāzes telpā, un tas apgrūtina varbūtību teorijas robežteorēmu pielietošanu. Kopulas metodes palīdz vienkāršot vienādojuma (2.2) asimptotisko analīzi.

Atzīmēsim, ka, lai uzbūvētu kopulu *C(u; v)* pārim $\{X_{t-1}, X_t\}$ no vienādojuma (2.2), ir nepieciešams atrast X_t marginālo invariantu sadalījumu *F(x)* un ievietot to jauktā sadalījuma funkcijā $H(x, y) = P(X_{t-1} \le x, X_t \le y)$, kur $C(u, v) = H(F^{-1}(u), F^{-1}(v))$ un $H(x, y) = C(F\ (x), F\ (y))$. Ņemot vērā mazo parametra ε vērtību, pēc $U_t = F(X_t)$

aizvietošanas vienādojumā (2.2) par turpmāku difūzijas aproksimāciju var uzskatīt diferenču vienādojumu tādā pašā formā kā (2.2):

$$t \in Z : U_t = U_{t-1} + \varepsilon f(U_{t-1}, \varepsilon) + \varepsilon g(U_{t-1}, \varepsilon)\xi_t \quad . \tag{2.3}$$

Bet tādā gadījumā šis vienādojums ir noteikts kā Markova ķēde, kas atrodas kompaktā [0,1], ļaujot vieglāk formulēt pārejas varbūtības uzbūvi un turpmāk iegūt funkciju $\hat{f}(u)$, kā arī $\hat{g}(u)$ novērtējumus.

Pēc vienādojuma (2.3) difūzijas aproksimācijas ir iespējams veikt inverso aizvietošanu un iegūt stohastisko vienādojumu, kā vienādojuma (2.2) difūzijas aproksimāciju.

2.3. Uz kopulām bāzēto algoritmu aprakstīšana

Kā jau minēts, izmantojot kopulu pieeju viendimensiju laikrindu modelēšanā, tās galīgo dimensiju sadalījumi tiek ģenerēti ar kopulu palīdzību.

Pateicoties dažādu kopulu funkciju marginālo sadalījumu savienojumam, uz kopulām bāzēti autoregresiju procesi palīdz modelēt ne tikai plašu marginālās uzvedības spektru, bet arī tādas savstarpējo atkarību īpašības, kas raksturīgas klasteriem, kā arī pozitīvai vai negatīvai sadalījuma "astes" atkarībai (skat. [33] un [53]).

Aprakstītais algoritms ļauj aprēķināt kopulas parametrus, kuri vislabāk atbilst iepriekš izvēlētajam modelim. Kopulas atkarības struktūras noteikšanai izmantota programpakete *Matlab,* kas palīdz aprēķināt kopulas parametrus un izvēlēties noteiktiem finanšu tirgus datiem piemērotāko kopulu klasi, kas ir bāzēta uz ticamības novērtējumu. Minētie uz kopulām bāzētie modeļi ir viegli imitējami, un tos var izteikt kā neparametriskos regresijas transformācijas modeļus. Līdz ar to, izmantojot *Matlab,* veikta VIX indeksa imitācija – tika atrasta vislabākā kopulu atbilstība dotajiem nosacījumiem, kā arī iegūta parametriskā autoregresija.

Uz kopulām bāzētos neparametriskos modeļus raksturo ar nosacīto heteroskedastiskumu un bieži tos lieto mainīgo statistisko datu modelēšanā. Rakstā [42] pamatideja bija pielietot lokālo lineāro regresiju atlikumu kvadrātiem, lai atrastu nezināmās funkcijas ***f*** un ***g***.

Pieņemsim, ka $\{Y_t\}$ ir pirmās kārtas Markova process ar nepārtrauktiem stāvokļiem. Tad šī procesa varbūtējās īpašības tiek pilnīgi noteiktas ar jaukto sadalījuma funkciju $\{Y_{t-1}\}$ un $\{Y_t\}$. Un uz kopulām bāzētā modeļa noteikšanai var izmantot Markova diferenču modeli formā (2.2), kur

$$E\xi_t = 0, D\xi_t = 1 \quad \{\xi_t, t\epsilon Z\}\ ir\ i.i.d\ N(0,1).$$

Tad parametru noteikšanas uzdevums reducējas uz nosacīto (pirmās un otrās kārtas) momentu, kuri būs mūsu pamatregresijas modeļa parametri, aprēķinu:

$$g(X_{t-1},\varepsilon)-?\ \text{un}\ f(X_{t-1},\varepsilon)-?$$

Kā minēts iepriekš, tas nav viegls uzdevums, it īpaši tādēļ, ka šī reprezentācija sarežģī varbūtību teorijas robežteorēmu pielietošanu. Līdz ar to, pieņemot, ka sadalījums ir stacionārs, tiek piedāvāts atrast parametrus no Markova ķēdes, izmantojot kopulas.

Pirmkārt, pierādīsim, ka kopulas sadalījuma blīvums ir vienāds ar Markova ķēdes pārejas varbūtību blīvumu:

$$P(X_{t-1} \le y) = F(y) = \int_{-\infty}^{y} p(z)dz$$

$$P(X_{t+1} \in A / X_t) = P(X, A) = \int_A p(x,y)dy$$

$$P(X_{t+1} \in A, X_t \in B) = \int_A p(z,A)dz = \iint_{AB} p(z,y)p(z)dzdy = \int P(x,A)dF(x) =$$
$$= \iint_{BA} p(x,y)p(z)dF(x)dy$$
$$C(F(y),F(x) = P(X_{t+1} \le y, X_t \le x) = \iint p(z,u)p(z)dzdu$$

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 C(F(y),F(x))}{\partial x \partial y} p(y)$$

Rezultātā redzam, ka Markova pārejas blīvums ir vienāds ar kopulas blīvumu.

Nākamais solis būtu izvirzīt neparametrisko regresiju Teilora rindā:

$$F(X_t) = F(X_{t-1}) + F^{'}(X_t)\varepsilon f(X_{t-1},\varepsilon) + F^{'}(X_t)\varepsilon g(X_{t-1},\varepsilon)\xi_t \ldots \tag{2.4}$$

Izmantojot mazā parametra ε nepārtrauktību, ir iespējams pārrakstīt izteiksmi (2.4) šādā veidā:

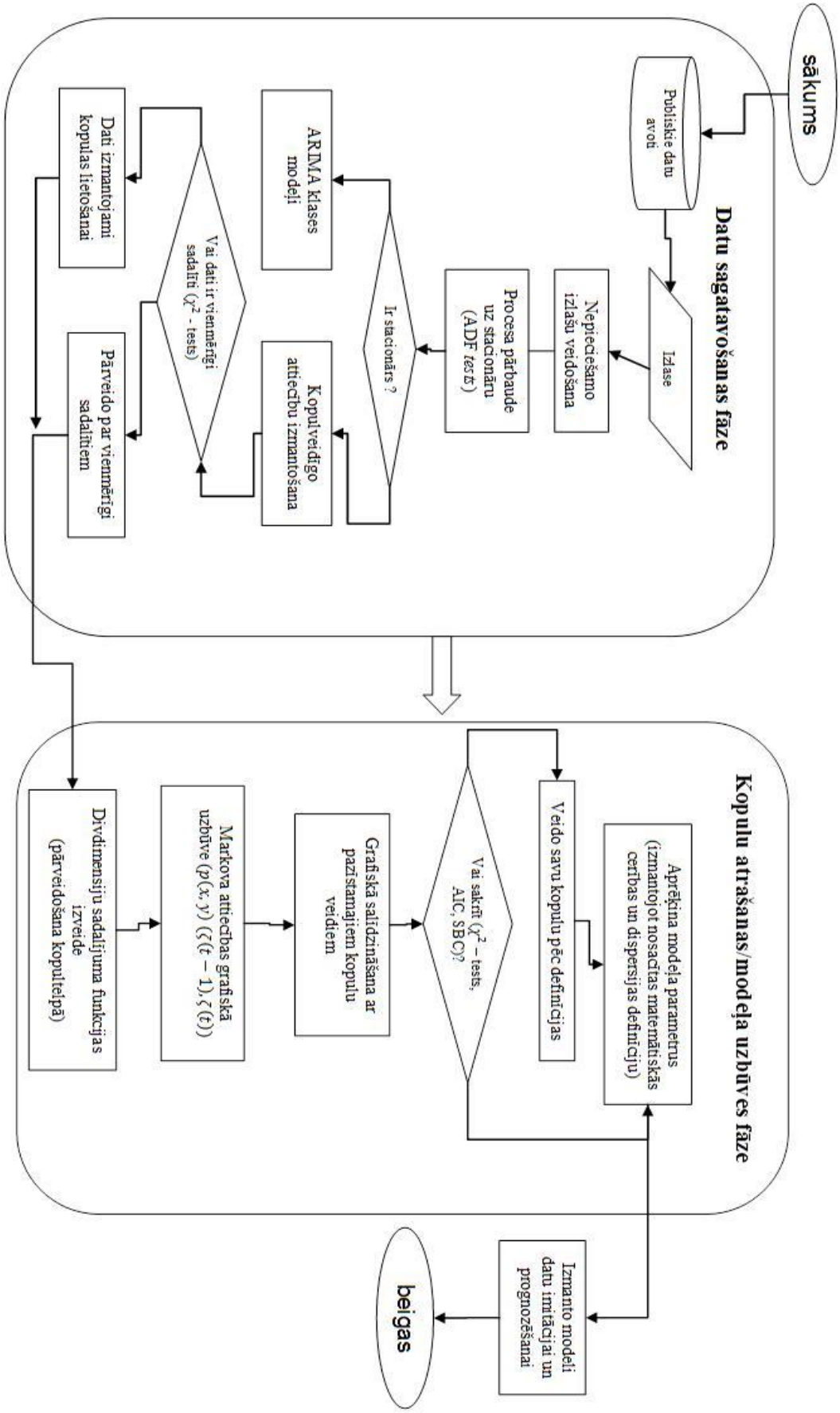
$$t \in Z : U_t = U_{t-1} + \varepsilon f(U_{t-1}, \varepsilon) + \varepsilon g(U_{t-1}, \varepsilon)\xi_t$$

$$f(U_{t-1}, \varepsilon) = E(U_t \mid U_{t-1} = u) - ? \tag{2.5}$$

$$g(U_{t-1}, \varepsilon) = E((U_{t-1} - f(U_{t-1}, \varepsilon))^2 \mid U_{t-1} = u) - ? \tag{2.6}$$

Pēc nosacītās matemātiskās cerības (2.5) un (2.6) novērtēšanas veicam inverso aizvietošanu un iegūstam vienādojumu (2.3), kuru turpmāk var aproksimēt ar stohastisko diferenciālvienādojumu. Protams, šis algoritms darbojas tikai pie nosacījuma, ka eksistē inversā funkcija. Piemēram, Gumbeļa kopulai, kurai nav standarta inversās funkcijas, pielietot šo algoritmu būtu sarežģīti.

Līdz ar to ir iegūts algoritms (2.3) modeļa parametru novērtēšanai. Lai īsi aprakstītu mūsu ideju, nākamajā sadaļā parādīts, kā minētais nosacīto matemātisko cerību algoritms darbojas ar reāliem tirgus datiem.



2.19. att. Kopulveidīgas regresijas konstruēšanas algoritms

2.4. Piedāvātā algoritma praktiskā pielietošana

Balstoties uz 2.19 attēlā izveidoto blokshēmu, analizēsim *VIX* – tirgus svārstīguma indeksa – ikdienas datus no 2007. gada 31. marta līdz 2011. gada 10. decembrim. *VIX* ir finanšu tirgus mehānisms, kas mēra S&P500 indeksa nākotnes sagaidāmo svārstīgumu (30-dienu garumā). Iespēja saturīgi interpretēt *VIX* indeksa kustības un tā reakciju uz tirgus notikumiem var dot investoriem noderīgu instrumentu investīciju portfeļa risku vadībai un ienesīguma palielināšanai, kā arī portfeļa pārvaldīšanas stratēģijas izveidošanai, izmantojot atvasinātos finanšu instrumentus *VIX* indeksam. Šie atvasinātie finanšu instrumenti tiks precīzāk novērtēti, ja būs novērtētas laikā mainīgās korelācijas starp *VIX* un *S&P500* indeksiem.

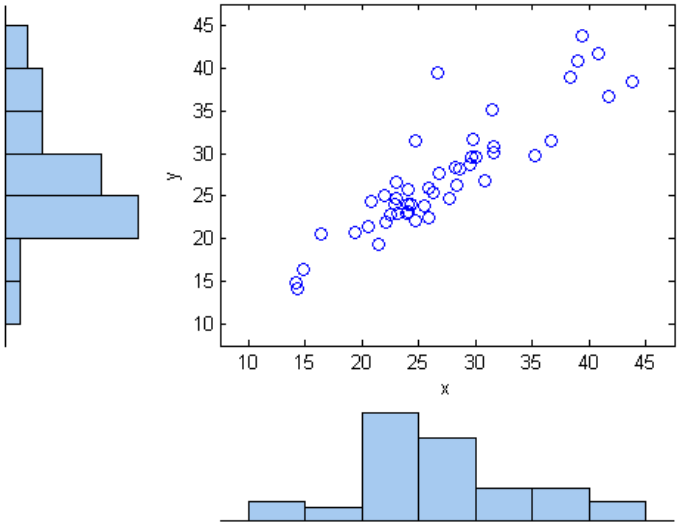
Izveidosim *VIX* indeksam neparametrisko kopulas bāzes modeli, izmantojot *AIC* un *BIC* kritērijus [6]. (*AIC* - Akaike informācijas kritērijs vispārīgi ir *AIC* = 2k − 2ln(L), kur k ir parametru skaits statistiskajā modelī, L ir statistiskā modeļa parametru funkcijas maksimālā vērtība. No visiem modeļiem, kas attiecināti uz konkrēto laikrindu, tiek izvēlēts tas modelis, kuram *AIC* vērtība ir vismazākā. *BIC* - Beijesa informācijas kritērijs vai Švarca kritērijs (*SBC, SBIC*) ir statistiskais kritērijs piemērotākā modeļa izvēlei kādai konkrētai laikrindai, tas ir radniecisks Akaike informācijas kritērijam (*AIC*): $BIC = \ln(\sigma_\varepsilon^2) + kln(n)$, kur σ_ε^2 ir dispersijas kļūda, n –izlases apjoms un k - parametru skaits statistiskajā modelī).

2.4.1. Kopulas izvēle Markova modeļa konstruēšanai *VIX* indekss datiem

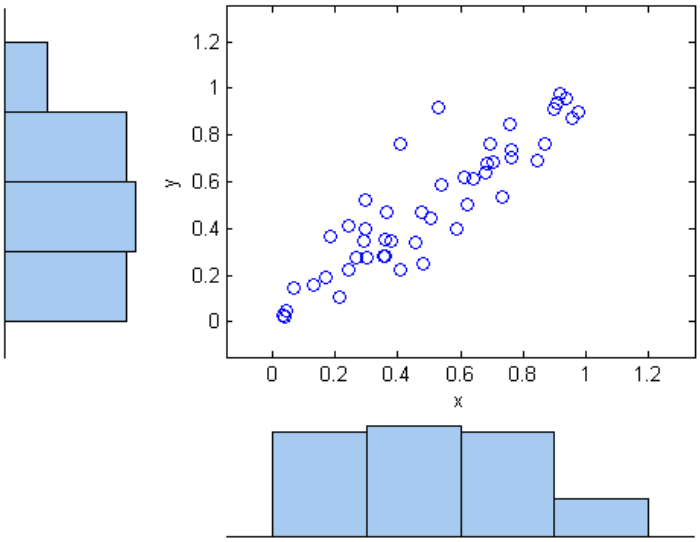
Visvieglākais veids *VIX* indeksa neparametriskās regresijas koeficientu noteikšanai ir šāds algoritms (2.19.attēlā „Datu sagatavošanas fāzē” pēc *ADF* testa un „Kopulu atrašanas/modeļa uzbūves fāze”, kā arī 2.1.attēlā sarkanā taisnstūrī) :

- imitēt U_t punktus, kuri ir R[0,1] (vienmērīgi sadalīti) vai transformēt jau eksistējošo piemēru uz R[0,1];
- izveidot izkliedes grafiku priekš (U_{t-1}, U_t);
- veikt dažus statistiskus testus, lai atrastu piemērotu datu sadalījumu;
- ņemot vērā izkliedes grafiku un datu sadalījumu, mēģināt izvēlēties kopulu no eksistējošajām klasēm vai izveidot savu kopulu, ja ir zināmi marginālie sadalījumi;
- testēt kopulas atbilstību datiem (piemēram, *AIC* un *BIC*);
- atrast neparametriskās regresijas parametrus.

Izmantojot *Matlab*, tika izveidoti izkliedes grafiki *VIX* indeksam, gan netransformētajiem datiem, gan datiem, kas tika transformēti vienmērīgajā sadalījumā (R[0,1]).



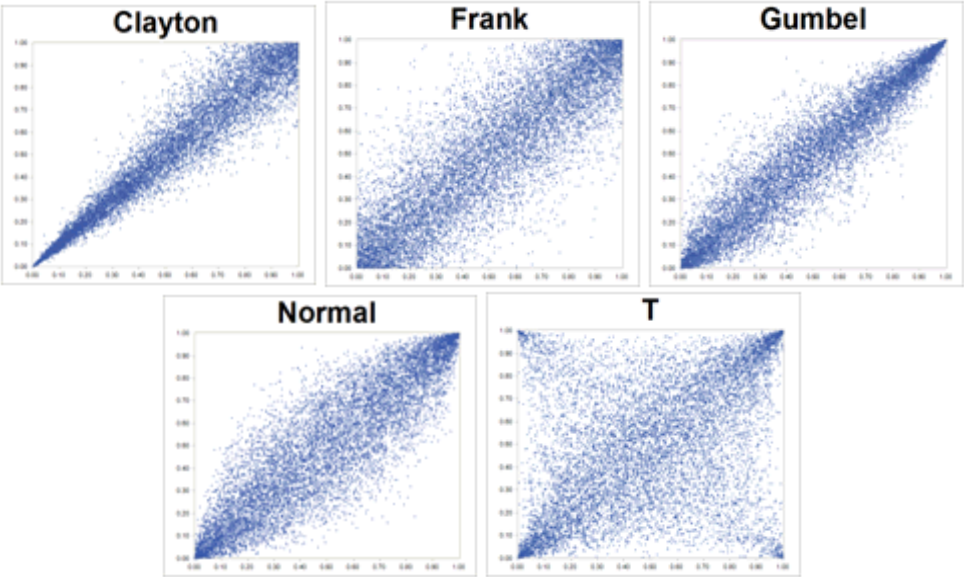
2.20. att. Izkliedes grafiks netransformētajiem uz R[0,1] *VIX* indeksa datiem ar vienu lagu.



2.21. Izkliedes grafiks transformētajiem R[0,1] *VIX* indeksa datiem.

Svarīgs jautājums, ar ko nākas saskarties, ja ir interese izmantot uz kopulām bāzētus neparametriskos modeļus, ir attiecīgās parametriskās kopulas izvēle. Dažādos rakstos (piem., [54]) tiek piedāvāti divi vienkārši testi parametriskās kopulas korektas specifikācijas veikšanai, lai noteiktu vienlaicīgas atkarības starp vairākām viendimensiju laikrindām un viendimensiju *GARCH* modeļu jauninājumiem

modelēšanas kontekstā, kurus izmanto katras viendimensiju laikrindas filtrēšanai. *Chen* and *Fan* [45] izveidojuši pseudo-ticamas attiecības testus parametriskās kopulas modeļa izvēlei daudzdimensionāliem, vienādi sadalītiem novērojumiem. Bet mūsu piedāvātā metode ir vienkāršāka –lietderīgāk izvēlēties vislabāko kopulas atbilstību, izmantojot *AIC* un *BIC* kritērijus vai izmantojot χ^2 testu datu sadalījumam. Zemāk apskatīts dažādu kopulu salīdzinājums.



2.22. att. Izplatītākie kopulas blīvumi finansēs.

Pirmajā piemērotās kopulas izvēles solī vajadzētu salīdzināt grafiskās parametriskās kopulas ar *VIX* datu izkliedes grafiku (2.21.attēls). Kā redzams zīmējumā, *VIX* datiem vispiemērotākās kopulas ir Gumbeļa, Franka un Normālā. Visām trim kopulām ir lietderīgi aprēķināt *AIC* un *BIC* kritērijus.

AIC un *BIC* kritēriji *VIX* indeksa datiem 2.1.tabula .

Kopula	***AIC***	***BIC***
Gumbeļa kopula	-124,1	-119,3
Franka kopula	-267,4	-261,5
Normālā kopula	-230,3	-227,9

Ņemot vērā *AIC* un *BIC* kritērijus, tālākajai modeļa izveidošanai izvēlēsimies Franka kopulu.

2.4.2. Neparametriskās regresijas koeficientu meklēšana

Tagad vajadzētu noskaidrot neparametriskās regresijas parametrus, izmantojot Franka kopulu:

$$C(u_{t+1},u_t) = -a^{-1}\ln(1+\frac{g_{u_{t+1}}g_{u_t}}{g_1}),\ g_{ut} = e^{-au_t} - 1 \qquad (2.7)$$

Ievietojot izteiksmi (2.7) nosacītajā matemātiskajā cerībā, iegūsim nepieciešamos parametrus:

$$E(U_{t+1} \mid U_t = u) = \int_0^1 u_{t+1}\, dF_{u_{t+1}|u_t}(u) = \int_0^1 u_{t+1}\, p(u_{t+1} \mid u_t)\, du_{t+1} = \int_0^1 u_{t+1} \frac{\partial C(u_{t+1}, u_t)}{\partial u_{t+1} \partial u_t} du_{t+1} = \int_0^1 u_{t+1}\, c(u_{t+1}, u_t)\, du_{t+1} =$$

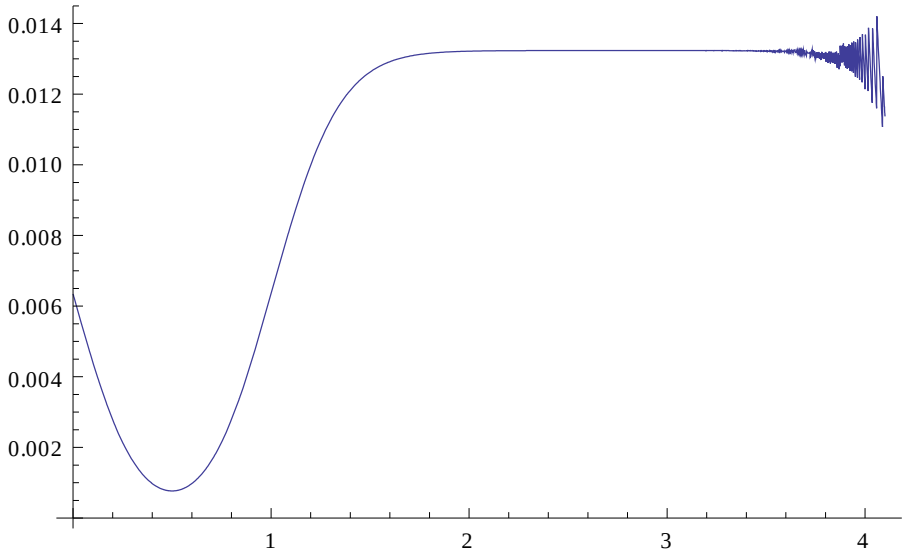
$$= -a \int_0^1 u_{t+1} \frac{g_1\left(1 + g_{u_t + u_{t+1}}\right)}{\left(g_{u_t} g_{u_{t+1}} + g_1\right)^2} du_{t+1} = \frac{e^{au_t}\left(\left(e^a - 1\right)\left(\ln\left(e^{au_t}\left(e^a - 1\right)\right) - \ln\left(e^a\left(e^a - 1\right)\right)\right) + a\left(e^a - e^{au_t}\right)\right)}{a\left(e^{au_t} - 1\right)\left(e^a - e^{au_t}\right)} \tag{2.8}$$

$$g((U_{t+1} \mid U_t = u) = E((U_{t+1} - f(U_t)^2 / U_t = u) = \int_0^1 (U_{t+1} - f(U_t)^2 c(U_{t+1}, U_t)\, dU_{t+1} =$$

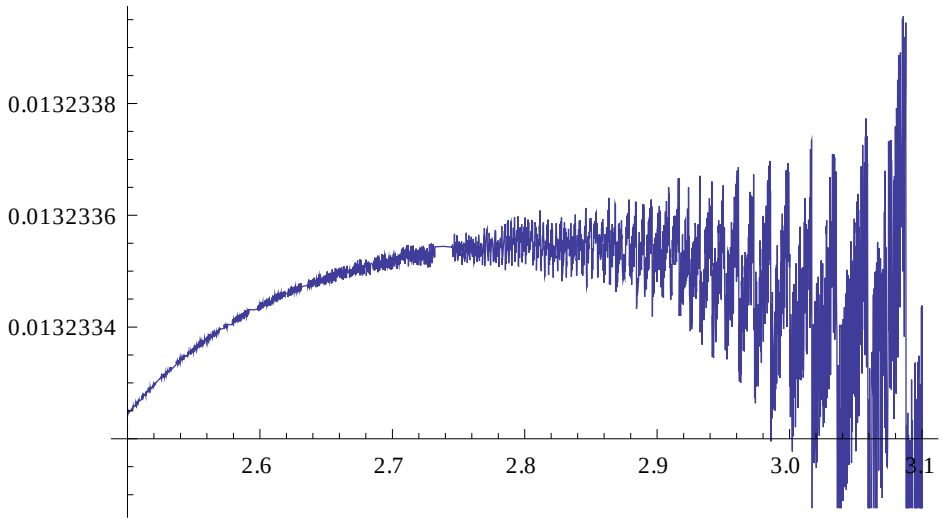
$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\alpha \ln(t) - \frac{\alpha \ln(t)\,(\exp(\alpha) - 1)}{\left(1 - \frac{1}{t}\right)(\exp(\alpha) - t)} + \frac{t}{\exp(\alpha) - t}\right)^2 \frac{(1 - \exp(-\alpha))\exp(-\alpha u_t)\frac{1}{t}}{\left(1 - \exp(-\alpha) - \left(1 - \frac{1}{t}\right)(1 - \exp(-\alpha u_t))\right)^2} dt \tag{2.9}$$

kur $t = \exp(U_{t+1})$.

Izteiksmes (2.8) un (2.9) nav iespējams aprēķināt analītiski, bet skaitliskā veidā tas ir paveicams, piemēram, ar *Matlab* vai *Mathematica* palīdzību. Franka kopulai var izmantot inverso funkciju, ar mērķi atgriezties pie pamatvienādojuma (2.3). Jāatzīmē, ka integrāli (2.9) aprēķināt nav izdevies, jo tas diverģē punktā 0. Tomēr, izmantojot *Mathematica* programpaketi, iespējams uzzīmēt izteiksmes (2.9) vērtības. Kā redzam 2.23. attēlā, mūs interesējošajā intervālā (0,1) vienādojums (2.9) ir nelineārs. Tieši šis otrais moments papildina definēto neparametrisko regresiju ar nelineāro locekli. Turklāt 2.24.attēlā redzams, ka otrais moments diverģē, sākot ar vērtību 1, bet vizuāli manāmas diverģences pazīmes parādās pēc U_t vērtības, kas vienāda ar 2,7 (skat. 2.pielikumu).



2.23. att. Otrā momenta dinamika, mainoties U_t intervālā $[0{,}001; 4]$ ar parametru $\alpha = 8{,}68$.



2.24.att. Otrā momenta dinamika, mainoties U_t intervālā $[2{,}1; 3{,}1]$ ar parametru $\alpha = 8{,}68$.

Ņemot vērā (2.8) un (2.9) iegūtos rezultātus, var sastādīt meklējamo vienādojumu:

$$t \in Z : U_t = U_{t-1} + f(U_{t-1}, \varepsilon) + g(U_{t-1}, \varepsilon)\xi_t =$$
$$= U_{t-1} + \frac{e^{au_t}\left(\left(e^a - 1\right)\left(\ln\left(e^{au_t}\left(e^a - 1\right)\right) - \ln\left(e^a\left(e^a - 1\right)\right)\right) + a\left(e^a - e^{au_t}\right)\right)}{a\left(e^{au_t} - 1\right)\left(e^a - e^{au_t}\right)} +$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\alpha\ln(t) - \frac{\alpha\ln(t)\,(\exp(\alpha)-1)}{\left(1-\frac{1}{t}\right)(\exp(\alpha)-t)} + \frac{t}{\exp(\alpha)-t}\right)^2 \frac{(1-\exp(-\alpha))\exp(-\alpha u_t)\frac{1}{t}}{\left(1-\exp(-\alpha)-\left(1-\frac{1}{t}\right)(1-\exp(-\alpha u_t))\right)^2} dt\xi_t$$

kur $t = \exp(U_{t+1})$.

Protams, ja gribam šo modeli izmantot praksē, ir ļoti svarīgi salīdzināt dažādu klašu modeļus, kuri varētu saderēt ar iegūtajiem datiem.

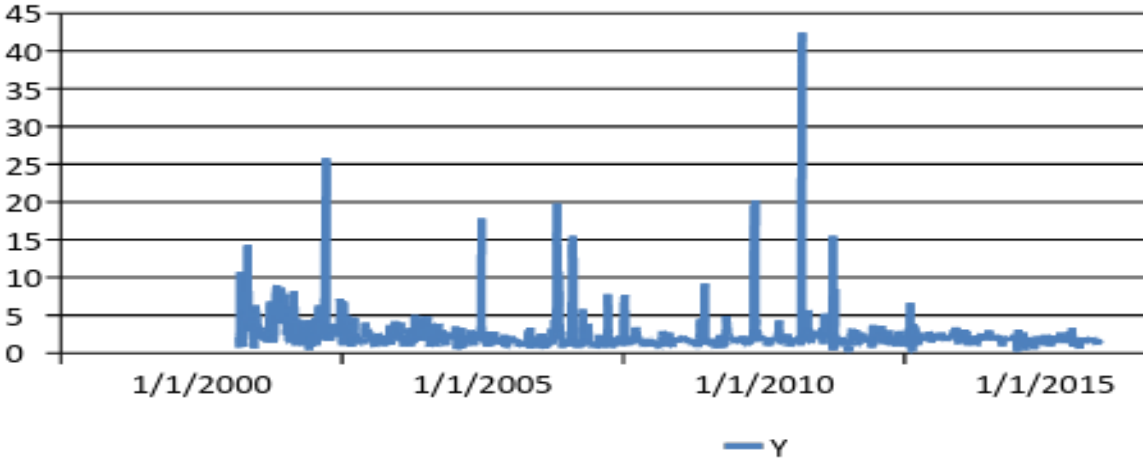
Bet ja darbojamies ar kopulām, vajadzētu ievērot dažus faktus. Piemēram, var būt apgrūtinoši pamatot dotajai datu izlasei vispiemērotāko kopulu, jo dažas no tām var atbilst datiem tuvāk centram, savukārt citas – datiem tuvāk „astēm". Turklāt daudzām kopulām nav momentu, kuri tieši atbilstu Pīrsona korelācijai, līdz ar to uz kopulām balstītie modeļus ir grūti salīdzināmi ar finanšu modeļiem, kas tika izveidoti, pamatojoties uz korelāciju.

2.4.3. Gadījuma procesa noteiktās robežas sasniegšanas laika sadalījuma imitēšanas algoritms

Kopulu un kopulveidīgo regresijas uzbūves algoritmu izmantošana paver iespējas atrast gadījuma rakstura procesus ne tikai finanšu jomā, bet arī pārējā tautsaimniecībā, piemēram, šī promocijas darba ietvaros ir izstrādāts algoritms, ar kura palīdzību iespējams izveidot imitācijas modeli enerģētikā, kas ļautu veidot iekārtu maksimālās noslodzes algoritmus. Šajā gadījumā modelējam procesa noteiktās robežas sasniegšanas laika sadalījuma imitēšanas algoritmu.

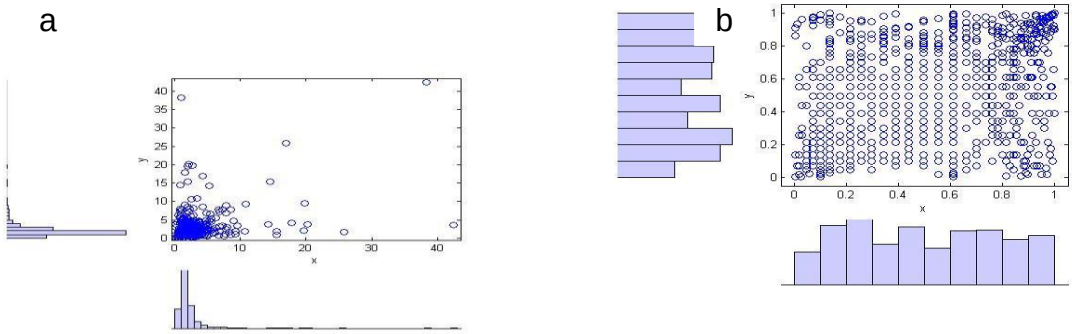
Tādējādi darba ietvaros analizēti vēsturiskie iekārtu parametru darbības novērojumi (skat. Y līniju 2.25 .attēlā). Lai iekārtas strādātu efektīvi un būtu agrīni signāli par iespējamiem traucējumiem nākotnē, var noteikt līmeni, pēc kura ir jēga uzsākt primitīvas darbības. Rezultātā vēlamies nodrošināt stabilu iekārtu darbību, ko raksturo maza svārstīguma procesi, bet reālajā dzīvē, atkarībā no laika apstākļiem parametru vērtības var būtiski atšķirties. Tieši tādēļ mūsu ideja ir imitēt šo parametru iespējamās novirzes. Līdz ar to promocijas darba mērķis ir noteikt limitu atļautajām novirzēm un atrast algoritmu, kas imitētu šo definēto līmeni. Ir skaidrs, ka mums ir darīšana ar heteroskedastiskajiem procesiem. Šī augstākminētā procesa Y modelēšanā var lietot ARIMA-GARCH pieeju, bet kopulu izmantošana procesa modelēšanā akcentē tieši kritisko momentu (reto notikumu) īpatsvaru.

Līdz ar to tika veikta kopulveidīgas regresijas meklēšana Y laikrindai, ar mērķi veidot imitāciju noteiktas parametra vērtības iegūšanai vai noteiktas robežas sasniegšanai. Izpētes nolūkā izmantoti ikdienas novērojumi no 31.12.2000. līdz 31.12.2015.



2.25. att. Novērojumu Y laikrinda.

Savukārt kopulas meklēšana procesam Y veikta, balstoties uz 2.4.1.sadaļā aprakstītā algoritma. Izmantojot *Matlab* programmu, iegūti blīvuma funkcijas zīmējumi.



2.26. att. (a) Divdimensiju blīvuma funkcijas zīmējums Y datiem (netransformētie uz R[0;1]); (b). Divdimensiju blīvuma funkcijas zīmējums uz R[0;1] transformētiem Y datiem.

Kā redzams 2.26. attēlā (a), laikrindai Y ir "izlēcēji", kas padara marginālo sadalījumu meklēšanas uzdevumu īpaši sarežģītu. Balstoties uz Kolmogorova-Smirnova testu, tika veikta dažādu statistisko sadalījumu pārbaude (skat. 3.pielikumu). Rezultātā labākais no pielietotajiem sadalījumiem izveidots kā jauktais sadalījums – viena datu daļa ir labi aprakstāma ar eksponenciālo sadalījumu un otra – ar vienmērīgo.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \; x < T \\ H(x - T) + e^{-\lambda T}, \; T_1 < x < T \end{cases},$$

$$H = \frac{e^{-\lambda T_1}}{T - T_1},$$

kur T laikrindas lielums un T_1 ir laikrindas lielums bez ”izlēcējiem”.

Līdz ar to, ņemot vērā uzbūvēto marginālo sadalījumu, Y laikrindas dati transformēti vienmērīgā sadalījumā (R[0;1]). Kā zināms, svarīgs posms šajā pētījumā ir izvēlēties datiem atbilstošu kopulu. Šī projekta ietvaros tika izvēlētas standartizētās kopulas – Gumbeļa, Franka, Normālā un T. Dažādos rakstos minēti vairāki paņēmieni, kā pārbaudīt kopulas atbilstību datiem – *AIC* un *BIC* kritēriji, χ^2-kritēriji un Kolmogorova – Smirnova distance. Primārā kopulas izvēle veikta, balstoties uz Kolmogorova – Smirnova testu. (skat. 2.2.tabulu un 3.pielikumu)

Kolmogorova – Smirnova tests (*KS distance-* D_{KS}) 2.2. tabula

Kopula	**KS vērtība**
Franka kopula	0.67
Gumbeļa kopula	0.65
Normālā kopula	0.18
T kopula	0.7

$$D_{KS} = \max_{i,j} \left| C_n(U_{1,i}, U_{2,j}) - C_\theta(U_{1,i}, U_{2,j}) \right|$$

$C_n(U_{1,i}, U_{2,j})$ - izlases kopula un $C_\theta(U_{1,i}, U_{2,j})$ -teorētiskās kopulas.

Ņemot vērā KS testa rezultātus, secinām, ka vislabākā kopula Y laikrindai ir normālā kopula, kura faktiski veido lineāru sakarību starp gadījuma lielumiem. Savukārt dotajā pētījumā svarīgi ir imitēt retos Y laikrindas lēcienus, kuri signālizē par iespējamiem iekārtu traucējumiem. Lai īstenotu tieši šo prasību, ir jāņem kopula, kas apraksta asimetrisko atkarību, tātad Gumbeļa kopula. Balstoties uz šo kopulu, atrodam neparametriskās regresijas koeficientus (funkcijas) f un g. Gumbeļa kopula ir dota šādā veidā (parametrs θ atrasts no datiem kopā ar KS testu):

$$C(U_{t+1}, U_t) = \exp\left[\left((-\ln U_{t+1})^\theta + (-\ln U_t)^\theta\right)^{1/\theta}\right], \quad \theta = 1{,}2847$$

ievietojot šo blīvumu nosacīto momentu formulās, iegūstam:

$$E(U_{t+1} \mid U_t = u) = \int_0^1 u_{t+1}\, dF_{u_{t+1}|u_t}(u) = \int_0^1 u_{t+1}\, p(u_{t+1} \mid u_t)\, du_{t+1} = \int_0^1 u_{t+1} \frac{\partial C(u_{t+1}, u_t)}{\partial u_{t+1} \partial u_t} du_{t+1} = \int_0^1 u_{t+1}\, c(u_{t+1}, u_t)\, du_{t+1}$$

$$g(U_{t+1} \mid U_t = u) = E\left((U_{t+1} - f(U_t))^2 \mid U_t = u\right) = \int_0^1 (U_{t+1} - f(U_t))^2 c(U_{t+1}, U_t)\, dU_{t+1}$$

.

Parametru izteiksmes arī nav iespējams aprēķināt analītiski, bet skaitliski tas ir izdarāms, piemēram, ar *Matlab* vai *Mathematica* palīdzību. Gumbeļa kopulai nav izmantojama inversā funkcija, ar mērķi atgriezties pie pamatvienādojuma. Strādājot ar tāda veida kopulām, ir jāizmanto speciāli algoritmi, lai atgrieztos vajadzīgajā vienādojuma formā.

Turpmāk, lai izmantotu iegūto modeli, ir nepieciešams pārbaudīt tā atbilstību datiem salīdzinājumā arī ar pārējiem modeļiem. Bet, ņemot vērā nestacionāro datu raksturu (Y laikrinda), īpaši brīžos, kad ir novērojami lēcieni, klasiskā veidā *ARIMA* modeļi nav pielietojami un ar Gumbeļa kopulu atrasto neparametrisko modeli var aprobēt, izmantojot imitāciju.

Rezultātā 2.3.tabulā attēlots algoritms neparametriskās, kopulveidīgās regresijas uzbūvei, kas palīdz risināt gadījuma procesu imitācijas uzdevumus ar heteroskedastisku dabu. Šis algoritms ļauj imitēt heteroskedastiskus gadījuma procesus un atrast laika intervāla sadalījumu šo procesu noteiktas robežas sasniegšanai. Tas ir ļoti svarīgi enerģētikā (noteiktas robežas sasniegšana), piemēram, iekārtu darbībā, pasargājot tās no iespējamiem traucējumiem.

Zemāk secinājumos dots Y laikrindas imitācijas piemērs, izmantojot Gumbeļa kopulu.

Gadījuma procesa noteiktās robežas sasniegšanas laika imitācijas algoritms 2.3.tabula.

1. Marginālo sadalījumu konstruēšana

$$\{X_n\} \rightarrow \{Y_n = F(X_n)\}, Y_n \in [0,1];$$

$\{X_n\}$-novērojumu laikrinda, $\{Y_n\}$-marginālais sadalījums

2. Kopulas un to parametru atrašana

$$C(y, z) = P(Y_n \le y, Y_{n-1} \le z);$$

3. Neparametrisko regresiju novērtēšana, izmantojot kopulu:

$$\sigma^2(z) = m_2(z) - m^2(z); dz = m(z)dt + \sigma(z)dw(t)$$

$$m(z) = E(Y_n / Y_{n-1} = z) = \int_0^1 yp(y, z)dy$$

4. Iterācijas procedūras uzbūve t_n ar mazo parametru

$h = 0.01$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h^2 m(y(t_n)) + \xi_n \sigma(y(t_n))h, \ \ \xi_n \sim N(0,1) \quad (*)$$

$$x \in (0,\Gamma), X_0 = x, \tau(x,\Gamma) = \inf\{n > 0, X_n \geq \Gamma\} \Leftrightarrow$$

$$y(0) = F(x), \tau(x,\Gamma) = \inf\{t_n > 0, y(t_n) \geq F(\Gamma)\}$$

Γ –gadījuma robeža

⇓

5. Sadalījuma atrašana laikam $\tau(x,\Gamma)$ sasniegt robežu $X_n = \Gamma$ ar Montekarlo imitācijām $C(y,z) = P(Y_n \leq y, Y_{n-1} \leq z)$;

⇓

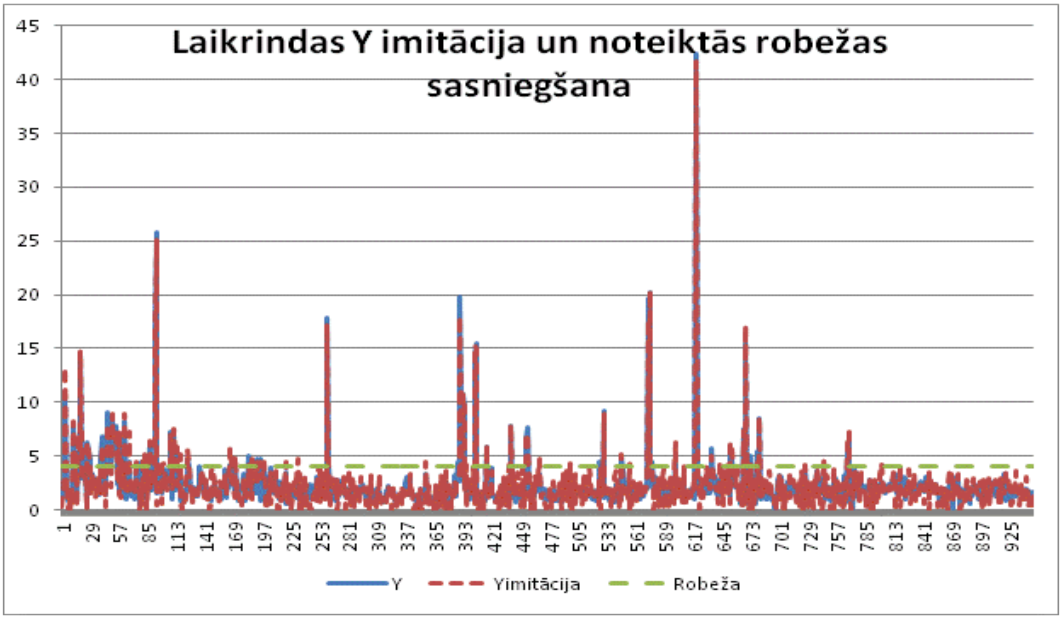
5.1. Veic iterācijas (* -vienādojums) **N reizes līdz $y(t_n) \geq F(\Gamma)$ un pēc katras iterācijas atceras $n^{(k)}$**

⇓

5.2. Konstruē histogrammu $\{n^{(k)}, k = 1,...,N\}$ un atrod sadalījumu

Secinājumi

Uzbūvējot algoritmu kopulveidīgajām regresijām un, ņemot vērā noteiktas robežas sasniegšanas laika imitācijas procedūru, kas aprakstīta 2.3.tabulā (soļi 1-4), tika modelēts process Y ar Gumbeļa kopulu un neparametrisko regresiju. Kā redzams 2.27.attēlā, mūsu modeļa imitācijas rezultāts ir tuvs laikrindas Y vērtībām. Būtībā mūsu imitācijas reaģē uz procesa svārstībām. Tas dod iespēju izmantot šo modeli laika sadalījuma novērtēšanai.



2.27. att. Vēsturiskās un modelētās (Y) vērtības energokompānijas iekārtu parametru darbībai.

Strādājot ar kopulām, nevajadzētu aizmirst dažus faktus. Piemēram, var būt apgrūtinoši pamatot, kura no kopulām būs vispiemērotākā dotajai datu izlasei, jo dažas kopulas var atbilst datiem tuvāk centram un citas kopulas – datiem tuvāk „astēm". Šī pētījuma ietvaros tika izvēlēta Gumbeļa kopula, jo mūs interesēja „izlēcēji" un ar tiem saistītā dinamika.

2.5 Kopulas meklēšana *GARCH(1,1)* modelim

Daudzos pētījumos par finanšu tirgus empīrisko vidi konstatēti lietišķi pierādījumi tam, ka laikrindas var svārstīties ar lielu amplitūdu un bieži būt homoskedastiskas. Balstoties uz šiem pētījumiem, ekonometristi izstrādājuši diskrēto stohastisko modeli – *GARCH*, kuru ļoti bieži izmanto finanšu laikrindu imitācijām un prognozēšanai. Bet dažreiz, strādājot ar finanšu tirgus datiem, grūtības rada datu atkarības novērtēšana, balstoties uz Pīrsona korelācijām. Šajā gadījumā viena no iespējām ir pārrakstīt *GARCH(1,1)* procesu Markova diferenču vienādojuma formā un, ņemot vērā, ka stacionārais *GARCH(1,1)* process ir sadalīts pēc inversā Gamma sadalījuma ([34]), parādās iespēja uzbūvēt kopulu priekš šāda veida atkarības un atrast parametrus nelineārajai laikrindai.

Lai īstenotu kopulu konstruēšanu, vienādojumu (2.3) pārrakstīsim Markova skalārā diferenču vienādojuma formā:

$$t \in Z : X_t = f(X_{t-1}) + g(X_{t-1})\xi_t \qquad (2.10)$$

kur $\{\xi_t, t \in Z\}$ ir vienādi sadalīta virkne N(0; 1).

Pēc substitūcijas $U_t = F(X_t)$ vienādojumu (2.10) var pārveidot diferenču vienādojumā, kura forma ir līdzīga vienādojumam (2.3):

$$t \in Z : U_t = \varphi(U_{t-1}) + \psi(U_{t-1})\xi_t \qquad (2.11)$$

Pēc vienādojuma (2.10) pārveidošanas vienādojumā (2.11), Markova ķēde ir kompakta uz [0, 1]. Tas atvieglo pārējo varbūtību konstrukciju, kā arī funkciju $\hat{f}(u)$ un $\hat{g}(u)$ novērtēšanu. Kā jau minēts iepriekš, pēc difūzijas aproksimācijas (2.11) ir iespējams veikt inverso substitūciju un iegūt (2.10), kuru savukārt var aproksimēt ar stohastisko diferenciālvienādojumu.

2.5.1. *GARCH(1,1)* modeļa pārveidošana

Galvenā ideja ir izstrādāt *GARCH(1,1)* modeļa svārstīgās daļas kopulas funkciju, darbojoties ar modeli pirmās kārtas diferenciālvienādojuma formā [34]:

$$\sigma_{t+1}^2 = w_h + \sigma_t^2[\beta_h + h^{-1}\alpha_{hh}Z_t^2] \qquad (2.12)$$

kur *h* ir mazs pozitīvs parametrs un citi apzīmējumi ar *h* indeksu nozīme atkarību no šī rādītāja, $\{{}_hZ_t^2, t \in Z\}$ ir vienādi sadalītu gadījuma lielumu virkne ar vidējo vērtību nulle un dispersiju $E\{{}_hZ_t^2\} = h$. Tad ir iespējams vienādojumu (2.12) pārrakstīt vienādojuma (2.10) formā.

Izmantosim apzīmējumus:

$$h = \varepsilon^2, x_t = \sigma_t^2 \quad \xi_t = \frac{{}_hZ_t^2 - 1}{\sqrt{2h}}$$

un pārrakstīsim vienādojumu (2.12) vienādojuma (2.10) formā ar precizitāti līdz otrās pakāpes ε-elementiem:

$$x_{t+1} = x_t + \varepsilon^2[w_h - \theta x_t] + \varepsilon\alpha\xi_t x_t, \qquad (2.14)$$

kur

$$E\xi_t = 0, D\xi_t = 1 \quad \{\xi_t, t \in Z\} i.i.d. N(0,1).$$

Lai veiktu turpmākos neparametriskos regresijas aprēķinus, var atcelt mazo parametru ε un apzīmēt $f(x_t) = x_t + [w_h - \theta x_t]$ $g(x_t) = \varepsilon\alpha\xi_t x_t$. Rezultātā iegūstam diferenču vienādojumu (2.10), kas raksturo *GARCH(1,1)* svārstīgumu. Uz kopulu balstītos neparametriskos modeļus raksturo nosacīta heteroskedastitāte, un tos bieži izmanto statistisko datu svārstīguma modelēšanai.

Mūsu piedāvātā metodoloģija ir būvēta uz pirmās un otrās pakāpes nosacītās matemātiskās cerības atrašanu [55].

Ja $\{X_t\}$ ir pirmās kārtas stacionārs Markova process, ar nepārtrauktu stāvokļu kopu, tad tā varbūtiskās īpašības tiek pilnīgi noteiktas ar $\{X_{t-1}\}$ un $\{X_t\}$ jaukto sadalījuma funkciju. Uz kopulu balstīto modeļu noteikšanai ir jāpielieto Markova modeļi skalārā diferenču vienādojuma formā (2.10).

Mūsu mērķis ir nosacīto momentu novērtēšana, kas ir bāzes regresijas modeļa parametri:

$$\varphi(X_{t-1}) = ? \text{ un } \psi(X_{t-1}) = ?$$

Tagad ir iegūti vienādojuma (2.10) modeļa parametru novērtēšanas instrumenti.

Tomēr galvenā problēma parametru novērtēšanai ir korektas kopulas atrašana, kas atbilstu tirgus datiem. Modeļa *GARCH(1,1)* uzbūvē var izmantot Nelsona [34] un Vonga [56] rezultātus, kas parāda, ka stacionārā *GARCH(1,1)* svārstīgumam ir inversais Gamma sadalījums:

$$F(z) = P(\sigma^2 < z) = 1 - \int_0^{1/z} \frac{s^r x^{(r-1)}}{\Gamma(r)} e^{-sx} dx, \text{ kur } r = 1 + 2\theta \text{ un } s = \frac{2w}{\alpha^2}$$

2.5.2. Nelineārās regresijas parametru noteikšana

Ņemot vērā iepriekš minētos rezultātus un iegūto vienādojumu (2.14), ir iespējams izstrādāt *GARCH(1,1)* svārstīguma modeļa kopulas funkciju. Šī kopula būs galvenais divu laika lagu stohastisko atkarību raksturotājs pirmās kārtas Markova procesam, kā arī nosacītās sadalījuma funkcijas daļa, kas ir nepieciešama neparametrisko regresijas koeficientu iegūšanai.

Tātad *GARCH(1,1)* kopula, kas balstīta uz Gamma sadalījumu, ņemot vērā noteiktos pieņēmumus par savstarpēju parametru attiecību, būs vienāda ar:

$$
\begin{aligned}
&C(u,v) = P(x_t \le F^{-1}(u), x_{t-1} \le F^{-1}(v)) = P(x_{t-1} + x_{t-1}(\alpha\ \xi_t - \theta) + \omega \le F^{-1}(u), x_{t-1} \le F^{-1}(v)) = \\
&= P(x_{t-1} + x_{t-1}(\alpha\ \xi_t - \theta) + \omega \le F^{-1}(u) / x_{t-1} \le F^{-1}(v)) P(x_{t-1} \le F^{-1}(v)) = \\
&= F(F^{-1}(v)) P(x_{t-1}(1 + \alpha\ \xi_t - \theta) \le F^{-1}(u-\omega) / x_{t-1} \le F^{-1}(v)) = vP(x_{t-1} \le F^{-1}(u-\omega) / x_{t-1} \le F^{-1}(v)) \times \\
&\times P((1 + \alpha\ \xi_t - \theta) \le F^{-1}(u-\omega) / x_{t-1} \le F^{-1}(v)) = / x_{t-1}, \xi_t - indepen./ = vP(x_{t-1} \le F^{-1}(u-\omega) / x_{t-1} \le F^{-1}(v)) \times \\
&\times P(\xi_t \le F^{-1}(\frac{u-\omega+\theta-1}{\alpha}) / x_{t-1} \le F^{-1}(v)) = / def.(u-\omega) \ge v / = vF(F^{-1}(\frac{u-\omega+\theta-1}{\alpha})) F(F^{-1}(v)) \times \\
&\times \frac{P(F^{-1}(v) \le x_{t-1} \le F^{-1}(u-\omega))}{P(x_{t-1} \le F^{-1}(v))} == v^2 (\frac{u-\omega+\theta-1}{\alpha}) \frac{F(F^{-1}(u-\omega)) - F(F^{-1}(v))}{F(F^{-1}(v))} = \\
&= v^2 (\frac{u-\omega+\theta-1}{\alpha}) \frac{(u-\omega)-v}{v} = \frac{v}{\alpha}(u-\omega+\theta-1)(u-\omega-v)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Kur $\alpha, \omega, v, \theta - parametri$

Un šīs kopulas blīvuma funkcija ir:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\alpha}(1 - \theta + \omega + v + 2u) \tag{2.16}$$

Tagad *GARCH(1,1)* svārstīguma procesam ir iegūta kopulas sadalījuma funkcija (2.15) un kopulas blīvuma funkcija (2.16), kā rezultātā ir iespējams atrast divu dimensiju sadalījuma funkciju $F(x_t, x_{t-1})$, blīvuma funkciju $f(x_t, x_{t-1})$ un atrast neparametriskās regresijas parametrus.

$$F(x_t, x_{t-1}) = F(x_t) F(x_{t-1}) \frac{1}{\alpha}(1 - \theta + \omega + v + 2u) \tag{2.17}$$

$$f(x_t, x_{t-1}) = f(x_t) f(x_{t-1}) \frac{1}{\alpha}(1 - \theta + \omega + v + 2u) \quad , \tag{2.18}$$

kur $F(x_t), F(x_{t-1})$ ir marginālā Gamma sadalījuma funkcija un $f(x_t), f(x_{t-1})$ ir Gamma blīvuma funkcija.

Pēc divu dimensiju sadalījuma funkcijas (2.17) un blīvuma funkcijas (2.18) noteikšanas ir iespējams identificēt pirmās un otrās kārtas nosacītos momentus, kas ir neparametriskās regresijas (2.10) risinājums. Bet šos nosacītos momentus atrast ir vieglāk, izmantojot uz neparametrisko regresijas modeli balstīto kopulu.

Lai iegūtu neparametriskās regresijas parametrus, izmantojot kopulas reprezentāciju (2.15), ievietojam tos nosacītajā matemātiskajā cerībā, tādējādi iegūstot meklētos parametrus:

$$\varphi(u) = E(U \mid V = v) = \int_0^1 z\, dF_{u|v}(z) = \int_0^1 z\, c(u,v)dz = \int_0^1 z(\frac{1}{\alpha}(1-\theta+\omega+v+2z))dz =$$

$$= \frac{1}{\alpha}(\frac{z^2}{2} - \frac{z^2\theta}{2} + \frac{z^2\omega}{2} + \frac{z^2 v}{2} + \frac{2z^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1}{2\alpha}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + v)$$

$$\psi^2(u) = E((u-\varphi(u))^2 / U = u) = \int_0^1 (z - f(z))^2 c(z,v)dz =$$

$$\int_0^1 (z - \frac{1}{2\alpha}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + v))^2 \times (\frac{1}{\alpha}(1-\theta+\omega+v+2z))dz =$$

$$= (1\frac{2}{3} - \theta + \omega + v)(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + v) + \frac{1}{4\alpha^3}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + v)^2)$$

kur $\alpha, \omega, v, \theta - parametri$

Pēc tam, kad veikta uz kopulu balstīto neparametriskās regresijas (2.11) koeficientu novērtēšana, pārrakstīsim šo vienādojumu, kas ir GARCH (1,1) svārstīguma modeļa diferenču vienādojums kopulas telpā ($U_t = u$, $U_{t-1} = v$):

$$t \in Z \quad U_t = \frac{1}{2\alpha}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + U_{t-1}) + \sqrt{(1\frac{2}{3} - \theta + \omega + U_{t-1})(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + U_{t-1}) + \frac{1}{4\alpha^3}(1\frac{1}{3} - \theta + \omega + U_{t-1})^2)}\xi_t$$

(2.19).

Vienādojumu (2.19) var pārveidot par vienādojumu (2.10), izmantojot regresijas (2.19) parametru inverso funkciju. Šī vienādojuma (2.19) vērtības iespējams noteikt skaitliski, piemēram, ar *Matlab* vai *Mathematica*. Protams, lai izmantotu šo modeli praksē, ir ļoti svarīgi salīdzināt dažādu klašu modeļus, kas ir piemēroti empīriskiem datiem. Tas var piešķirt šai metodei lietišķu pievienoto vērtību.

Strādājot ar kopulām, nedrīkst ignorēt dažus faktus. Piemēram, nav viegli noteikt, kura parametru kopula vislabāk atbildīs noteiktajai datu kopai, jo dažas kopulas labāku atbilstību uzrāda netālu no sadalījuma centra, citas – pie sadalījuma "astēm", un daudzām kopulām nav tādu momentu, kas būtu tieši saistīti ar Pīrsona korelāciju: tās ir grūti salīdzināmas ar finanšu modeļiem, kas balstās uz korelāciju.

3. ARCH(p,q) MODELIS AR AUTOKORELĒTAJIEM ATLIKUMIEM UN OPCIJU PĀRCENOŠANAS VIENĀDOJUMS

Pēdējos gados daudzi raksti veltīti finanšu aktīvu ienesīguma autokorelācijas un tās prognozējamības jautājumiem. Savos darbos Lo un Makkinlijs [57], Jokuvolli [58], Stolls un Volijs [59] ir analizējuši īstermiņa akciju indeksu ienesīgumu. Viņi noskaidrojuši, ka pozitīva autokorelācija indeksu ienesīgumos parādās galvenokārt tādēļ, ka indeksa vērtības aprēķinos tiek izmantota novecojuša informācija par akciju cenām. Tas notiek gadījumos, kad indeksā iekļauto akciju skaitam pievieno vājas kapitalizācijas uzņēmumu akcijas, tirdzniecība ar kurām notiek retāk nekā ar lielo uzņēmumu akcijām. Rezultātā indeksa vērtība neatspoguļo patieso akciju portfeļa tirgus vērtību, jo tā aprēķināta, balstoties uz pēdējo notikušo akciju tirdzniecības darījumu cenām. Lai modelētu šādus procesus, ekonometristi aktīvi attīsta modeļus ar nosacīto heterokedastitāti. Savukārt, kad modelī iekļauj nenovērojamos sistēmas stāvokļa mainīgos, piemēram, nosacīto svārstīgumu, ir ļoti grūti iegūt ticamības funkciju nelineāru stohastisko vienādojumu sistēmai, kas tiek novērota diskrētos laika intervālos. Jāatzīmē, ka viens no pirmajiem, kas daļēji atrisināja šo problēmu, bija Nelsons [34]. Viņš izstrādāja nosacījumus, kuriem izpildoties, *GARCH* stohastisko diferenču vienādojumu sistēmas, pēc sadalījuma, konverģē uz Ito procesiem, diskrēto laika intervālu garumam tiecoties uz nulli. Šis risinājums tika iegūts modeļiem bez ienesīgumu sērijveida korelācijām. Līdz ar to autokorelācijas klātbūtne finanšu aktīva pastāvēšanas laikā var būtiski ietekmēt aktīva cenu, kā arī šī finanšu aktīva atvasinātā finanšu instrumenta vērtību. Kā zināms, nekorekti novērtēti atvasinātie finanšu instrumenti var izraisīt milzīgu finanšu institūciju maksātnespējas vilni.

3.1. Finanšu aktīvu ienesīguma autokorelācijas problēma

Mezins [60] atklāja sakarību starp finanšu aktīva cenas svārstīgumu, finanšu aktīva ienesīguma svārstīgumu un finanšu aktīva ienesīguma autokorelācijas koeficientu. Viņa iegūtais analītiskais atrisinājums reducējas uz labi zināmās Bleka–Šoulza opciju līguma cenas noteikšanas formulas speciālu gadījumu autokorelētiem finanšu aktīvu ienesīgumiem. Mezina rakstā konstruēts ietvars log-normāli sadalītai finanšu aktīvu cenai S ar sērijveidā korelētiem ienesīgumiem, kā rezultātā izstrādāts analītiskais opciju līguma cenas noteikšanas modelis, kas ļauj iegūt precīzu risinājumu šī finanšu aktīva atvasināto finanšu instrumentu līguma vērtības noteikšanai. Ietvars

konstruēts normāli sadalītam gadījuma procesam x, kam $\ln S = X$ un kura autokorelētie pieaugumi ξ ir ar svārstīgumu σ^2 un autokorelācijas koeficientu ρ. Abu parametru novērtējumi iegūstami no vēsturiskajiem datiem. Atsakoties no heiristiskas pieejas, ir iespējams izmantot robežteorēmas, ko piedāvāja Carkovs [52], un iegūt stohastiskā diferenciālvienādojuma aproksimāciju nepārtrauktam laikam, kas izteikta kā difūziju aproksimācija.

3.2. Stohastiskās aproksimācijas iegūšana vienādojumam ar sērijveida autokorelācijām akciju ienesīgumos

Dinamisko sistēmu, ar mazo gadījuma perturbāciju, asimptotiskās analīzes problēmas ir iztirzātas vairākās matemātiskās un tehniskās publikācijās. Acīmredzot A.V. Skorokhods bija pirmais matemātiķis, kurš pierādīja, ka varbūtību teorijas robežteorēmu var veiksmīgi pielietot gadījuma dinamisko sistēmu atrisinājumu sadalījuma aproksimācijai uz stohastisko diferenciālvienādojumu atrisinājumiem jebkurā noteiktā laika intervālā (skat. [62], [63]). Iegūtais rezultāts uzreiz guva plašu pielietojumu tehniskajos un ekonomiskajos rakstos (skat. [64], [65], [66]). Jāatzīmē, ka, neskatoties uz faktu, ka iegūtais rezultāts bija paredzēts vienādojumu analīzei noteiktā laika intervālā, tomēr nosacīto vidējo vērtību un difūzijas aproksimācijas procedūra bija izmantota arī daudzās praktiskā pielietojuma situācijās iespējamo stacionāro risinājumu asimptotiskas stabilitātes analīzei, t.i., diferenciālvienādojumu risināšanai, kad $t \to \infty$. Lai pierādītu šīs pieejas izmantošanas pamatotību dinamisko sistēmu ar nepārtrauktajām trajektorijām gadījumā, pētniekam bija jāpielieto ne tikai robežteorēmas speciālais gadījums (skat. piemēru [67]), bet arī otrās Ļapunova metodes stohastiskā versija, kas izstrādāta Ito stohastiskajiem diferenciālvienādojumiem [19]. Bet lielākā daļa ekonometrijas dinamisko sistēmu ([65], [68]) pieprasa minēto „gludo” modeļu paplašināšanu, lai fāzes kustība būtu ar pārtraukuma “lēcienu”. Dažu pētījumu , kas šo problēmu risināja vājā formā, rezultātā bija iegūti [69] priekš dinamiskajām sistēmām ar laika stāvokļu Markova pārslēgumiem. Šī problēma ir ļoti būtiska mūsdienu finanšu ekonometriskai *ARCH* tipa stacionāro, atkārtoto procedūru analīzei (skat., piemēram, [34] un [68]).

Turpmāk aprakstīts viens no paņēmieniem, kā asimptotiskas metodes izmantojamas reālajā dzīvē – pārcenojot opcijas un ar tām saistītos finanšu risku jutīguma parametrus (mērus).

Vienkāršākais matemātiskais modelis, kas apraksta akciju cenas S izmaiņas un iekļauj pieņēmumu par sērijveida autokorelācijām akcijas ienesīgumos, vienlaikus

izpildoties parasti izmantojamam nosacījumam par riska neitrālo varbūtības mēru P, ir pierakstāms šādā formā:

$$S_{t+1} = S_t(1 + \varepsilon^2\mu + \varepsilon\sigma y_{t+1}), \tag{3.1}$$

kur y_t ir Gausa gadījuma virkne ar vidējo vērtību nulle un svārstīgumu viens, μ - parametrs (procesa pirmais moments), ε-mazs parametrs aproksimācijas nepieciešamībai, σ – otrais moments.

Ja pieņemam, ka gadījuma novērojumi ir neatkarīgi, tad varam rakstīt, ka y_t ir AR(1) process (Markova process):

$$y_{t+1} = \rho y_t + \sqrt{1-\rho^2}\xi_{t+1}, \tag{3.2}$$

kur $\xi_t, E\xi_t = 0, E\xi_t^2 = 1$ ir neatkarīgas un vienādi sadalītas Gausa virknes.

Lai izmantotu Carkova [52] iegūtos rezultātus, apzīmēsim $x_t \equiv S_t$ un pārrakstīsim vienādojumu (3.1) šādā formā:

$$x_{t+1} = x_t + \varepsilon\sigma y_{t+1}x_t + \varepsilon^2\mu x_t, \tag{3.3}$$

kā rezultātā izriet, ka maziem Ɛ vienādojumu (3.3) var aproksimēt ar vektoru sadalījumu $\{X(t_1), X(t_{21}), \dots, X(t_n)\}$, ko nosaka ar sekojošā Ito stohastiskā diferenciālvienādojuma atrisinājuma palīdzību (skat. 4.pielikumu):

$$dX(s) = a(X(s))ds + \sigma(X(s))d\omega(s). \tag{3.4}$$

Atrisinot (3.4), iegūsim stohastiskā diferenču vienādojuma (3.3) nepārtraukta laika aproksimāciju difūzijas procesa formā, kas apmierina Ito stohastisko diferenciālvienādojumu:

$$dS(t) = S(t)(\mu + \sigma^2 k)dt + S(t)\sqrt{1+2k}\sigma d\omega(t) \tag{3.5}$$

$$k := \sum_{m=1}^{\infty} Corr\{y_{t+m}, y_t\} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Veicot ievietošanu, iegūstam gala vienādojumu:

$$dS(t) = S(t)(\mu + \sigma^2 \frac{\rho}{1-\rho})dt + S(t)\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\sigma d\omega(t) \tag{3.6}$$

3.3. Opciju pārcenošanas vienādojums

Eiropas tipa "call" (tiesības pirkt akcijas) opciju līguma cenas noteikšana akcijām ar autokorelētiem ienesīgumiem un tirgus riska jutīguma parametru modifikāciju var veikt, balstoties uz iepriekšminēto pētījumu rezultātā iegūtajiem datiem.

Tagad izveidosim formulu Eiropas tipa "call" opciju līguma cenas noteikšanai gadījumā, ja akcijas cenas process $S(t)$ apmierina stohastisko diferenciālvienādojumu (3.6). Eiropas tipa "call" opciju līgumam robežnosacījumi ir $\boldsymbol{C(S(T),T) = \max(S(t) - K; 0)}$ un $\boldsymbol{C(0,t) = 0}$. Izmantojot standartpaņēmienus, iegūstam:

$$C(S(t),t) = S(t)N(d_1) - K\exp(-(\mu + \sigma^2 k)(T-t))N(d_2), \tag{3.7}$$

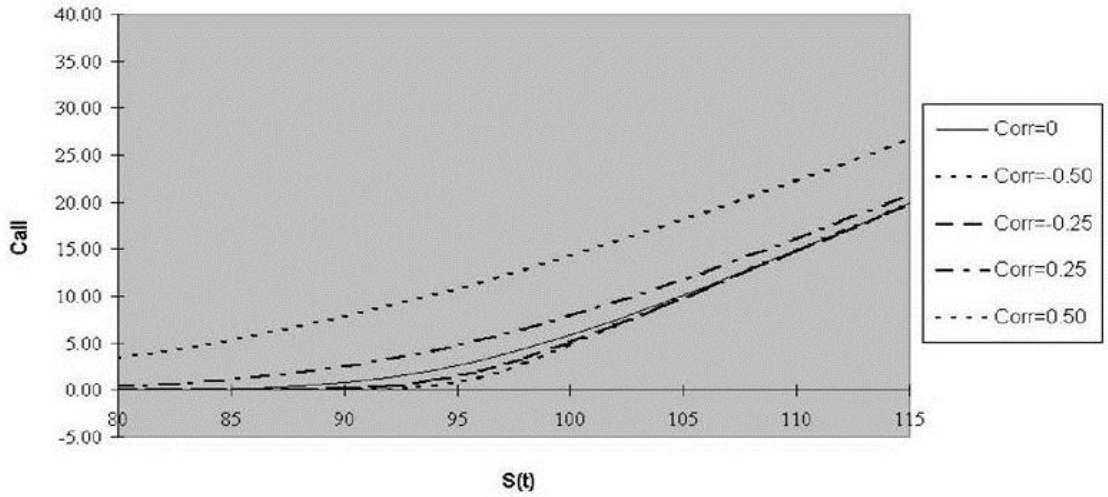
kur

$$d_1 = \frac{\log(S(t)/K) + (\mu + \sigma^2 k + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2k))(T-t)}{\sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)}}$$

un

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)},$$

kur N() ir standartnormālā sadalījuma kumulatīvā funkcija, K-izpildes cena, T –opcijas izpildes laiks, μ, σ^2-parametri.



3.28. att. *Call* opciju līguma vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem.

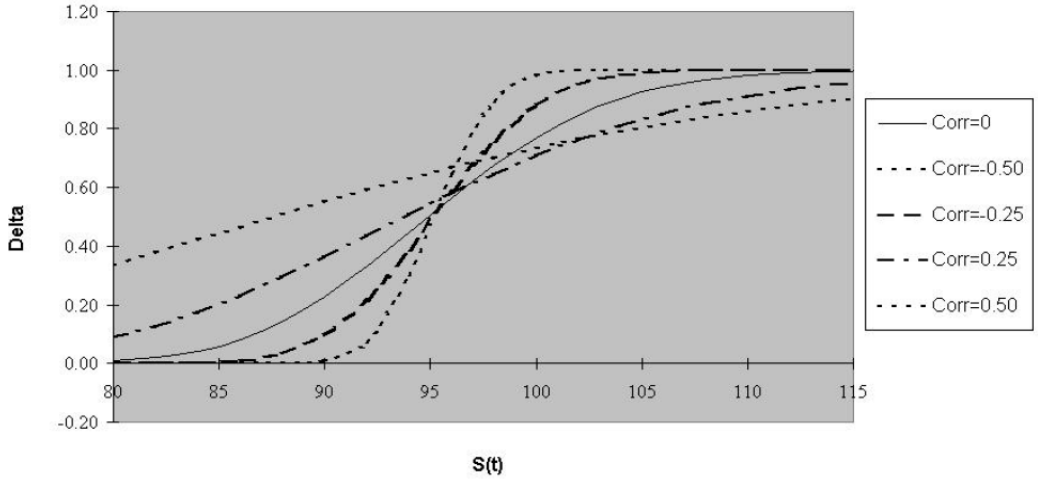
3.4. Opciju riska jutīguma mēru (Option Greeks) pārrēķins

Tagad ir iespējams iegūt formulas, lai aprēķinātu call opciju līguma cenas jutīgumu attiecībā pret izmaiņām pamatparametros. Eksistē daudzi riska mēri, kurus bieži apzīmē ar grieķu alfabēta burtiem, bet, lai ilustrētu autokorelācijas problēmu, apskatīsim visbiežāk izmantotos – *Delta, Vega, Ro* un *Gamma*.

Šie rādītāji ir ļoti svarīgi finanšu risku vadībai. Katrs rādītājs ir opciju portfeļa vērtības izmaiņu jutīguma mērs pret noteiktu finanšu tirgus faktoru. Tādējādi portfeli var rebalansēt attiecībā pret noteiktu riska komponenti (procentu likme, valūtu kurss, akciju cena u.c.), lai iegūtu noteiktu atklāto pozīciju attiecībā pret definēto risku. Šie radītāji ir viegli aprēķināmi, balstoties uz Bleka–Šoulza formulu – līdz ar to tie ir ļoti svarīgi atvasināto finanšu instrumentu tirgotājiem, īpaši tiem, kuri vēlas ierobežot portfeļa cenu risku pret pēkšņām finanšu tirgus izmaiņām. Pārsvarā lieto risku ierobežošanas rādītājus, kas mēra jutīgumu pret pamataktīva cenas izmaiņām, kā arī atvasināto finanšu instrumentu laiku līdz termiņa beigām un svārstīgumu. Riska rādītāji, pret pašiem *Delta, Vega* un *Gamma,* nav sevišķi izplatīti. Turklāt portfeļu menedžeri īpaši neņem vērā opcijas cenu jutīgumu pret bezriska procentu likmju izmaiņām, jo šis risks nav būtisks. Visi izmantojamie *Greeks* rādītāji ir pirmās (*Delta, Vega* un *Ro*) un otrās kārtas atvasinājumi no opcijas cenas.

Delta, Δ, ir Eiropas tipa opciju līguma cenas C pirmās kārtas atvasinājums pēc pamataktīva cenas S un ir opcijas cenas izmaiņu mērs pret pamataktīva izmaiņām:

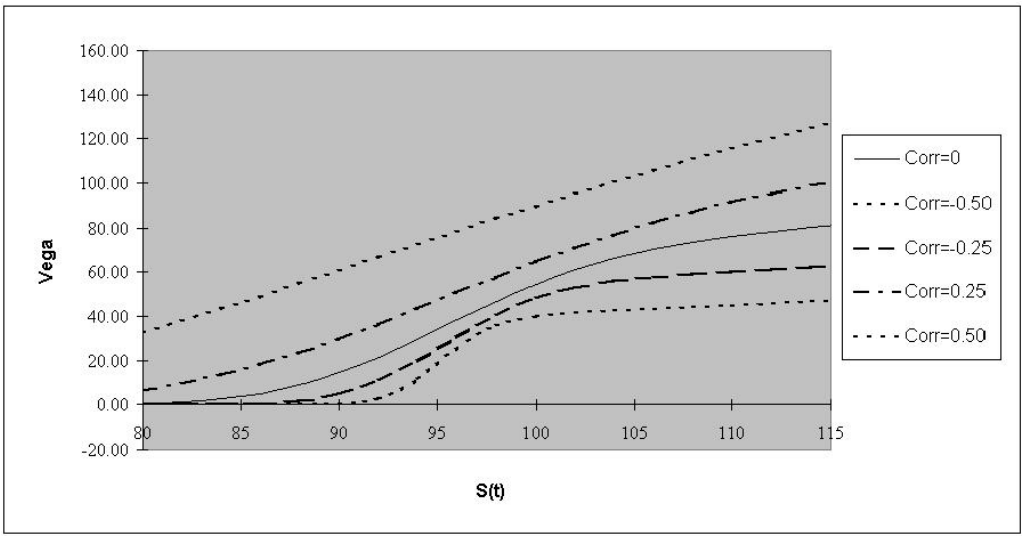
$$\Delta(S(t),t) = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$



3.29. att. *Call* opciju līguma Delta parametra vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem.

Vega, ν, mēra jutīgumu pret aktīva cenas svārstībām. Vega ir opcijas cenas pirmās kārtas atvasinājums pēc pamataktīva svārstībām:

$$\nu(S(t),t) = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S(t)N(d_1)\sqrt{(1+2k)(T-t)}$$

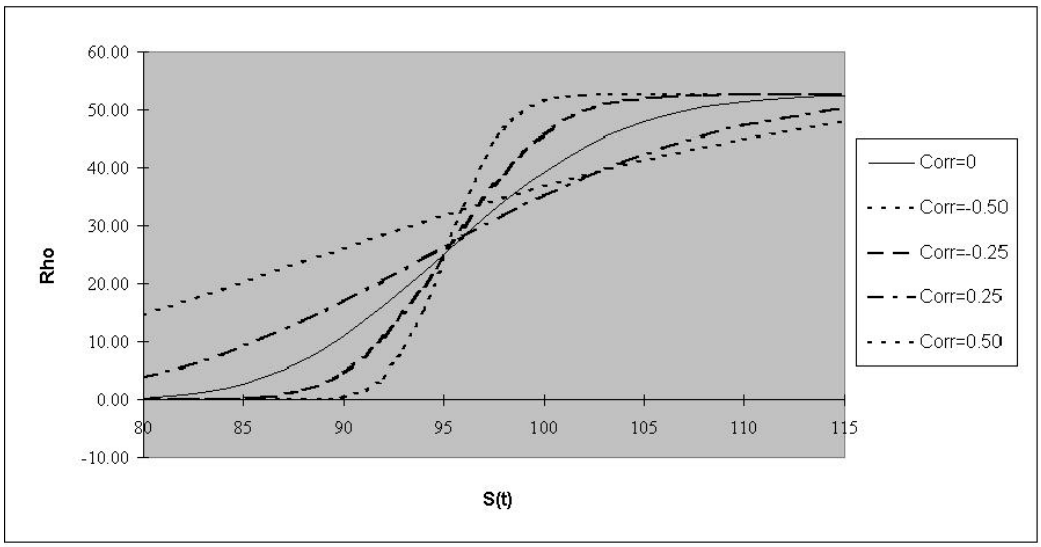


3.30. att. *Call* opciju līguma Vega parametra vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem.

Rho (Ro), P, mēra jutīgumu pret izmantotās procentu likmes (pārsvarā bezriska likmes) izmaiņām. Ro ir atvasinājums no opcijas cenas pēc procentu likmes. Izņemot

ļoti retus gadījumus, opcijas vērtība ir vāji atkarīga no procentu likmju izmaiņām. Tādējādi šis rādītājs ir vismazāk izmantojamais investīciju portfeļa riska vadībai.

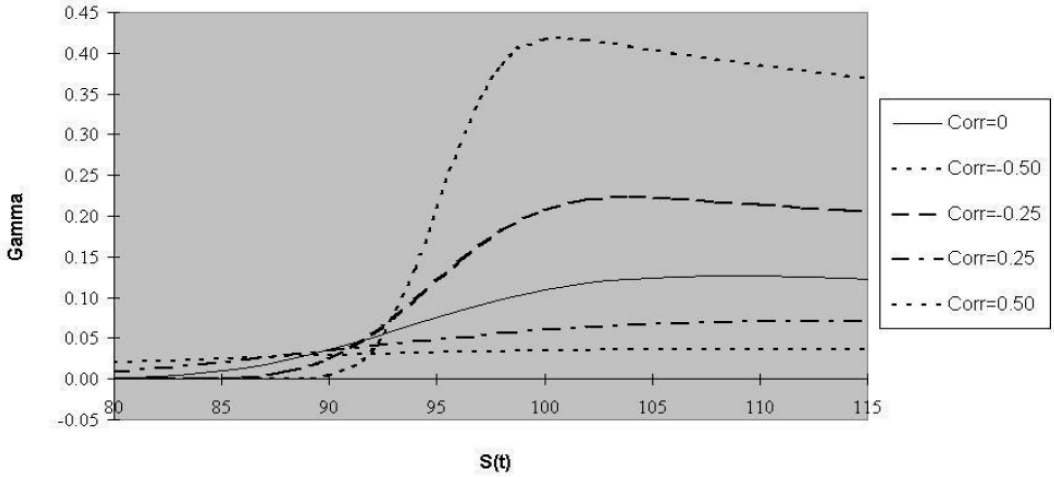
$$\mathrm{P}(S(t),t) = \frac{\partial C}{\partial \mu} = K(T-t)\exp\big(-(\mu+\sigma^2 k)(T-t)\big)\,N(d_2)$$



3.31. att. *Call* opciju līguma Rho parametra vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem.

Gamma, Γ, mēra Delta parametra izmaiņu ātrumu atkarībā no pamataktīva cenas izmaiņām:

$$\gamma(S(t),t) = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{N(d_1)}{S(t)\sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)}}$$



3.32. att. *Call* opciju līguma Gamma parametra vērtība dažādiem korelācijas koeficientiem.

Kā redzam 3.28. - 3.32. attēlā, opciju līguma cenas jutīgumu būtiski ietekmē pamataktīva ienesīguma autokorelācija. Ja autokorelācija pastāv, tad, atkarībā no tās zīmes, opciju līguma pārdevējs var pārvērtēt vai pietiekami nenovērtēt tirgus risku, kā rezultātā var rasties neparedzami zaudējumi, vai pat iestāties finanšu institūcijas maksātnespēja.

3.5. *GARCH(p,q)* modelis un tā stacionaritāte

Pēdējos gados zinātniskajā literatūrā finanšu laikrindas aprakstītas ar endogēniem mainīgajiem $X_t^{(s)}, k = 1, 2, ..., N,$ eksogēniem mainīgajiem Y_t un atlikumiem U_t, kas tiek uzrādīti ar formulām [44] :

$$Y_t = b_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m Y_{t-m} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{N} b_{ms} X_{t-m}^{(s)} + U_t, \quad U_t = \sum_{l=1}^{n} c_l U_{t-l} + \xi_t,$$

kur ξ_t ir $\{\xi_t, t \in Z\}$ kļūdu laikrinda ar sekojošo nosacīto vidējo vērtību un nosacīto dispersiju :

$$E\{\xi_t / \xi_{t-1}, \xi_{t-2}, ...\} \equiv 0, \qquad E\{\xi_t^2 / \xi_{t-1}, \xi_{t-2}, ...\} = \sigma_t^2 \tag{3.8}$$

Mūsdienu prognozēšanas teorijā visizplatītākais laikrindu modelis nosacītai dispersijai ir *GARCH(p,q)* process, kuru var pierakstīt formā [44]:

$$\sigma_t^2 = \theta_0 + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \sigma_{t-k}^2 + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \sigma_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2. \tag{3.9}$$

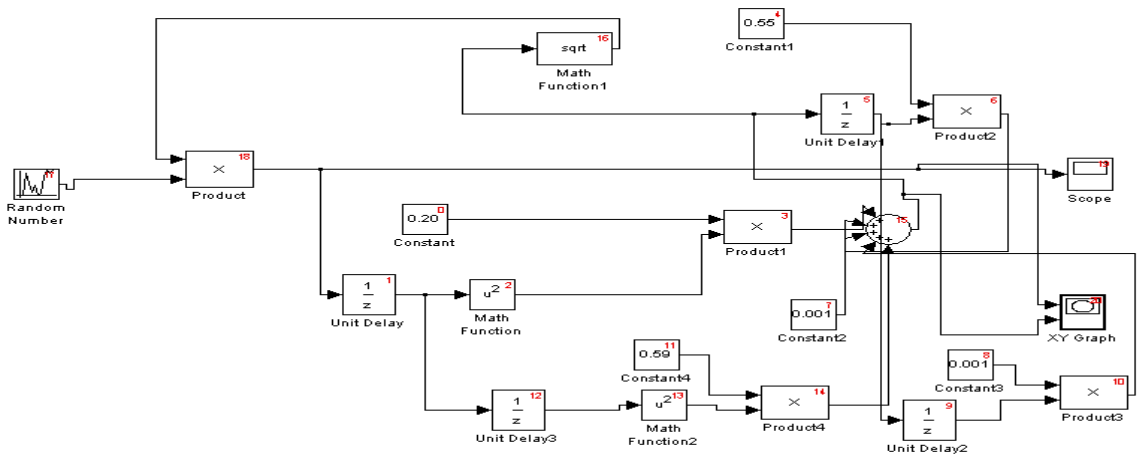
,

kur $\varepsilon_t := \xi_t / \sigma_t$ un $\{\varepsilon_t, , t \in Z\}$ ir „baltā trokšņa" tipa laikrinda.

Minētie procesi ir definēti laika momentiem $t \in Z$ ar $q+1$, koeficientiem $\{\theta_0 > 0,\ \theta_k \geq 0, k = 1, ..., q\}$, p koeficientiem $\{\varphi_k \geq 0, k = 1, 2, ..., p\}$, vidējo b_0, *nN+1* lineārās regresijas koeficientiem, nosacīto dispersiju σ_t^2 un gadījuma mainīgā ε_0 sadalījumam. Kā tika pierādīts Bollerslev (1986) [15], pie pieņēmuma $\sum_{k=1}^{p} \varphi_k + \sum_{k=1}^{q} \theta_k < 1$, ja eksistē ar vienādību (3.9) uzdota stacionāra laikrinda $\{\hat{\sigma}_t^2, t \in Z\}$,

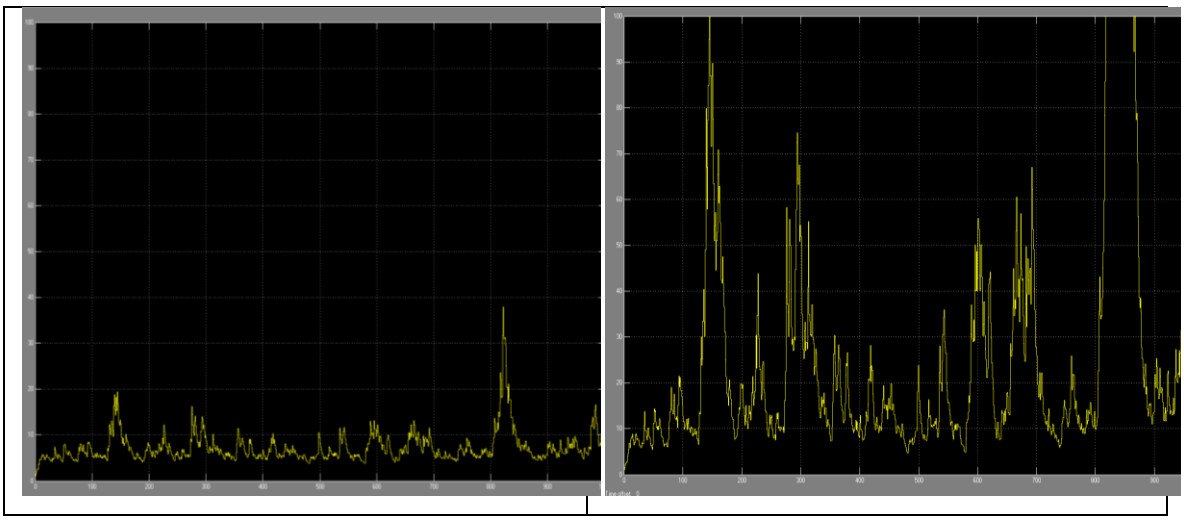
tad novirzes $x_t := \hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2$ matemātiskā cerība jebkurai citai laikrindai $\{\sigma_t^2, t \in Z\}$, kas arī apmierina (3.9), konverģējama uz 0 pēc varbūtības, kad $t \to \infty$. Arī šajā darbā pieņemts, ka nosacījums $\sum_{k=1}^{p} \varphi_k + \sum_{k=1}^{q} \theta_k < 1$ izpildās.

Lielākajā daļā statistisko programpakešu iepriekšminētie parametri vienādojumiem (3.8) un (3.9) novērtēti, izmantojot mazāko kvadrātu metodi dotajai izlasei. Jāatzīmē, ka šī metode balstītās uz ļoti sarežģītas daudzargumentu funkcijas minimuma atrašanas. Diemžēl šai funkcijai, kā likums, ir salīdzinoši daudz lokālo minimumu, un tāpēc minimizācijas iteraciju procedūra ne vienmēr sniedz vajadzīgo rezultātu. Tas nozīmē, ka ar dotā algoritma palīdzību atrastie modeļa parametri, var neatbilst reālā modeļa parametriem. Var pat gadīties, ka programpaketes izvēlētās parametru sākuma vērtības ņemtas tālu no minimuma punkta, un programpakete izsniedz paziņojumu, ka pētniekam pašam jāizvēlas prasītā sākuma vērtība. Vēl vairāk, var gadīties, ka mazāko kvadrātu metode vispār nav izmantojama (3.9) veida modeļiem, jo šīs metodes lietošanai, pirmkārt, nepieciešama laikrindas $\{\sigma_t^2\}$ stacionaritāte un, otrkārt, jāeksistē kļūdas ceturtajam momentam, t.i., $\mathrm{E}\xi_t^4 < \infty$. Ja tā nav, tad, neskatoties uz programpaketes izdoto dispersijas novērtējuma skaitlisko rezultātu, var izrādīties, ka dispersija ir bezgalīga un iegūtais rezultāts nav izmantojams. Kā pierādījuši pētījumi, (3.9) tipa modeļi ir ļoti jutīgi pat attiecībā uz mazām parametru izmaiņām. Parādīsim to ar *MATLAB Simulink* programpaketes palīdzību, uzkonstruējot *GARCH (2,2)* modeli:



3.33. att. *GARCH (2,2)* modeļa blokshēma Simulink vidē.

Saglabājot minēto īpašību, tika imitētas 2 situācijas pietiekami lieliem t (1000 soļiem).



3.34. attēls. *GARCH (2,2)* rezultātu grafiki.

Tādejādi tika iegūti divi, būtībā atšķirīgi, kļūdas otro momentu attēlojumi (skat. 3.34.attēlu). Pirmajā grafikā skaidri redzams, ka process konverģē, taču otrajā – izkliedes mainība ir liela. Ja notiek prognozēšana, balstoties uz aprēķinātajiem *GARCH* modeļa koeficientiem, tad otrajā gadījumā iegūtā prognoze nav stabila un praktiski nav pielietojama .

Stacionārās laikrindas eksistences problēmu, prognozes kļūdas ceturtā momenta eksistences problēma un minimuma meklēšanas ar mazāko kvadrātu metodi iterāciju procedūras konverģences problēma risināma tikai ar (3.9) modeļa otrā momenta uzvedības detalizētas analīzes palīdzību, t.i., ar virkņu $\mathrm{E}\sigma_t^4$ dinamikas analīzi.

Tāpēc rodas jautājums par *GARCH* modeļa stacionaritātes stabilitāti.

3.6. Stacionāra atrisinājuma sadalījuma funkcijas pārbaude un konverģences ātruma aprēķins fiksētām parametru vērtībām

Nākamais solis, kas iekļaujams u promocijas darbā, ir vienādojuma (3.4) atrisinājuma un attiecīgi iegūtā vienādojuma (3.5) stabilitātes pārbaude. Ja nav iespējams iegūt stacionāro vienādojuma (3.5) atrisinājumu un parādīt, ka tas nav atkarīgs no korelācijas koeficienta vērtības, tad iegūtās formulas Eiropas tipa call opciju līguma cenas un riska mēru *(Greeks)* aprēķina atrisinājums nav stabils, bet ir lokāls un nav izmantojams risku vadībai.

Apskatīsim stohastisko diferenciālvienādojumu, kas līdzīgs vienādojumam (3.5):

$$dx(t) = \gamma(\rho) - a(\rho)xdt + \sigma(\rho)xd\omega(t) \tag{3.10}$$

$\hat{x}(t)$ – stacionārs.

No Nelsona [34] pētījuma ir zināms, ka stacionāra vienādojuma atrisinājuma $\hat{x}(t)$ sadalījums ir inversais Gamma sadalījums. Ja nepieciešams noskaidrot ātrumu, ar kādu notiek konverģence uz vienādojuma (3.10) atrisinājumu, ņemot vērā sākuma nosacījumu $x(0) = x$, tad vienādojums ir pārrakstāms diferenču formā:

$$z(t) = x(t) - \hat{x}(t) \;\; z(0) = x - \hat{x}(0)$$

$$dz(t) = a(\rho)z(t)dt + \sigma(\rho)z(t)dw(t)$$

$$E\{|z(t)|\}^2 = E\{|z(0)|^2\}e^{\lambda_2(\rho)t}$$

$$E\{|z(0)|^2\} = \int_0^\infty p(z)(x-z)^2 dz\,,$$

kur $p(z)$ ir Gamma sadalījums.

Un, ja $\lambda_2(\rho) = 2a(\rho) + \sigma^2(\rho) < 0$, tad otrās kārtas moments ir supermartingāls:

$$\begin{aligned} \mathrm{c}(\varepsilon) &:= \mathrm{P}\left\{\sup_{T\le t} |z(t)|^2 > \varepsilon\right\} \le \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}\left\{\sup_{T\le t} |z(t)|^2\right\} \le \frac{4}{\varepsilon}\mathrm{E}\{|z(T)|^2\} = \\ &= \frac{4}{\varepsilon}\mathrm{E}\{|z(0)|^2\}e^{\lambda_2(\rho)T} \end{aligned}.$$

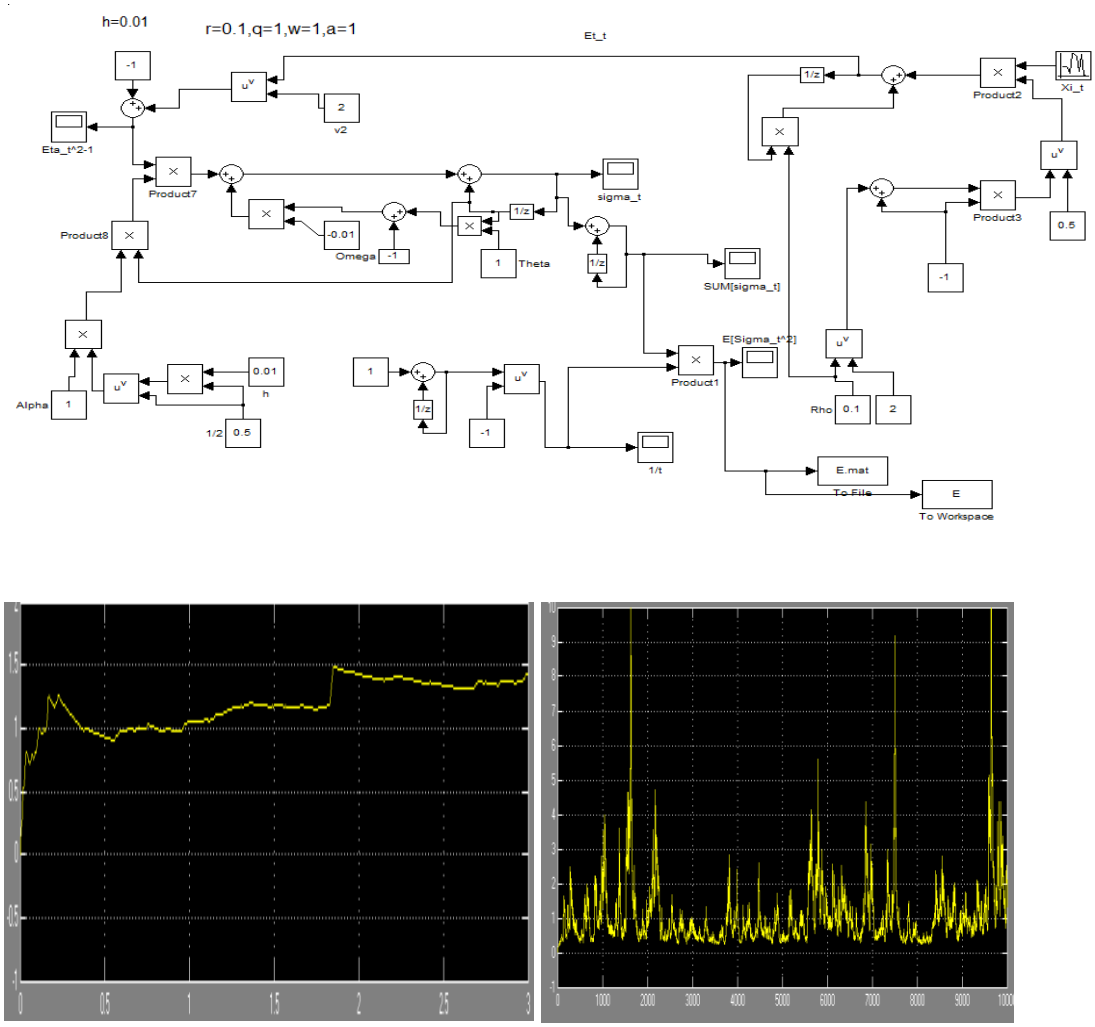
Viegli ir iegūt novērtējumu otrās kārtas momentam $E\{|z(0)|^2\}$ ar zināmu Gamma sadalījumu, kas atkarīgs no ρ. Un, ja izpildās sekojošā nevienādība:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{T\le t} |z(t)|^2 < \varepsilon\right\} > 1 - \delta\,,$$

tad konverģence notiek pēc laika

$$T_\varepsilon(\rho) = \frac{\ln(\delta\varepsilon) - \ln 4\left(\mathrm{E}\{|z(0)|^2\}\right)}{\lambda_2(\rho)}\,. \qquad (3.11)$$

Formula (3.11) apraksta laiku līdz konverģencei uz stacionāro atrisinājumu $\hat{x}(t)$. Līdz ar to, izmantojot (3.11), kas atkarīgs no ρ, ir iespējams atrast laiku līdz konverģencei, kā arī, sākot ar konverģences brīdi, stacionāram atrisinājumam ir jābūt sadalītam pēc Gamma sadalījuma.



3.35. att. $E\sigma^2$ un σ^2procesa imitācija Matlab Simulink vidē.

Lai īstenotu stacionāra atrisinājuma stabilitātes pētīšanu atkarībā no korelācijas koeficienta vērtībām un to atbilstību pārbaudes Gamma sadalījumam, *Matlab Simulink* vidē veikta teorētiska vienādojuma (3.5) imitācija. Tika izveidotas virknes no 5000 novērojumiem, lai aprēķinātu un turpmāk salīdzinātu teorētiskos un empīriskos momentus, lai pārbaudītu Kolmogorova testu uz Gamma sadalījumu, kā arī noteiktu vienādojuma (3.5) konverģences laiku.

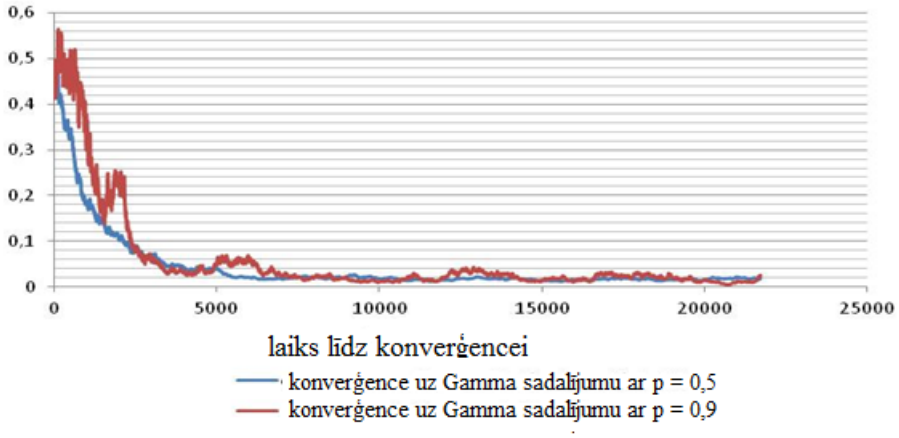
Empīrisko un teorētisko momentu salīdzināšana 3.1. tabula

Rādītāji	Empīriskais σ^2		Teorētiskais σ^2
	5000 imitācijas	Pēdējās 100 imitācijas	
Vidējais	1.00493	0.99748	1.00010
Dispersija	0.00570	0.00459	0.00513

Rezultātā, kā redzams 3.1.tabulā, būtisku atšķirību no Gamma sadalījuma dažādas kārtas momentiem nav.

Šajā gadījumā fiksēti vienādojuma (3.10) un Gamma sadalījuma parametri. Tālāk tika veiktas imitācijas, mainot ρ vērtības no 0 līdz 1, kā rezultātā iegūti dažādi laiki līdz konverģencei (skat.4.pielikumu).

Ņemot vērā Nelsona [34] secinājumus, ka stacionārajiem atrisinājumiem jābūt sadalītiem pēc inversā Gamma sadalījuma, tika veikts Kolmogorova tests, lai pārbaudītu hipotēzi par Gamma sadalījumu. Mūsuprāt, šie testi ir empīriskais pierādījums (3.11). Lielākajā daļā gadījumu hipotēze par Gamma sadalījumu netika noraidīta.



3.36. att. Laiks līdz konverģencei uz Gamma sadalījumu dažādiem korelācijas koeficientiem.

Kā redzams 3.36.attēlā, pie korelācijas koeficienta vērtības 0,5 $|z(t)|^2$ konverģē uz stacionāro atrisinājumu ar iepriekšdefinētu precizitāti $\varepsilon < 0{,}1$ ātrāk nekā pie korelācijas koeficienta vērtības 0,9. Taču konverģence tika sasniegta visām ρ vērtībām. Tas nozīmē, ka vienādojumu (3.10) var izmantot, lai novērtētu cenu finanšu aktīvam ar autokorelētiem ienesīgumiem un noteiktu atbilstošo riska mēru vērtību.

3.7. Secinājumi

Darbā ir izstrādāts nepārtraukta laika difūzijas modelis akciju ienesīgumam ar sērijveida korelāciju. Pēc tam iegūta formula Eiropas tipa *call* opciju līguma cenas noteikšanai gadījumam, kad opciju līgums ir izrakstīts akcijai ar autokorelētu ienesīgumu, un parādīts, ka pat nelielas sērijveida korelācijas iznākumā pastāvošā paredzamība var radīt būtiskas novirzes no Bleka-Šoulza formulas rezultātiem. Tālāk tika izveidotas formulas Eiropas tipa *call* opcijas cenas jutīguma mēriem un parādīts, ka finanšu risku vadībā plaši izmantotie opciju līgumu hedžēšanas parametri ir atkarīgi no pieņēmumiem par pamatinstrumenta ienesīgumu korelāciju. Šī pieeja izmantojama arī diskrēta laika diferenču vienādojumu sistēmām gadījumos, kad svārstīgums ir stohastisks vai to modelē ar *GARCH* procesu.

4. AUTOKORELĀCIJAS IZMANTOŠANA OPCIJAS CENAS NOTEIKŠANAI

2013. gadā notika diskusijas par opciju līgumu ar ļoti mazām izpildes iespējām *(deep out of the money)* [46]. Daži eksperti uzskatīja, ka dažādu aktīvu cenas apdrošināšanas pārdošana (opciju līgumu pārdošana) un loterijas biļešu pārdošana nodrošina pozitīvu ilgtermiņa atdevi dažādos investīciju sektoros. Finanšu tirgū ir pazīstamas daudz un dažādas stratēģijas, kas apraksta apdrošināšanu un loterijas. Galvenais jautājums ir, vai investori var uzlabot savus ilgtermiņa ieņēmumus, pērkot vai pārdodot apdrošināšanu un loterijas, respektīvi, veicot finanšu investīcijas, kurām ir apdrošināšanas vai loterijas raksturs. Atbilde ir atkarīga no tirgus cenu asimetrijas vai no tā, kādā veidā investori novērtē cenu asimetriju attiecībā pret vidējo vērtību. Ja lielākā daļa investoru sagaida pozitīvu asimetrijas koeficientu, tad investīcijas ar pozitīvi asimetrisku peļņu tiecas uz augstāku cenu un nodrošina zemus ilgtermiņa ienākumus. Cenu svārstības gan kreisajā "astē" (apdrošināšana), gan labajā "astē" (loterijas biļetes) paaugstina ilgtermiņa ienākumus. Turpretī uz opciju līgumiem balstītas mazvarbūtīgo risku apdrošināšanas pret finanšu katastrofām pirkšana un loterijas tipa investīciju, ar augstu svārstīgumu, uzturēšana noved pie zemiem ilgtermiņa ienākumiem. Kā redzams 2.6. attēlā, svārstību novērtējums, kas visvairāk ietekmē opciju līgumu cenu, ir pārvērtēts, salīdzinot ar reālajām svārstībām, tādējādi paveras iespēja gūt ieņēmumus, pārdodot ilgtermiņa opciju līgumus. Tomēr šis rezultāts nav iepriekš paredzams. Iespējams, ka salīdzinājumā ar kaut kādu noteiktu vidējo peļņu, investori var dot priekšroku vienreizējiem, lieliem zaudējumiem, nevis pastāvīgiem, nelieliem zaudējumiem, radot priekšnoteikumus negatīvai asimetrijai.

No otras puses Talebs [47] vērš uzmanību uz to, ka lielos zaudējumos netiek ņemti vērā nelineārie efekti un kļūdu asimetrija (novirzes no modeļa rezultātiem negatīvā virzienā nodara lielāku zaudējumu, nekā novirzes pozitīvā virzienā – guvumu). Izmaiņas, pievienojot nelineāros efektus mazvarbūtīgiem notikumiem, ir būtiskākas, nekā rezultātu apgriešana.

Ja vēsturiskie rezultāti uzrāda negatīvu asimetriju (1.5. attēls), tad lielākā daļa trūkstošo novērojumu ir kreisajā sadalījuma "astē", izraisot vidējās vērtības pārāk augstu novērtējumu. Jo asimetriskāks ir peļņas sadalījums un jo smagāka kreisā "aste", jo lielākas ir atšķirības starp novēroto un patieso vidējo vērtību.

Ilmanens [46] ir apskatījis visus argumentus, kas veicina apdrošināšanas pret mazvarbūtīgiem notikumiem iegādi. Ilmanens raksta, ka apstrīdēšana ļauj noliegt galvenos argumentus, kas postulē mazo varbūtību pārāk augsto novērtējumu finansēs.

Izrādās, ka nav neviena pētījuma, kas pārliecinoši demonstrētu mazo varbūtību pārāk augsto novērtējumu finansēs vai ekonomikā.

Lai varētu apgalvot, ka 1987. gada krīzes opciju līgumu pārdošana ir droša, būtu nepieciešami novērojumu rezultāti 2000 gadus ilgam periodam, kura laikā neparādītos šāda veida krīzes. Pat tie opciju līgumi, kas ir tuvāk vidējai vērtībai un līdz ar to biežāk tiek tirgoti, piedāvā pārāk lielu peļņu, lai varētu tos droši aprakstīt ar dažu gadu desmitu garumā iegūtiem datiem. Piemēram, opciju līgums ar 12 standartnoviržu svārstīgumu atbilst 5000 dienu erozijai. Cita nesakrītība ir attiecināma uz ieņēmumu trajektorijām, kas veido ieņēmumu asimetriju. Kad svārstīguma novērtējums četrkāršojas, 15 standartnoviržu opciju līgums kļūst par 4 standartnoviržu līgumu un tā vērtība palielinās 3300 reižu. Svārstīguma novērtējums (kā parādīts dažādos svārstīguma novērtējuma indeksos, piemēram, Čikāgas biržas opciju līgumu svārstību indeksā jeb VIX) ir četrkāršojies vismaz 6 reizes pēdējā ceturtdaļgadsimta laikā. Citiem vārdiem sakot, opciju līgumi, kas ir izteikti nelineāri attiecībā pret tirgus svārstībām, ir ļoti rūpīgi izvērtējami pirms to pārdošanas.

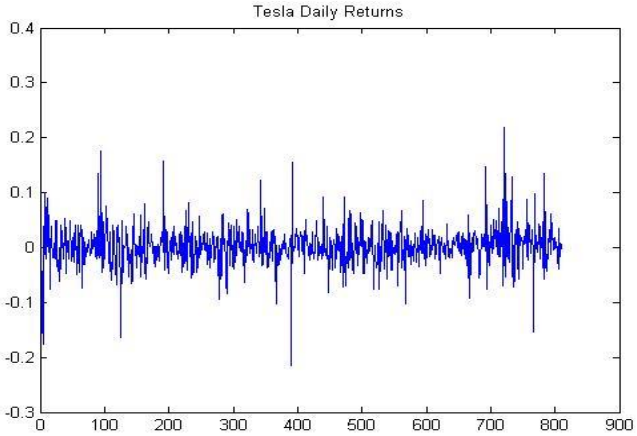
Tālāk vēlamies ieteikt veidu [46,47], kā analizēt opciju līgumu peļņu un riskus, balstoties uz mazvarbūtīgo apgabalu nelinearitāti (*GARCH* modelis) un izmantojot Tesla Motors Inc. akciju cenu dinamiku. Galvenā ideja ir izmantot autokorelācijas efektu stohastiskajā diferenču vienādojuma (kas izteikts caur difūzijas aproksimāciju ar stohastiskām svārstībām, kas aprakstītas *GARCH(1,1)* formā) nepārtrauktā laika tuvinājumā (1.1.attēlā sarkanais taisnstūris).

4.1. Tesla Motors Inc opciju pārcenošana pēc Markova modeļa

Kā jau minēts 3.2. sadaļā, matemātiskais modelis, kas apraksta akciju cenas *S* izmaiņas un iekļauj pieņēmumu par sērijveida autokorelācijām akcijas ienesīgumā, izsakāms šādā formā:

$$dS(t) = S(t)(\mu + \sigma^2 \frac{\rho}{1-\rho})dt + S(t)\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\sigma d\omega(t) \tag{4.1}$$

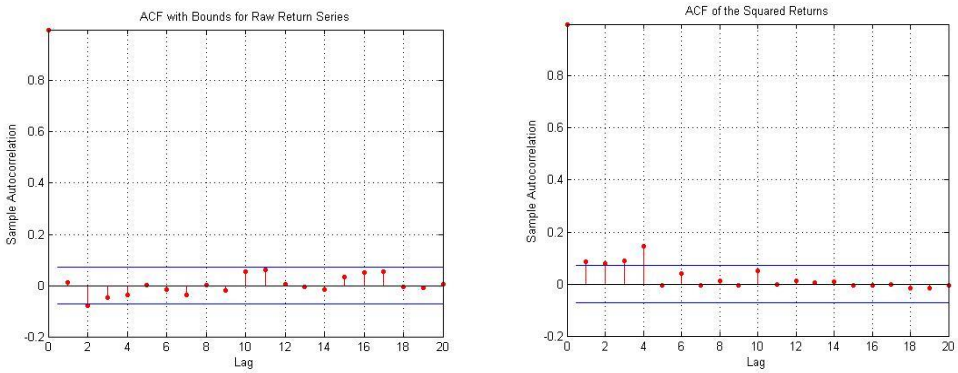
Vienādojumā (4.1) svārstīguma koeficients σ ir konstants. Finanšu tirgus datu svārstības ļoti bieži mainās, un nofiksēt σ koeficientu nebūtu pareizi. Tādējādi, opciju cenas precīzākai kalkulācijai ir nepieciešams minēto koeficientu mainīt laikā. Lai to īstenotu, pielietosim *GARCH(1,1)* procesu un turpmāk opcijas pārcenošanai izmantosim svārstības, kas iegūtas Montekarlo imitācijas rezultātā. Turklāt, uzbūvējot svārstīguma trajektorijas histogrammu un izvēloties modu raksturīgajam svārstīguma rādītājam, ir iegūstama precīzāka sagaidāmo opcijas cena viena gada periodam.



4.37. att.Tesla Motors Inc akciju vēsturiskais ienesīgums no 2010. gada 17. septembra līdz 2013.gada 26.jūnijam.

4.2.Tesla Motors Inc akciju ienesīguma svārstīguma imitācijas, izmantojot Montekarlo metodi

Lai, izmantojot (4.1) vienādojumu, pārvērtētu opciju līgumu cenu, ir nepieciešams atrast svārstīguma vērtību, ar kuru aizstāt novērtēto (sagaidāmo) svārstīguma vērtību, ko lieto finanšu tirgū. Mūsu mērķis ir atrast svārstības 1 gadu ilgam laika posmam. Vadoties no standarta ekonometriskās pieejas laikrindu analīzei (*ACF*, *PACF* analīze un modeļa kļūdu tests), iesakām izmantot *Tesla Motors Inc.* akciju vērtības svārstīguma imitāciju *GARCH(1,1)* modeli.

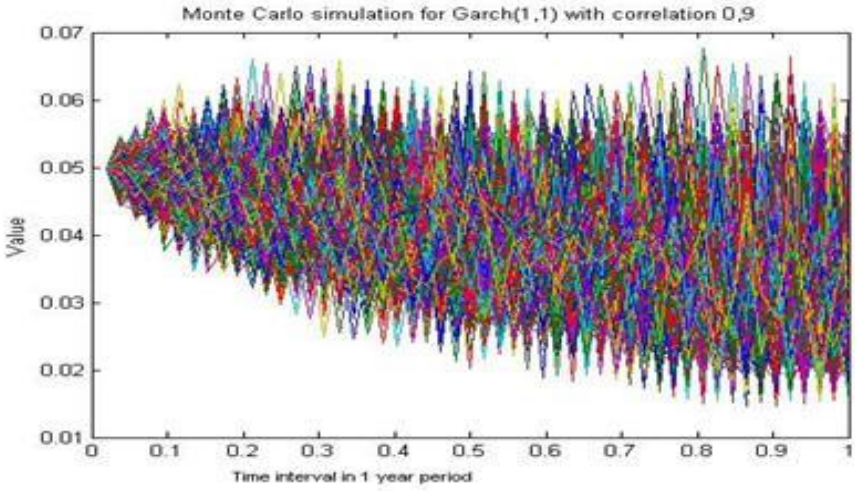


4.38. att. *AR(1)* modeļa atlikumu un atlikumu kvadrāta autokorelācijas (*ACF*).

Kā zināms no [47,49], *GARCH(1,1)* stohastiskās difūzijas aproksimācija ir aprakstāma šādā formā:

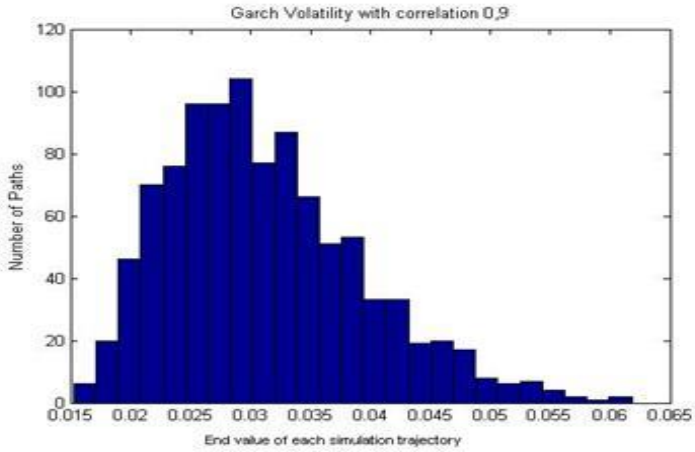
$$d\sigma_t^2 = (\omega + (\alpha^2 k - \theta)\sigma_t^2 dt + \alpha\sqrt{1+2k}\ \sigma_t^2 dW(t) \qquad (4.2)$$

$$k := \sum_{m=1}^{\infty} Corr\{y_{t+m}, y_t\} = \frac{\rho}{1-\rho}$$



4.39. att. Svārstīguma trajektorijas (1000 trajektorijas) imitācijas viena gada periodam.

Parametri $\alpha = 0{,}14011, \theta = 0{,}53541, \omega = 0{,}0004499$ tika iegūti ar Matlab vienkāršam *GARCH(1,1)* svārstīguma diferences vienādojumam (skat. 5.pielikumu). Zinot parametrus un pieņemot, ka korelācijas parametrs vienādojumā (4.2) k = 9 (t.i., korelācijas koeficients ir 0,9), vienādojumu (4.2) var pārrakstīt diskrētā formā un veikt Montekarlo imitācijas (1000 trajektorijas, laika periods – 1 gads) Matlab programpaketē, izmantojot vienkāršu kodu (rezultāti parādīti 4.39. attēlā). Svārstīguma process 4.39. attēlā ir dilstošs. Tas dod pamatu ņemt vērā zemāku svārstīguma vērtību nekā tirgū novērtēto attiecīgajā laika momentā.



4.40. att. Ģenerēto trajektoriju pēdējo vērtību sadalījuma histogramma.

Kā redzams 4.40. attēlā, sagaidāmā svārstīguma izkliede ir ar pozitīvu asimetriju (asimetriska pa labi) un iespējamo vērtību 25% apgabalā. *Tesla Motors Inc.* Eiropas tipa *call* opcijas cenas aprēķinam var izvēlēties par 10 procentu punktiem lielāku prēmiju, lai izveidotu nelielu rezervi neparedzētiem gadījumiem.

4.3. Tesla Motors Inc akciju opciju pārcenojums

Tagad ir iespējams iegūt izteiksmes Eiropas tipa *call* opciju līgumu piedāvājuma cenas aprēķinam, ņemot vērā, ka cenas dinamiku $S(t)$ apraksta diferenciālvienādojums (4.1). Robežnosacījumi Eiropas opciju līgumu piedāvājumam ir doti formā $\mathrm{C(S(T),T) = max(S(t) - K; 0)}$ un $\mathrm{C(0,t) = 0}$, kur K ir opcijas līguma izpildes cena un T ir laiks līdz iespēju līguma termiņa beigām. Izmantojot labi zināmu tehniku, iegūstam šādu rezultātu:

$$C(S(t),t) = S(t)N(d_1) - K\exp(-(\mu + \sigma^2 k)(T-t))N(d_2) \tag{4.3}$$

$$d_1 = \frac{\log(S(t)/K) + (\mu + \sigma^2 k + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2k))(T-t)}{\sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)}},$$

kur

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(1+2k)(T-t)}$$

un N() ir standarta normālā sadalījuma kumulatīvā funkcija.

Tagad vienādojumā (4.3) ievietojot divus svārstīguma novērtējumus, kas iegūti ar Montekarlo metodi, izmantojot 35% amortizāciju un tirgus svārstīgumu, kā arī citus parametrus – gada procentu likmi (1% gadā), opcijas izpildes cenu 380 USD un izpildes termiņu 1 gads, iegūstam jaunu Teslu Motors Inc. akciju ar *out of the money* Eiropas tipa *call* opciju līgumu cenas novērtējumu.

Tesla Motors, Inc. akciju opcijas pārcenojums 4.1. tabula

Opcijas cena	**Bleka–Šoulza formula**	**Piedāvātā pieeja**
Opcijas termiņš	1 gads	1 gads
Izpildes cena	380 USD	380 USD
Svārstīgums	57%	35%
Gada % likme	1%	1%
Cena	**5,22 USD**	**1,36 USD; ja ρ =0,2**
		102,5 USD; ja ρ =0,9

Dati 4.1.tabulā var palīdzēt pieņemt lēmumu vērtspapīru portfeļa pārvaldniekam, riska analītiķim vai jebkurai citai personai, kas piedalās opciju līgumu pārdošanā. Kā

redzams tabulā, opciju līgumu cenas jaunais novērtējums, ar mazu autokorelācijas koeficientu *Tesla Motors Inc* akcijām, ir zemāks nekā finanšu tirgū piedāvātais. Šis rezultāts nav spēkā, ja tiek izmantota liela autokorelācijas koeficienta vērtība. Maza autokorelācijas koeficienta gadījumā vienādojums (4.6) ar *GARCH(1,1)* procesa svārstību novērtējumu iesaka pārdot *Tesla Motors Inc* Eiropas tipa *call* līgumu, jo tā cena finanšu tirgū ir novērtēta pārāk augstu.

4.4. Secinājumi

Esam ieguvuši *Tesla Motors Inc* Eiropas tipa *call* opciju līguma cenas novērtējumu, ņemot vērā peļņas un svārstīguma autokorelācijas koeficientu. Šie rezultāti liecina, ka, pat ar sliktām prognozēšanas iespējām, izmantojot autokorelācijas koeficientu, iegūtie rezultāti ir būtiski atšķirīgi no Bleka–Šoulza formulas. Tātad, Eiropas tipa *call* opciju līgumu pārdošana varētu būt ienesīga, pareizi novērtējot peļņas un svārstīguma autokorelācijas koeficientu, kā ir parādīts *Tesla Motors Inc* gadījumā (Ilmannena [46] hipotēzi noraidīt nevar). Tādējādi ir praktiski demonstrēts opciju cenas aprēķināšanā iekļautais autokorelācijas algoritms, kas labāk izskaitļo opciju prēmijas un ļauj tām mainīties, vadoties pēc situācijas finanšu tirgū.

PROMOCIJAS DARBA REZULTĀTI UN SECINĀJUMI

Promocijas darba mērķis ir izstrādāt riska prognozēšanas modeļu uzbūvēšanas metodes un algoritmus, ņemot vērā novērojumu kļūdu atlikumu nelineāro sakarību. Metodes būtība ir modeļu konstruēšana, ņemot vērā atlikumu korelācijas, ievērojot „smagās astes" un „augstās virsotnes" izlases sadalījumos. Tādai neparametrisko modeļu uzbūves metodei, izmantojot kopulu blīvuma funkcijas nosacītos momentus, ir plašs pielietojums finanšu, makroekonomisko un apdrošināšanas laikrindu prognozēšanā. Korelācijas izdalīšana modeļu atlikumos un tālāka modeļu novērtēšana ļauj precīzāk noteikt atvasināto finanšu instrumentu cenas.

Promocijas darba mērķis ir sasniegts, plānotie uzdevumi izpildīti. Iegūti šādi rezultāti:

1. definēts neparametrisks Markova modelis, un izstrādāts šī modeļa blīvumu atrašanas paņēmiens, izmantojot Arhimēda tipa kopulas.
2. Ar Markova modeli, kurā izdalīts korelācijas koeficients, ir pārveidoti *GARCH(1,1)* modeļa atlikumi un ieviesta atlikumu korelācijas iekļaušanas metode.
3. Izstrādāta Hestona modeļa diskretizācijas metode.
4. Otrajā punktā izmantotās metodes lietderības pārbaudei veikta *GARCH(1,1)* konverģences pārbaude uz stacionaritāti un Gamma sadalījumu, ņemot vērā korelācijas koeficientu.
5. Izmantojot modeli ar autokorelācijas korekciju (2.punkts), tika pārveidots Bleka – Šoulza opciju cenošanas modelis un ar to saistītie opciju jutīguma mēri ("*Option Greeks"*). Šī pieeja ļauj precīzāk izvērtēt cenas, ņemot vērā aktīvu ienesīguma "smagās astes". Veikts autokorelācijas ieviešanas metodes apkopojums, balstoties uz *Tesla Motors Inc* akciju opciju noteikšanas tehniku un veicot Montekarlo imitācijas sagaidāmajam svārstīgumam, kā arī opciju pārcenošanu. Noteiktā sistēma palīdz pilnīgāk izzināt finanšu tirgus situāciju, opciju cenas un izdarīt pamatotus lēmumus attiecībā uz akciju vai opciju pirkšanu vai pārdošanu.

No rezultātiem izrietošie galvenie secinājumi:

1. stohastisko modeļu pārveidošana diskrētajā laikā dod iespēju noteikt modeļa atbilstību novērojumu datiem, kas savukārt palielina prognozes precizitāti.
2. Nelineārie (neparametriskie), uz kopulām bāzētie Markova modeļi ļauj modelēt dažāda veida atkarības – uz sadalījuma centru vai "astēm" (t.i. lineāras, nelineāras, asimetriskās u.c.).

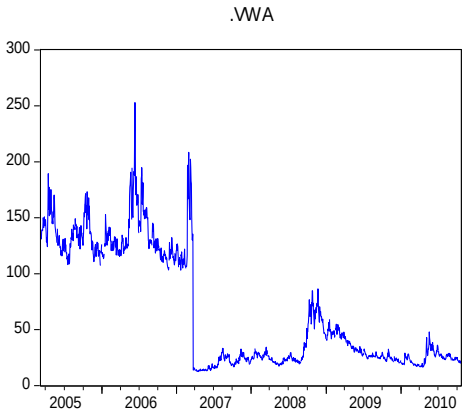
3. *GARCH(1,1)* modeļa ar autokorelētajiem atlikumiem konverģence uz stacionāro atrisinājumu ir atkarīga no korelācijas koeficienta vērtības ─ jo šī vērtība lielāka, jo vājāka ir konverģence.
4. Modeļu atlikumu korelāciju novērtēšana palīdz noteikt atvasināto finanšu instrumentu cenas.

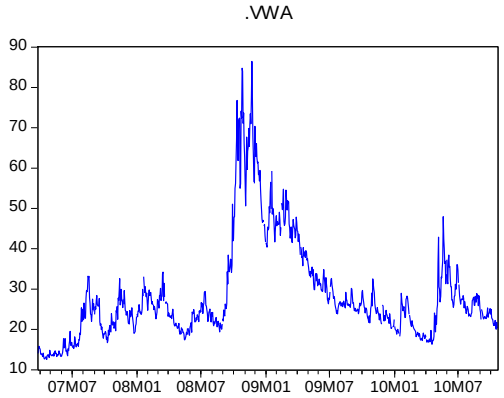
Promocijas darbā izvirzītās tēzes ir apstiprinātas.

Darba aprobācija veikta, prezentējot darba rezultātus 14 starptautiskās zinātniskās konferencēs un semināros, publicējot 10 zinātniskas publikācijas starptautiskos zinātniskos izdevumos, pielietojot metodes Latvijas Republikas Valsts kasē kopš 2008. gada. Izstrādātās metodes dažādu finanšu risku pārcenošanai lieto AS "Swedbanka" kopš 2012. gada.

PIELIKUMI

1. Pielikums, (*Finanšu laikrindas un sērijveida korelācijas*)





Sample: 3/27/2007 10/21/2010
Included observations: 902

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.977	0.977	864.18	0.000
		2	0.960	0.118	1699.6	0.000
		3	0.948	0.113	2514.6	0.000
		4	0.934	-0.012	3306.9	0.000
		5	0.925	0.098	4084.0	0.000
		6	0.913	-0.030	4842.3	0.000
		7	0.904	0.063	5586.3	0.000
		8	0.896	0.048	6319.2	0.000
		9	0.890	0.061	7043.0	0.000
		10	0.883	-0.008	7756.3	0.000
		11	0.870	-0.129	8449.1	0.000
		12	0.857	-0.046	9121.5	0.000
		13	0.845	0.012	9777.2	0.000
		14	0.835	0.020	10417.	0.000
		15	0.823	-0.045	11040.	0.000
		16	0.813	0.032	11647.	0.000
		17	0.800	-0.063	12237.	0.000
		18	0.787	-0.053	12808.	0.000
		19	0.776	0.020	13364.	0.000
		20	0.762	-0.052	13901.	0.000
		21	0.748	-0.015	14419.	0.000
		22	0.737	0.046	14923.	0.000
		23	0.724	-0.028	15409.	0.000
		24	0.715	0.059	15884.	0.000
		25	0.707	0.033	16348.	0.000
		26	0.694	-0.075	16797.	0.000
		27	0.684	0.024	17232.	0.000
		28	0.669	-0.074	17650.	0.000
		29	0.654	-0.059	18049.	0.000
		30	0.642	0.047	18435.	0.000
		31	0.628	-0.010	18804.	0.000
		32	0.613	-0.058	19156.	0.000
		33	0.600	0.003	19494.	0.000
		34	0.588	0.008	19819.	0.000
		35	0.580	0.077	20135.	0.000
		36	0.570	-0.009	20441.	0.000

Sample: 3/27/2007 10/21/2010
Included observations: 901

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.130	-0.130	15.259	0.000
		2	-0.106	-0.125	25.365	0.000
		3	0.033	0.002	26.370	0.000
		4	-0.099	-0.110	35.173	0.000
		5	0.048	0.023	37.247	0.000
		6	-0.057	-0.075	40.228	0.000
		7	-0.046	-0.056	42.194	0.000
		8	-0.026	-0.072	42.820	0.000
		9	0.021	0.002	43.220	0.000
		10	0.146	0.130	62.711	0.000
		11	0.001	0.041	62.711	0.000
		12	-0.049	-0.020	64.929	0.000
		13	-0.014	-0.025	65.108	0.000
		14	0.034	0.042	66.192	0.000
		15	-0.037	-0.037	67.461	0.000
		16	0.046	0.060	69.373	0.000
		17	0.024	0.049	69.882	0.000
		18	-0.064	-0.026	73.658	0.000
		19	0.071	0.047	78.312	0.000
		20	0.014	0.011	78.491	0.000
		21	-0.071	-0.058	83.196	0.000
		22	0.032	0.023	84.158	0.000
		23	-0.079	-0.067	89.922	0.000
		24	-0.017	-0.043	90.181	0.000
		25	0.094	0.070	98.313	0.000
		26	-0.046	-0.033	100.25	0.000
		27	0.081	0.068	106.33	0.000
		28	0.033	0.055	107.35	0.000
		29	-0.078	-0.058	113.09	0.000
		30	0.038	0.002	114.44	0.000
		31	0.024	0.058	114.96	0.000
		32	-0.035	-0.013	116.14	0.000
		33	-0.025	-0.016	116.71	0.000
		34	-0.093	-0.085	124.84	0.000
		35	0.050	0.001	127.17	0.000
		36	-0.004	-0.039	127.18	0.000

Null Hypothesis: _VWA has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=20)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.520692	0.1108
Test critical values:	1% level	-3.437401	
	5% level	-2.864542	
	10% level	-2.568422	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_VWA)
Method: Least Squares
Date: 10/22/10 Time: 11:29
Sample (adjusted): 3/30/2007 10/21/2010
Included observations: 899 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_VWA(-1)	-0.017440	0.006919	-2.520692	0.0119
D(_VWA(-1))	-0.136687	0.033265	-4.109041	0.0000
D(_VWA(-2))	-0.117250	0.033177	-3.534047	0.0004
C	0.507373	0.216561	2.342864	0.0194

R-squared	0.039019	Mean dependent var	0.004928
Adjusted R-squared	0.035797	S.D. dependent var	2.637726
S.E. of regression	2.590084	Akaike info criterion	4.745697
Sum squared resid	6004.138	Schwarz criterion	4.767060
Log likelihood	-2129.191	Hannan-Quinn criter.	4.753858
F-statistic	12.11319	Durbin-Watson stat	1.997923
Prob(F-statistic)	0.000000		

Null Hypothesis: D(_VWA) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=20)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-25.50606	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.437401	
	5% level	-2.864542	
	10% level	-2.568422	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_VWA,2)
Method: Least Squares
Date: 10/22/10 Time: 11:31
Sample (adjusted): 3/30/2007 10/21/2010
Included observations: 899 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(_VWA(-1))	-1.270943	0.049829	-25.50606	0.0000
D(_VWA(-1),2)	0.124712	0.033143	3.762776	0.0002
C	0.006799	0.086643	0.078476	0.9375

R-squared	0.571769	Mean dependent var	-0.000567
Adjusted R-squared	0.570813	S.D. dependent var	3.965374
S.E. of regression	2.597811	Akaike info criterion	4.750547
Sum squared resid	6046.763	Schwarz criterion	4.766569
Log likelihood	-2132.371	Hannan-Quinn criter.	4.756667
F-statistic	598.1637	Durbin-Watson stat	1.999499
Prob(F-statistic)	0.000000		

Dependent Variable: _VWA
Method: Least Squares
Date: 10/22/10 Time: 11:32
Sample (adjusted): 3/28/2007 10/21/2010
Included observations: 901 after adjustments
Convergence achieved after 2 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.996586	0.002800	355.8726	0.0000

R-squared	0.956365	Mean dependent var	28.68467
Adjusted R-squared	0.956365	S.D. dependent var	12.60561
S.E. of regression	2.633196	Akaike info criterion	4.775383
Sum squared resid	6240.347	Schwarz criterion	4.780714
Log likelihood	-2150.310	Hannan-Quinn criter.	4.777419
Durbin-Watson stat	2.255390		

Inverted AR Roots 1.00

Dependent Variable: D(_VWA)
Method: Least Squares
Date: 10/22/10 Time: 11:37
Sample (adjusted): 4/16/2007 10/21/2010
Included observations: 889 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.008446	0.060579	0.139416	0.8892
AR(12)	-0.020125	0.033786	-0.595658	0.5516
AR(11)	0.038574	0.034166	1.129019	0.2592
AR(10)	0.134075	0.034191	3.921393	0.0001
AR(9)	0.027100	0.034178	0.792902	0.4280
AR(8)	-0.053933	0.034338	-1.570623	0.1166
AR(7)	-0.059266	0.034285	-1.728626	0.0842
AR(6)	-0.078956	0.034284	-2.302963	0.0215
AR(5)	0.004946	0.034341	0.144030	0.8855
AR(4)	-0.112299	0.034173	-3.286231	0.0011
AR(3)	-0.006772	0.034184	-0.198107	0.8430
AR(2)	-0.139733	0.034154	-4.091274	0.0000
AR(1)	-0.154574	0.033779	-4.576062	0.0000

R-squared	0.075864	Mean dependent var	0.008470
Adjusted R-squared	0.063204	S.D. dependent var	2.651765
S.E. of regression	2.566596	Akaike info criterion	4.737553
Sum squared resid	5770.576	Schwarz criterion	4.807600
Log likelihood	-2092.842	Hannan-Quinn criter.	4.764327
F-statistic	5.992668	Durbin-Watson stat	2.001004
Prob(F-statistic)	0.000000		

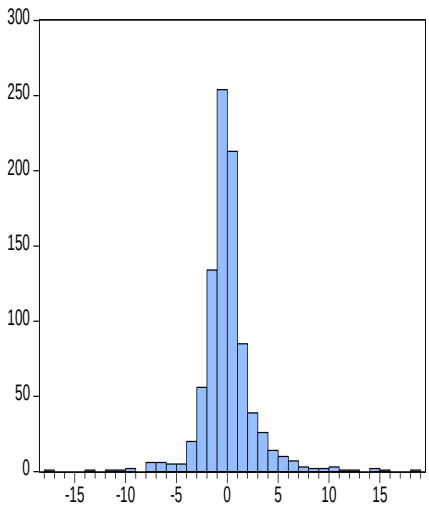
Inverted AR Roots	.74	.69+.50i	.69-.50i	.27
	.25+.83i	.25-.83i	-.26+.78i	-.26-.78i
	-.63-.13i	-.63+.13i	-.63+.51i	-.63-.51i

Method: Least Squares
Date: 10/22/10 Time: 11:45
Sample (adjusted): 3/29/2007 10/21/2010
Included observations: 900 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.129916	0.033062	-3.929438	0.0001

R-squared	0.016882	Mean dependent var	0.005078
Adjusted R-squared	0.016882	S.D. dependent var	2.636262
S.E. of regression	2.613916	Akaike info criterion	4.760686
Sum squared resid	6142.467	Schwarz criterion	4.766022
Log likelihood	-2141.309	Hannan-Quinn criter.	4.762725
Durbin-Watson stat	2.032530		

Inverted AR Roots -.13



Series: RESID
Sample 3/27/2007 10/21/2010
Observations 902

Mean	0.023409
Median	-0.177485
Maximum	18.17161
Minimum	-17.35701
Std. Dev.	2.653096
Skewness	0.774449
Kurtosis	13.16860
Jarque-Bera	3976.296
Probability	0.000000

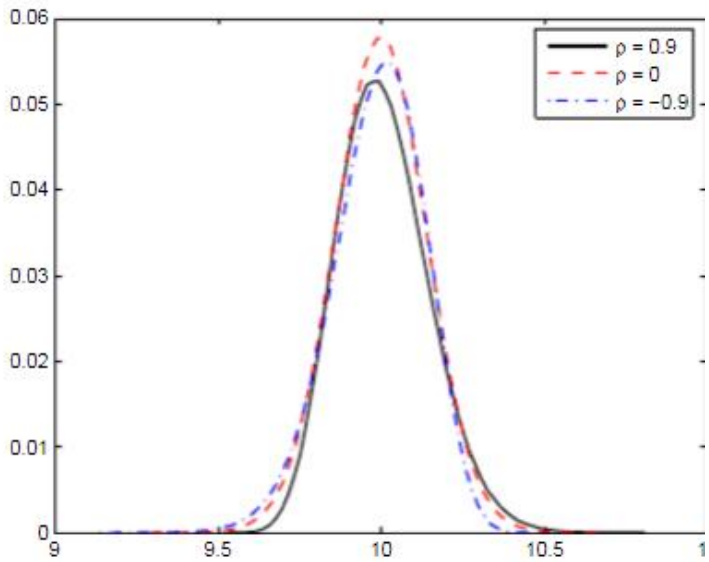
```
function [S,t,fh] = GBM_fcn (mu,sigma,S0,N,T,dt)

%% geometric brownian motion
%
```

```
% [S,t] = GBM_fcn (mu,sigma,S0,N,T,dt)
% returns
%       S - matrix of Wiener process paths
%       t - corresponding timebase
% where
%       mu - mean
%       sigma - volatility
%       S0 - intial value of Stock
%       N - number of paths
%       T - stop time
%       dt - timestep
%
% Given mu, sigma dt and S0 we generate random stock path and
% create a histogram of the final prices. We create the return
% series by using the formula:
  %
%   S (n+1) = S (n)*exp ((mu-sigma^2/2)*dt + sigma*dW*sqrt (dt))
%
% Example
%
%   [StockPaths,Timebase] = GBM_fcn (.5,.4,50,100,2,1/500);
%
% see also
%       randn

%% Define Variables

if nargin < 1 || isempty (mu)
    mu = .4;
end
if nargin < 2 || isempty (sigma)
    sigma = .6;
end
if nargin < 3 || isempty (S0)
    S0 = 100;
end
if nargin < 4 || isempty (N)
    N = 500;
end
if nargin < 5 || isempty (T)
    T = 1;
end
if nargin < 6 || isempty (dt)
    dt = 1/1000;
end

M = floor (T/dt); % Number of steps to take

%% Generate the Wiener process
% take the random numbers created in dS and insert into the
% bottom M-1 rows of the S matrix, so that we can use
% cumulative product on S to generate the return paths and
% avoid using a for loop over the rows.

   S = S0*ones (M,N); % Initialise S matrix
dS = nCreateProcess (M,N);
% take the random numbers created in dS and insert into the
% bottom M-1 rows of the S matrix, so that we can use
% cumulative product on S to generate the return paths and
% avoid using a for loop over the rows.
    S (2:end,:) = dS;
% Create final paths using cumulative product
S = cumprod (S);

%% ------------------------------------------------------------
      function dS = nCreateProcess (M,N)
```

```
        dW = randn (M-1,N); % generate Wiener process
        % Create dS according to equation
        dS = exp ((mu-sigma^2/2)*dt + sigma*dW*sqrt (dt));

    end

%% Plot the results
t = [1:M]*dt; % # ok

plot (t,S)
xlabel (' Time')
ylabel (' Value')
title (' {\bf GBM Model of Asset Paths}')

%% Plot Histogram of final values

figure
hist (S (end,:),25)
xlabel (' End Value')
ylabel (' Number of Paths')
title (' {\bf GBM Model of Asset Paths}')

fh = @nCreateProcess;

end
```

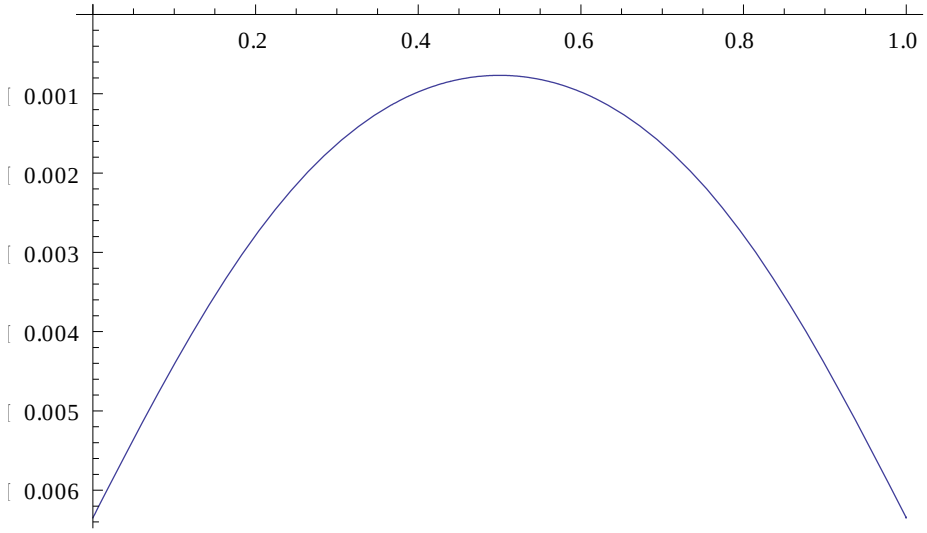
Matlab programma korelācijas koeficienta attēlošanai Hestona modelī:

```
S0=10;V0=.01;r=0;k=2;theta=.01;sigma=.1;delT=.02;rho=-0.9;
numberOfSimulations=1000000;
i=1:numberOfSimulations;
 NormRand1=randn(1,numberOfSimulations);
NormRand2=randn(1,numberOfSimulations);
S=zeros(1,numberOfSimulations);V=zeros(1,numberOfSimulations);
 V(i)=V0+k*(theta-V0)*delT+sigma*sqrt(V0)*...(rho*NormRand1+sqrt(1-
rho^2)*NormRand2)*sqrt(delT);V=abs(V);%preventsnegativevolatilities
S(i)=S0+r*S0*delT+S0*V.^(0.5).*NormRand1*sqrt(delT);
```

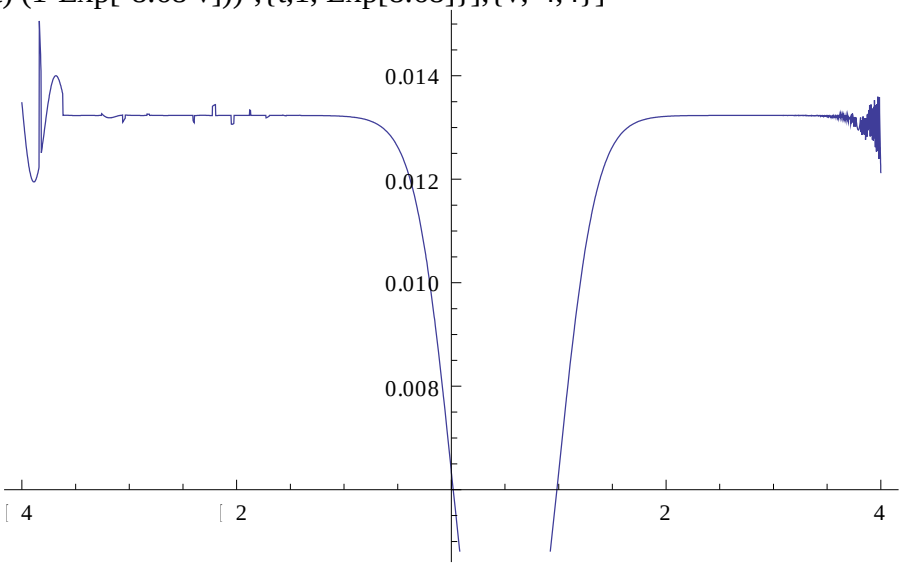


2.Pielikums. *(Neparametriskās regresijas un to definēšanas veids ar kopulām)*

Plot[NIntegrate[-1/t (1/8.68 Log[t]-(1/8.68 Log[t] (Exp[8.68]-1))/((1-1/t) (Exp[8.68]-t))+t/(Exp[8.68]-t))^2 ((1-Exp[-8.68]) Exp[-8.68 v] 1/t)/(1-Exp[-8.68]-(1-1/t) (1-Exp[-8.68 v]))^2,{t,1,Exp[8.68]}],{v,0,1}]



Plot[NIntegrate[1/ t (1/8.68 Log[t]-(1/8.68 Log[t] (Exp[8.68]-1))/((1-1/t) (Exp[8.68]-t))+t/(Exp[8.68]-t))^2 ((1-Exp[-8.68]) Exp[-8.68 v] 1/t)/(1-Exp[-8.68]-(1-1/t) (1-Exp[-8.68 v]))^2,{t,1, Exp[8.68]}],{v,-4,4}]

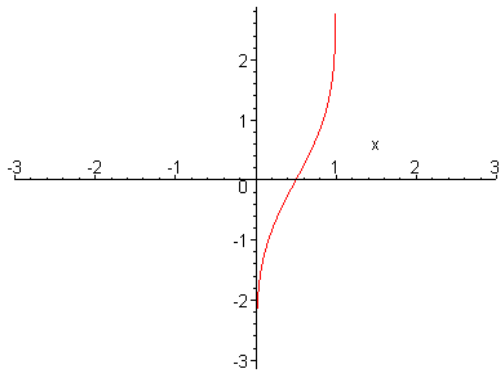


Normālās kopulas $C(u,v)$ *, nosacītās sadalījuma funkcijas* $C_1(u,v)$ *un blīvuma funkcijas* $c(u,v)$ *attēlu iegūšanai, kad* $a = -0.5$

```
with(plots):
with(stats):
a:=-0.5;
normicdf:=x->statevalf[icdf,normald](x);
plot([normicdf(x)],x=-3..3);
```

$a := -.5$

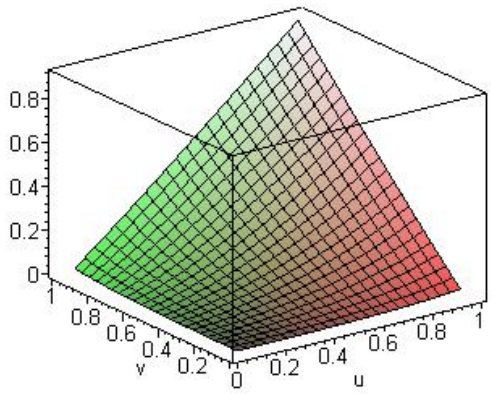
$$normicdf := statevalf_{icdf,\ normald}$$



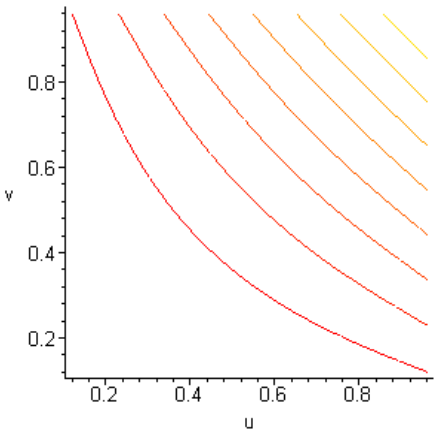
C:=(u,v)->int(int(1/(2*Pi*sqrt(1-a*a))*exp(-1/(2*(1-a*a))*(s^2-2*a*s*t+t^2)),s=-infinity..normicdf(v)),t=-infinity..normicdf(u));

$$C := (u, v) \rightarrow \int_{-\infty}^{normicdf(u)} \int_{-\infty}^{normicdf(v)} \frac{1}{2} \frac{e^{\left(-\frac{s^2 - 2\,a\,s\,t + t^2}{2 - 2\,a^2}\right)}}{\pi \sqrt{1 - a^2}}\, ds\, dt$$

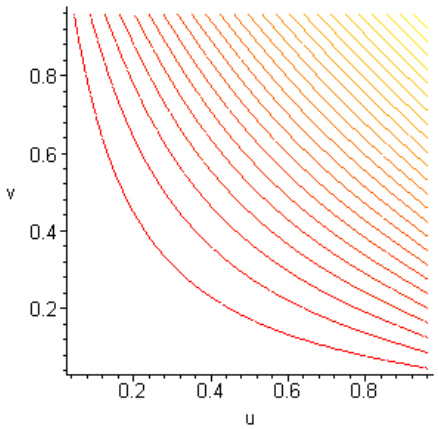
plot3d(C(u,v),u=0..1,v=0..1);



contourplot(C(u,v),u=0..1,v=0..1);



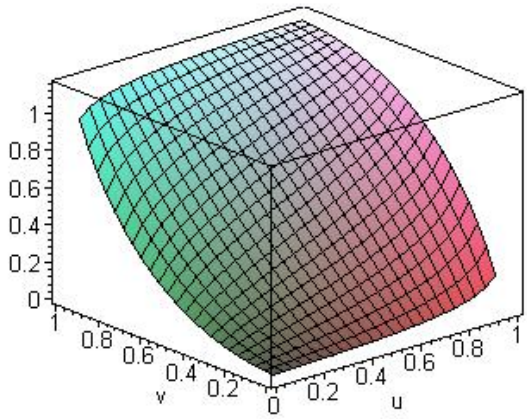
contourplot(C(u,v),u=0..1,v=0..1,contours=25);



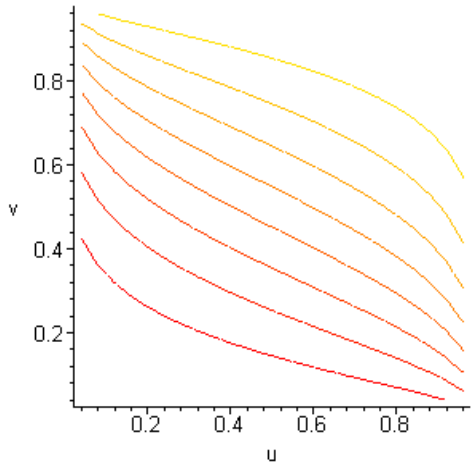
C1:=(u,v)->int(1/(sqrt(2*Pi)*(1-a*a))*exp(-(s-a*normicdf(u))^2/(2*(1-a*a))),s=-infinity..normicdf(v));

$$C1 := (u, v) \rightarrow \int_{-\infty}^{\mathrm{normicdf}(v)} \frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{(s - a\,\mathrm{normicdf}(u))^2}{2 - 2\,a^2}\right)}}{\sqrt{2\,\pi}\,(1 - a^2)}\,ds$$

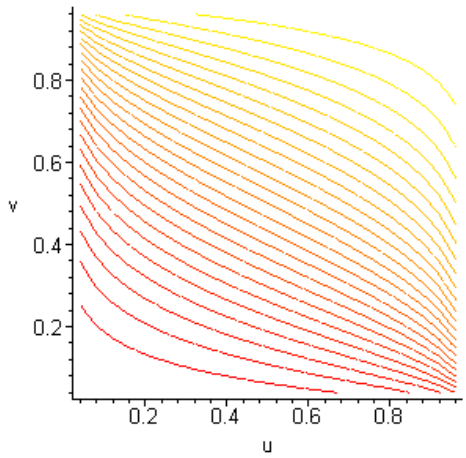
plot3d(C1(u,v),u=0..1,v=0..1);



contourplot(C1(u,v),u=0..1,v=0..1);



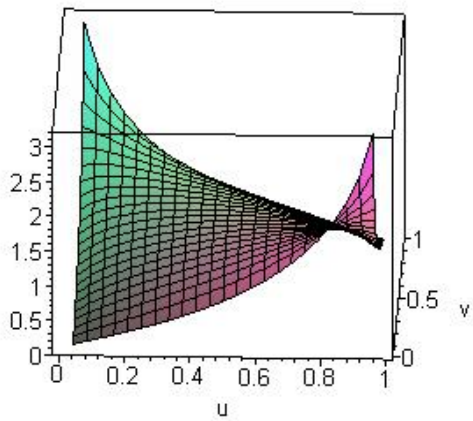
contourplot(C1(u,v),u=0..1,v=0..1,contours=25);



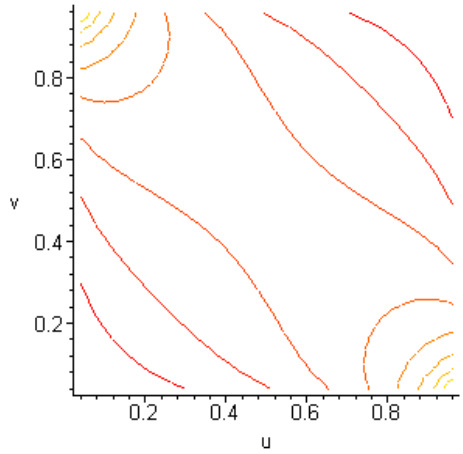
c:=(u,v)->1/((1-a^2)^(1/2)*exp((a^2*normicdf(u)*normicdf(u)-2*a*normicdf(u)*normicdf(v)+a^2*normicdf(v)^2)/(2*(1-a^2))));

$$c := (u, v) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-a^2}\ \mathbf{e}^{\left(\frac{a^2\,\mathrm{normicdf}(u)^2 - 2\,a\,\mathrm{normicdf}(u)\,\mathrm{normicdf}(v) + a^2\,\mathrm{normicdf}(v)^2}{2-2\,a^2}\right)}}$$

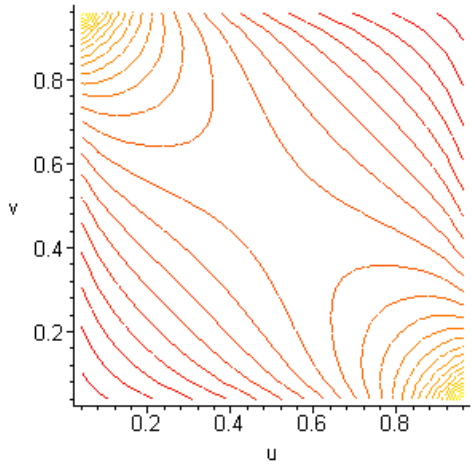
plot3d(c(u,v),u=0..1,v=0..1);



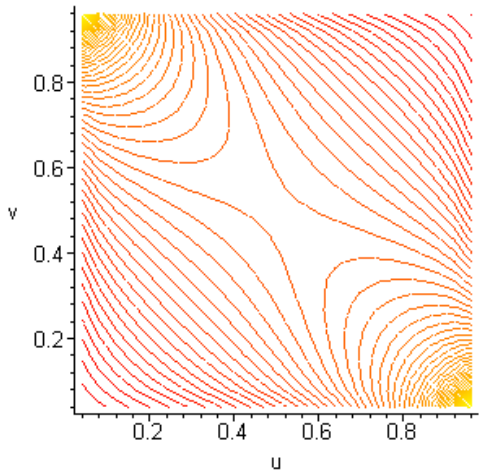
contourplot(c(u,v),u=0..1,v=0..1);



contourplot(c(u,v),u=0..1,v=0..1,contours=25);



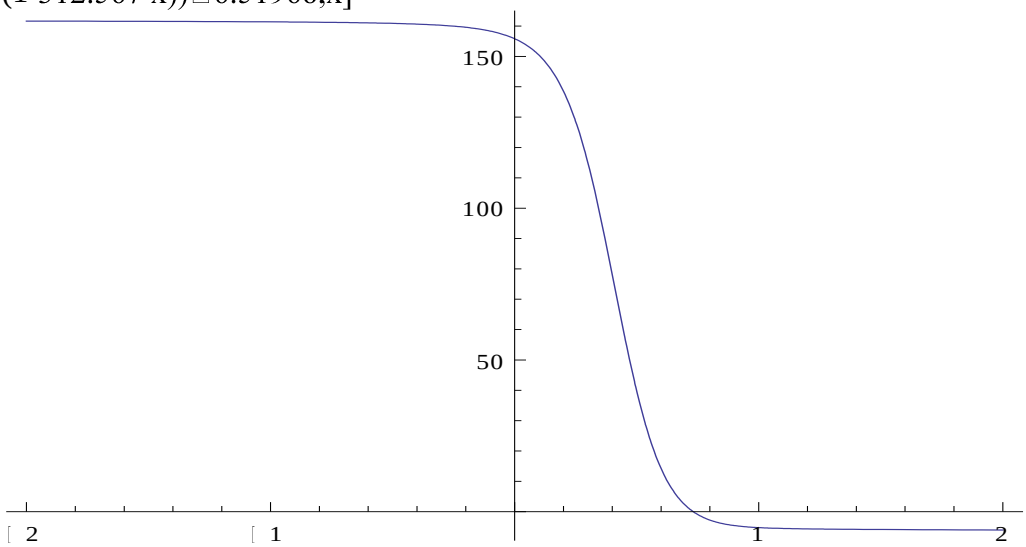
contourplot(c(u,v),u=0..1,v=0..1,contours=55);



Solve [((1/x)*(1-Exp[-x*12.13256]*(1+12.13256*x))+0.5*(324.7*324.7-12.13256*12.13256)*x*Exp[-x*12.13256])/(1-(1-312.5674*x)*Exp[-x*12.13256])□6.51968,x]

Solve::tdep : The equations appear to involve the variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. □

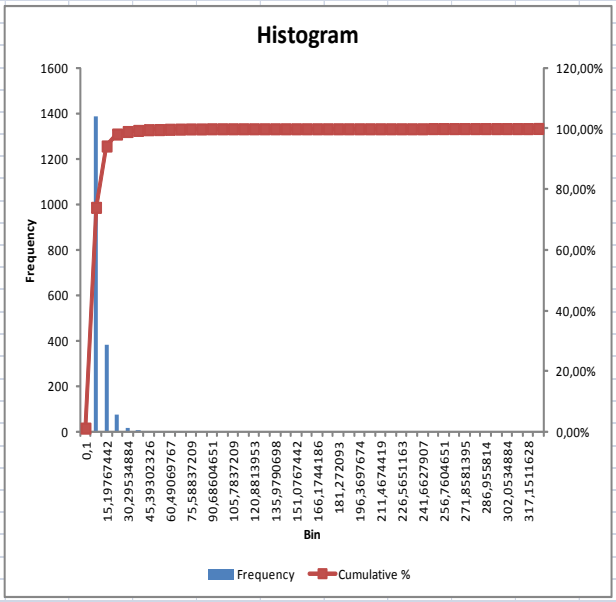
NSolve[(52641.4 □(-12.1326 x x+(1-□(-12.1326 x (1+12.1326 x))/x)/(1-□(-12.1326 x (1-312.567 x))□6.51968,x]



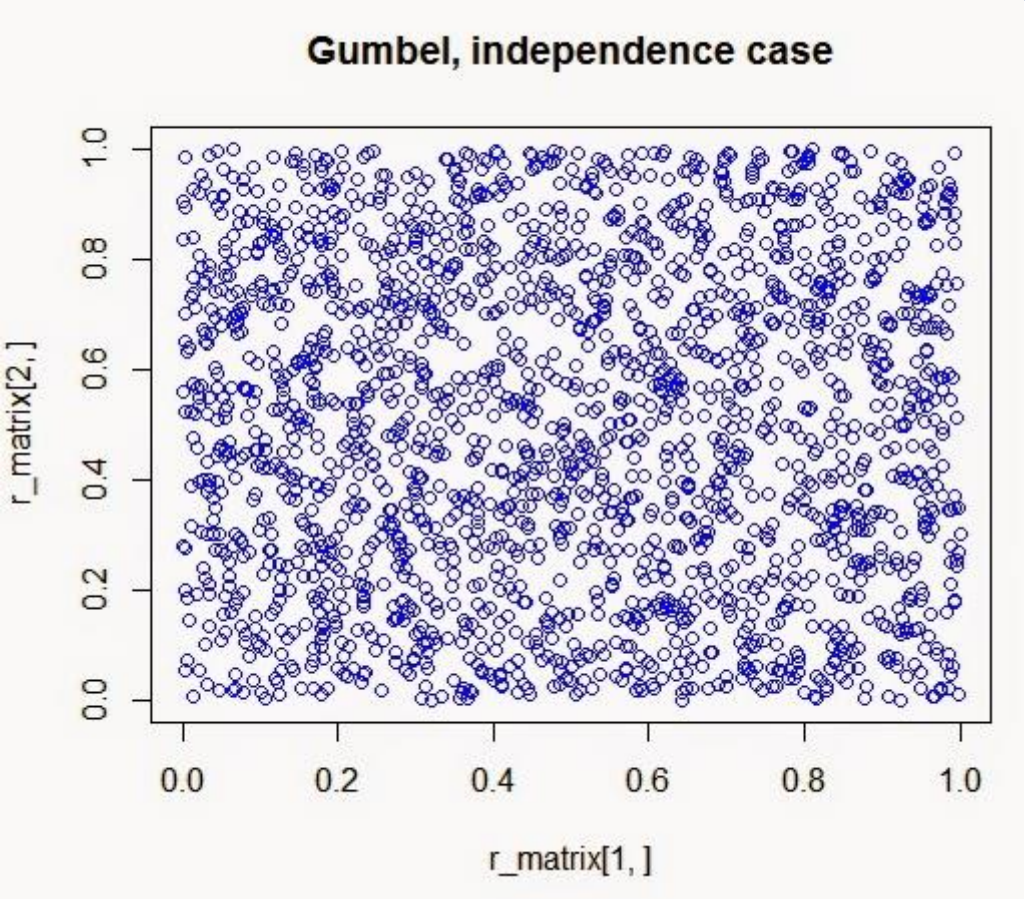
3.Pielikums. *(Sadalījuma meklēšana datiem enerģētikā)*

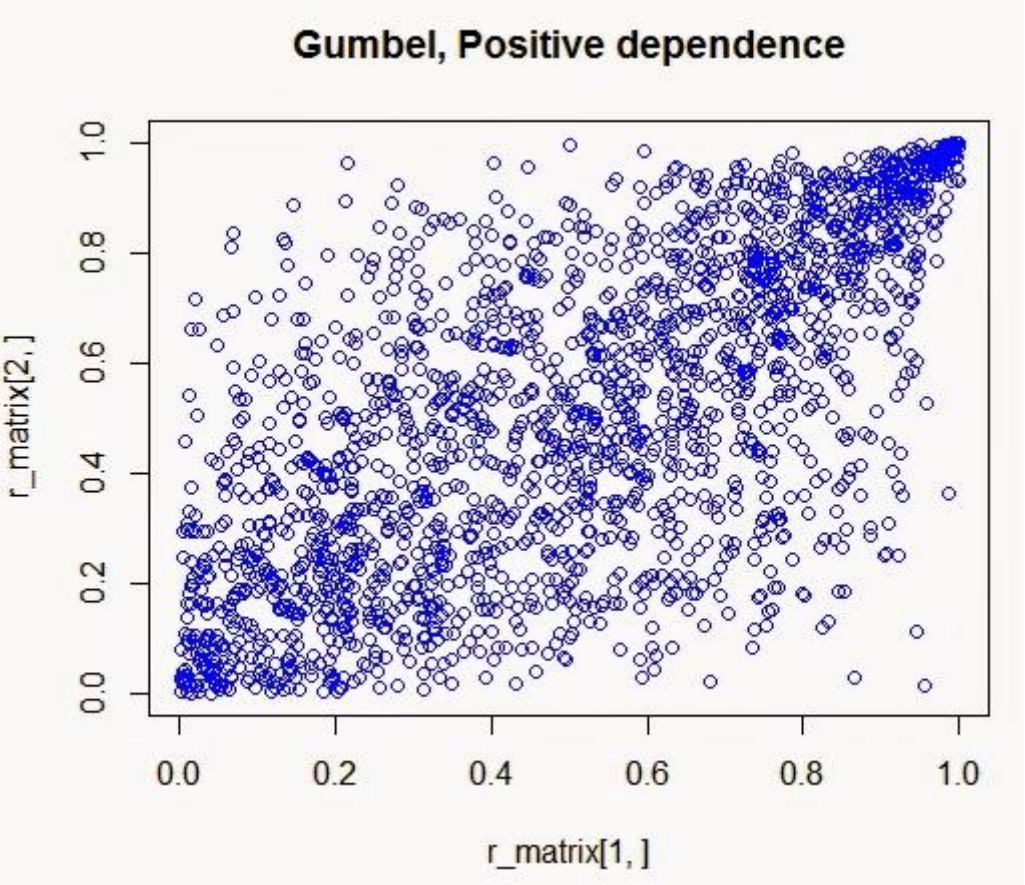
Datums	T2139
09.04.1979	242
11.04.1979	84,2
13.04.1979	11,4
16.04.1979	1,6
18.04.1979	16,4
20.04.1979	5,8
23.04.1979	4,2
28.04.1979	8,6
03.05.1979	41,6
07.05.1979	42,2
11.05.1979	10,2
14.05.1979	9,2
15.05.1979	8,8
18.05.1979	6
21.05.1979	4
25.05.1979	54,8
28.05.1979	15,8
04.06.1979	8,2
06.06.1979	7,5
08.06.1979	4,8
12.06.1979	12
15.06.1979	24,4
18.06.1979	14,8
22.06.1979	10
25.06.1979	14,4
29.06.1979	23
02.07.1979	9,4
06.07.1979	12
03.09.1979	2,1
10.09.1979	2,2
17.09.1979	4,1
24.09.1979	2,8
01.10.1979	2,8
08.10.1979	2,2
16.10.1979	1,8
22.10.1979	2,6
29.10.1979	2,4
05.11.1979	1,8
12.11.1979	2

Bin	*Frequency*	*Cumulative %*
0,1	24	1,26%
7,648837209	1386	74,02%
15,19767442	385	94,23%
22,74651163	75	98,16%
30,29534884	16	99,00%
37,84418605	7	99,37%
45,39302326	4	99,58%
52,94186047	1	99,63%
60,49069767	2	99,74%
68,03953488	1	99,79%
75,58837209	1	99,84%
83,1372093	0	99,84%
90,68604651	1	99,90%
98,23488372	0	99,90%
105,7837209	0	99,90%
113,3325581	0	99,90%
120,8813953	0	99,90%
128,4302326	0	99,90%
135,9790698	0	99,90%
143,527907	0	99,90%
151,0767442	0	99,90%
158,6255814	0	99,90%
166,1744186	0	99,90%
173,7232558	0	99,90%
181,272093	0	99,90%
188,8209302	0	99,90%
196,3697674	0	99,90%
203,9186047	0	99,90%
211,4674419	0	99,90%
219,0162791	0	99,90%
226,5651163	0	99,90%
234,1139535	0	99,90%
241,6627907	0	99,90%
249,2116279	1	99,95%
256,7604651	0	99,95%
264,3093023	0	99,95%
271,8581395	0	99,95%
279,4069767	0	99,95%



a =	12,13256		312,5674
b=	324,7		
Xmean=	6,51968		






```
Sub countnumbers() KS-test
With Sheets("Rezults 1201")
For j = 16 To 25
For k = 5 To 14
l = 0
For i = 2 To 1905
If .Cells(i, 5).Value <= .Cells(k, 15) And .Cells(i, 5).Value > .Cells(k, 14) And .Cells(i, 4).Value <= .Cells(4, j) And
.Cells(i, 4).Value > .Cells(3, j) Then
l = l + 1
.Cells(k, j) = l
End If
Next i
Next k
Next j
End With
```

Test Kolmogorov											
Clayton		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,1	0,021398	0,038848	0,05215	0,0691	0,072771	0,080586	0,08124	0,089714	0,095584	0,092608
0,1	0,2	0,033568	0,059482	0,081077	0,120478	0,131595	0,149019	0,159527	0,174016	0,185335	0,191552
0,2	0,3	0,055317	0,085301	0,118726	0,16072	0,18426	0,21451	0,23093	0,248706	0,272358	0,29472
0,3	0,4	0,070156	0,114142	0,16072	0,208309	0,236101	0,27662	0,309315	0,339878	0,364395	0,39472
0,4	0,5	0,076995	0,124203	0,183204	0,236101	0,28195	0,333103	0,374235	0,413115	0,4532	0,49472
0,5	0,6	0,082698	0,151131	0,21451	0,277676	0,328879	0,395119	0,437748	0,491932	0,547357	0,598944
0,6	0,7	0,08124	0,161639	0,231986	0,308259	0,368955	0,438804	0,503341	0,569145	0,633238	0,68944
0,7	0,8	0,091826	0,174016	0,25293	0,333543	0,411003	0,495099	0,564921	0,637523	0,714088	0,78944
0,8	0,9	0,087136	0,183223	0,27447	0,367563	0,45848	0,546301	0,633238	0,71092	0,80264	0,888384
0,9	1	0,093664	0,19472	0,295776	0,392608	0,495776	0,596832	0,691552	0,78944	0,884161	0,966209

Test Kolmogorov		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Frank		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,1	0,006494	0,0245	0,040727	0,060861	0,067322	0,077336	0,079573	0,089066	0,095464	0,092608

0,1	0,2	0,01922	0,04621	0,071826	0,115492	0,130133	0,14999	0,161768	0,17643	0,186954	0,191552
0,2	0,3	0,043895	0,07605	0,114512	0,161603	0,189123	0,221741	0,238767	0,255432	0,276405	0,29472
0,3	0,4	0,061917	0,109156	0,161603	0,214978	0,247173	0,290056	0,322797	0,351046	0,371	0,39472
0,4	0,5	0,071546	0,122742	0,188067	0,247173	0,297765	0,351397	0,392291	0,428022	0,462043	0,49472
0,5	0,6	0,079448	0,152102	0,221741	0,291112	0,347173	0,416034	0,458435	0,509156	0,557693	0,598944
0,6	0,7	0,079573	0,16388	0,239823	0,321741	0,387011	0,459491	0,524015	0,58661	0,643895	0,68944
0,7	0,8	0,091178	0,17643	0,259656	0,34471	0,42591	0,512324	0,582386	0,652546	0,723444	0,78944
0,8	0,9	0,087016	0,184842	0,278517	0,374168	0,467322	0,556637	0,643895	0,720276	0,808606	0,888384
0,9	1	0,093664	0,19472	0,295776	0,392608	0,495776	0,596832	0,691552	0,78944	0,884161	0,966209

Test Kolmogorov		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Gumbel		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,1	0,008333	0,001882	0,005625	0,019468	0,021695	0,029202	0,030373	0,039992	0,047499	0,046558
0,1	0,2	0,002117	0,008439	0,022162	0,05806	0,068615	0,087618	0,101341	0,120343	0,137234	0,149901
0,2	0,3	0,020711	0,035086	0,061076	0,100794	0,125729	0,160167	0,18299	0,208981	0,242363	0,275745
0,3	0,4	0,039855	0,070207	0,111118	0,158365	0,189772	0,237019	0,278987	0,320954	0,358697	0,403832
0,4	0,5	0,052499	0,089158	0,144825	0,199436	0,250878	0,310769	0,363268	0,415766	0,471433	0,530268
0,5	0,6	0,064523	0,125879	0,188291	0,254926	0,313114	0,389253	0,444272	0,51302	0,584935	0,654738
0,6	0,7	0,069256	0,145903	0,217271	0,298142	0,366342	0,446158	0,522805	0,602621	0,682436	0,755916
0,7	0,8	0,085395	0,166567	0,247738	0,333134	0,417473	0,51026	0,590376	0,674715	0,764335	0,853954
0,8	0,9	0,085096	0,181807	0,275351	0,372062	0,467718	0,561261	0,654805	0,7399	0,83978	0,934379
0,9	1	0,093664	0,19472	0,295776	0,392608	0,495776	0,596832	0,691552	0,78944	0,884161	0,966209

4.Pielikums. *(GARCH(p,q) modelis ar autokorelētajiem atlikumiem)*

J.Carkova stohastiskā aproksimācija:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f_1(x(t), y(t)) + \varepsilon\, f_2(x(t), y(t)) \\ x(t) = x(t-) + \varepsilon\, g_1(x(t-), y(t-)) + \varepsilon^2\, g_2(x(t-), y(t-)) \end{cases}$$

Metode:

$$[L(h)v](Y,\sigma^2,Z) = \lim_{\Delta\downarrow 0}\left\{ \left. \frac{v(Y(t+\Delta),\sigma^2(t+\Delta),Z(t+\Delta)) - v(Y,\sigma^2,Z)}{\Delta} \right|_{Y(t)=Y,\sigma^2(t)=\sigma^2,Z(t)=Z} \right\}$$

$$v(Y,\sigma^2,Z) = v_0(Y,\sigma^2) + \sqrt{h}\cdot v_1(Y,\sigma^2,Z) + h\cdot v_2(Y,\sigma^2,Z) + o(h)$$

$$L(h)v \xrightarrow{h\to 0} L_0 v_0$$

$$Qu(z) := E\left\{u\left(\rho Z + \sqrt{1-\rho^2}\,\xi\right)\right\} - u(z)$$

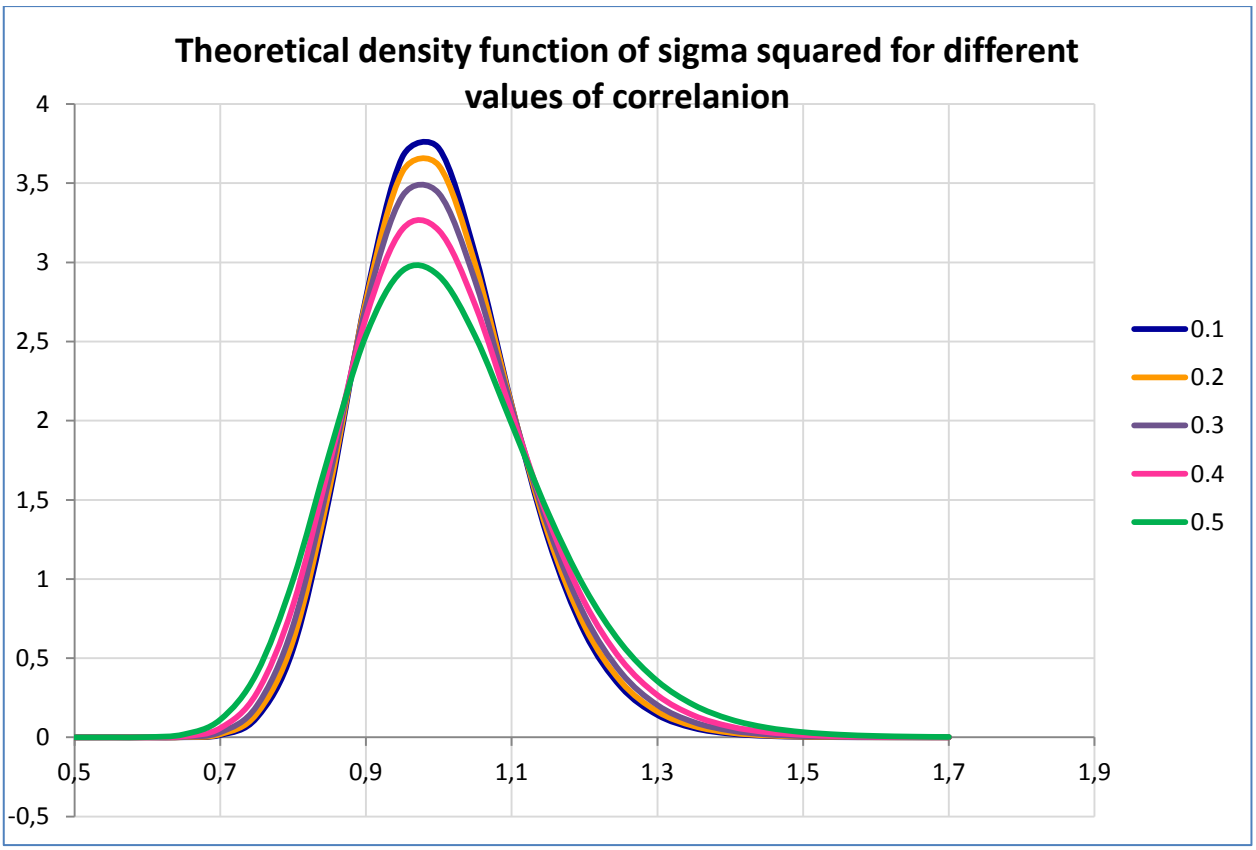
$$L(h)v(Y,\sigma^2) = L_0 v_0(Y,\sigma^2) + O(\sqrt{h})$$

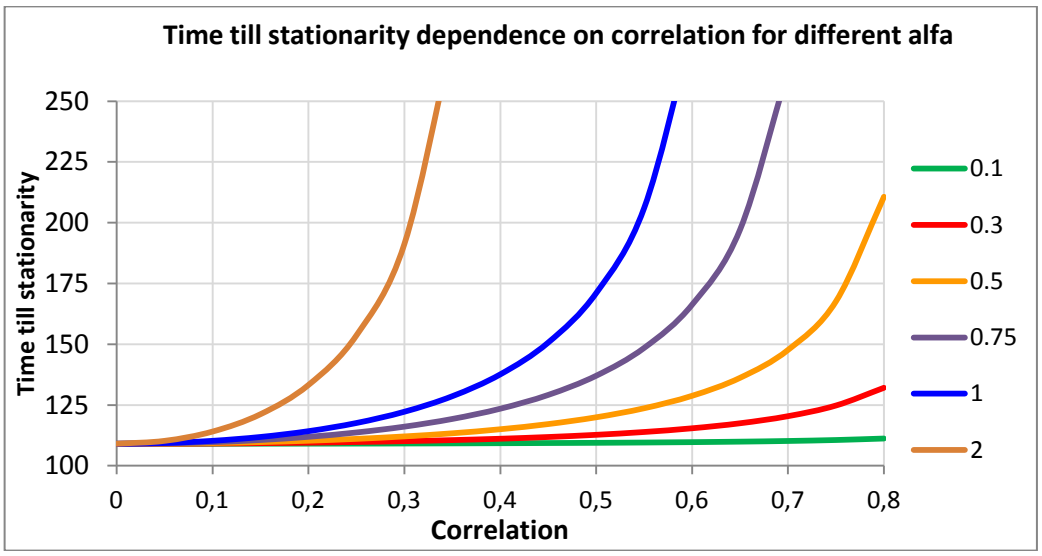
$$v_1(Y,\sigma^2 Z) = \left[\frac{\rho}{1-\rho}\sigma Z\, D'_Y + \sigma^2\alpha\frac{\rho^2(Z^2-1)}{(1-\rho^2)\sqrt{2}} D'_{\sigma^2}\right] v_0(Y,\sigma^2)$$

$$L_0 v_0(Y,\sigma^2) = c\sigma^2 D'_Y v_0(Y,\sigma^2) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{1+\rho}{1-\rho} D''_{YY} v_0(Y,\sigma^2) +$$
$$+\left((\omega-\theta\sigma^2) + \frac{\sigma^2\alpha^2\rho^2}{1-\rho^2}\right) D'_{\sigma^2} v_0(Y,\sigma^2) + \frac{\sigma^4\alpha^2}{2}\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} D''_{\sigma^2\sigma^2} v_0(Y,\sigma^2)$$

$$
\begin{aligned}
L(h)v &= \frac{1}{\sqrt{h}}\underbrace{(\ldots)}_{=0}+ \\
&= c\sigma^2 D'_Y v_0\left(Y,\sigma^2\right)+\left(\omega-\theta\sigma^2\right)D'_{\sigma^2}v_0\left(Y,\sigma^2\right)+ \\
&+\frac{\sigma^2}{2}E\left(\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)^2 D''_{YY}v_0\left(Y,\sigma^2\right)+\frac{\sigma^4\alpha^2}{2}E\frac{\left(\left(\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)^2-1\right)^2}{2}D''_{\sigma^2\sigma^2}v_0\left(Y,\sigma^2\right)+ \\
&+\sigma^3\alpha E\frac{\left(\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)^2-1}{\sqrt{2}}\left(\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)D''_{Y\sigma^2}v_0\left(Y,\sigma^2\right)+ \\
&+\sigma E\left(\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)D'_Y v_1\left(Y,\sigma^2,\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)+ \\
&+\sigma^2\alpha E\frac{\left(\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)^2-1}{\sqrt{2}}D'_{\sigma^2}v_1\left(Y,\sigma^2,\rho Z+\sqrt{1-\rho^2}\xi\right)+ \\
&\qquad\qquad +Qv_2\left(Y,\sigma^2,Z\right)+O\left(\sqrt{h}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
dy = c\sigma^2 dt+\sigma\sqrt{\dfrac{1+\rho}{1-\rho}}dw_1(t) \\
d\sigma^2 = \left(\omega-\sigma^2\left(\theta-\alpha^2\dfrac{\rho^2}{1-\rho^2}\right)\right)dt+\sigma^2\alpha\sqrt{\dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}}dw_2(t)
\end{cases}
$$

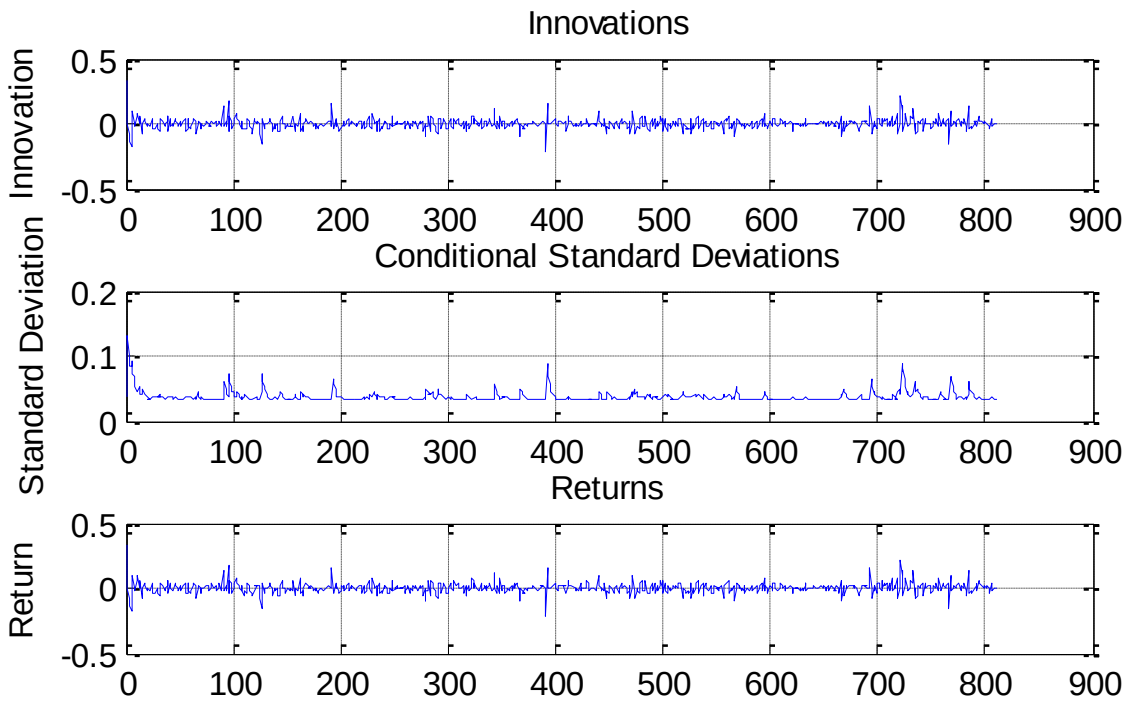


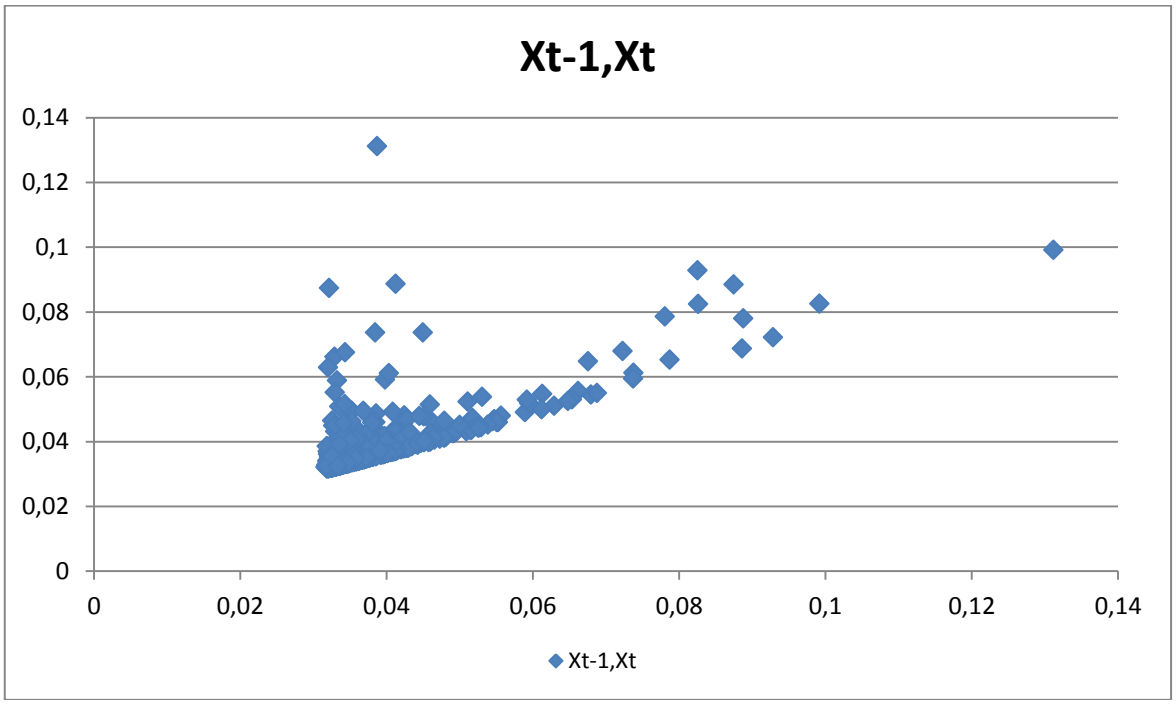

Time till stationarity dependence on correlation for different alfa
Time till stationarity
250
225
200
175
150
125
100
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
Correlation
0.1
0.3
0.5
0.75
1
2

5.Pielikums. *(Apskatītās modelēšanas un prognozēšanas sistēmas apraksts)*

Tesla akcijas aprakstošās statistikas	
Mean	0,00281154
Standard Error	0,00137313
Median	0,00150651
Mode	0
Standard Deviation	0,03910419
Sample Variance	0,00152914
Kurtosis	11,1546148
Skewness	0,90254713
Range	0,55501823
	-
Minimum	0,21477161
Maximum	0,34024662
Sum	2,28015903
Count	811

Gamma(k, tetta)	
tetta	**0,54387912**
k	**0,00516942**




Xt-1,Xt
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0
0,02
0,04
0,06
0,08
0,1
0,12
0,14
Xt-1,Xt

LITERATŪRAS SARAKSTS:

1. Shannon, C.E. (1948), A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal, 27, pp. 379–423 & 623–656.
2. Manyika, James; Chui, Michael; Bughin, Jaques; Brown, Brad; Dobbs, Richard; Roxburgh, Charles; Byers, Angela Hung (May 2011) Big Data: The next frontier for innovation, competition, and productivity.
3. Fuller, W.A. (1976) Introduction to Statistical Time Series. Wiley, New York.
4. Pesaran, M.H. and Potter, S.M. (1997) A floor and ceiling model of US output. Journal of Economic Dynamics and Control 21, 661-695.
5. Robinson, P.M. (1991) Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression. Journal of Econometrics 47, 67-84.
6. Drost, F.C., Klaassen, C.A.J. and Werker, B.J.M. (1997) Adaptive estimation in time series models. Annals of Statistics 25, 786-817.
7. Seo, B. (1999) Distribution theory for unit root tests with conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics 91, 113-144.
8. Engle, R.F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. Econometrica 50, 987-1008.
9. Auestad, B. and Tjøstheim, D. (1990) Identification of nonlinear time series: First order characterization and order estimation, Biometrika 77: 669-687.
10. Bierens, H. J. (1987) Kernel estimators of regression functions, Advances in Econometrics, Cambridge University Press.
11. Granger, C. and Teroasvirta, T. (1992) Modeling Nonlinear Dynamic Relationships, Oxford University Press, Oxford.
12. Priestley, M. B. (1988) Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis, Academic Press, NY.
13. Tjøstheim, D. (1990) Nonlinear time series and markov chains, Advanced Applied Probability 22: 587-611.
14. Benedetti, J. K. (1977) On the nonparametric estimation of regression functions, Journal of the Royal Statistical Society, Series B 39: 248-253.
15. Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, Journal of Econometrics 31: 307-327.
16. Andreson, T., Goodman, L. (1967) Statistical Inference About Markov Chain. The Annals of Mathematical Statistics 38: 89-110.
17. Carkova, V., Swerdan, M. On mean square stability of linear stochastic difference equations.Theory of Stochastic Processes, 11(27), 2005,6 – 11.
18. Лумельский, Я.П., Чичагов В.В. (1986) Статистическое оценивание в схеме марковских случайных блужданий, Статистические методы, Перм. Ун-т. Пермь, 36 – 45.
19. Tsay, R.S. (1987) Conditional heteroscedastic time series models. Journal of the American Statistical Association 82, 590-604.
20. Karanasos, M. (1999) The second moment and the autocovariance function of the squared errors of the GARCH model. Journal of Econometrics 90, 63-76.
21. Lamoureux G.G., Lastrapes W.D. (1993) Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities, Review of Financial Studies, Vol6, N 2.
22. Kreiss, J.-P. (1987) On adaptive estimation in stationary ARMA processes. *Annals of Statistics* 15, 112-133.
23. Ling, S. (1999) On the probabilistic properties of a double threshold ARMA conditional heteroskedasticity model. Journal of Applied Probability 36, 1-18.

24. Resnick, S.I. (1997) Heavy tail modeling and teletrafic data. Annals of Statistics 25, 1805-1869.
25. Hannan, E.J. (1980) The estimation of the order of an ARMA model, Annals of Statistics 8, 1071-1081
26. Fornari, F. and Mele, A. (1997) Sign-and volatility-switching ARCH models: Theory and applications to international stock markets. Journal of Applied Econometrics 12, 49-65.
27. Albert T. Bharucha-Reid. (1997) Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, Courier Dover Publications.
28. John C. Cox; Johathan E.Ingersoll, Jr,; Stephen A.Ross (1987) A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica, Vol. 53, No 2.
29. Bolder, D.J.(2001) Affine Term-Structure Models: Theory and implementations, Bank of Canada Working Paper.
30. Feller, W. (1951) Two Singular Diffusion Problems, Annals of Mathematics, p. 173 – 182.
31. Cont,R.(2001) Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, Quantative Finance.
32. Bouye,E., Salmon, M. (2002) Dynamic Copula Quantile Regressions and Tail Area Dynamic Dependence in Forex Markets, London.
33. Chen,X., Fan,Y.(2006) Estimation of copula-based semiparametric time series models. Journal of Econometrics.
34. Nelson, D.B. (1990) ARCH models as difusion approximations. Journal of Econometrics, 441 1-2: 7|38.
35. Ait-Sahalia,Y., Kimmel, R. (2007) Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. Journal of Financial Economics.
36. Darsow, W., Nguyen, B., Olsen, E. (1992) Copulas and Markov processes. Illinois Journal of Mathematics 36, 600–642.
37. Joe, H., (1997) Multivariate Models and Dependence Concepts, Chapman & Hall/CRC.
38. Frees, E.W., Valdez, E.A. (1998) Understanding relationships using copulas. North American Actuarial Journal 2, 1–25.
39. Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (2002) Correlation and dependence properties in risk management: properties and pitfalls. In: Dempster, M. (Ed.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 176–223.
40. Sklar, A. (1959) Fonctions de r'epartition 'a n dimensionset leurs marges. Publ. Inst. Statis. Univ. Paris 8,229–231.
41. Chen, X., Hansen, L.P., Carrasco, M. (1998) Nonlinearity and temporal dependence. Working Paper,University of Chicago.
42. Chen, X., Fan, Y. (2004) Pseudo-likelihood ratio tests for model selection in semiparametric multivariate copula models, Canadian Journal of Statistics.
43. Ajevskis V., Gūtmanis N. (2002) Modeling of the Latvian Term Structure of Interest Rate, 1st International Conference APLIMAT, p.p.47-52
44. Lee, S.-W. and Hansen, B.E. (1994) Asymptotic theory for the GARCH (1,1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory* 10, 29-52.
45. Chen,X., Fan,Y. (2006) Estimation of copula-based semiparametric time series models. Journal of Econometrics.
46. Ilmanen, Antti, (2012) Do Financial Markets Reward Buying or Selling Insurance and Lottery Tickets? Financial Analysts Journal, September/October, Vol. 68, No. 5 : 26 – 36
47. Taleb, N.N. (2013) No, Small Probabilities Are Not "Attractive to Sell": A Comment. Financial Analysts Journal, January/February, Vol. 70

48. Fjodorovs, J. (2014) Simulation of Option Prices Using GARCH Processes for Autocorrelated Stock Returns. Proceedings of Journal of Applied Mathematics, p. 151 – 158.
49. Egle, A., Matvejevs, An., Fjodorvs, J. (2012) Pricing of Financial Actives with Serial Correlation in Returns. Scientific Journal of Riga Technical University.
50. Matvejevs,An., Fjodorvs,J. (2013) Revaluation of Estimated Option Prices Using GARCH Processes with Most Preferable Properties. Scientific Journal of Riga Technical University.
51. Egle,A.,Carkovs, J. (2009) On Continous Stochastic Modeling Of Heteroskedastic Conditional Variance, Proceedings of Aplimat.
52. Carkovs, J. (2008) On Diffusion Approximation of Discrete Markov Dynamical Systems. In Computational Geometry, Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol/ 30 pp.1-6.
53. Frees, E.W., Valdez, E.A. (1998) Understanding relationships using copulas. North American Actuarial Journal 2, 1–25.
54. Chen, X., Hansen, L.P., Carrasco, M. (1998) Nonlinearity and temporal dependence. Working Paper,University of Chicago.
55. Fjodorovs,J. (2012) Copula Based Semiparametric Regressive Models. Journal of Applied Mathematics, Volume V, p. 241 – 248, ISIN: 1337-6365.
56. Wong,E. (1964) The Construction of a Class of Stationary Markov Processes. Sixteenth Symposia in Applied Mathematics: Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, Providence, RI, 264-76.
57. Lo, A., MacKinley, A. C. (1990) An Econometric Analysis of Non-Synchronous Trading. Journal of Econometrics, No. 45, pp. 181-211.
58. Jokivuolle, E. (1995) Measuring True Stock Index Value in the Presence of Infrequent Trading. Journal of Financial and Quantitative Analysis.
59. Stoll, H. R., Whaley, R. E. (1990) The Dynamics of Stock Index and Stock Index Futures Returns.Journal of Financial and Quantitative Analysis, No. 25, pp. 441-68.
60. Mezin, V. Option Pricing Model for Autocorrelated Stock Returns. Working paper, Rutgers University.
61. Tsarkov, Ye. (J.Carkovs) (2002) Asymptotic methods for stability analysis of Markov impulse dynamical systems, Nonlinear dynamics and system theory, 1, No. 2.
62. Skorohod, A.V. (1965) Studies in the theory of random processes, AMS, USA: Addison-Wesley publishing.
63. Skorohod, A.V.(1994) Asymptotic Methods of Theory of Stochastic Differential Equations,3rd ed. AMS, USA: Providance.
64. Dimentberg, M. (1988) Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems. NY,USA: Willey.
65. Ball, C.A. and Roma, A.C. (1988) A jump diffusion model for the European Monetary System. In J. of International Money and Finance, pp. 475-492.
66. Ann,C.M. and Thompson, H. (1988) Jump-diffusion process and term structure of interest rates.In J. of Finance, 43, No. 3, pp. 155-174.
67. Arnold, Papanicolaou, L. G., and Wihstutz, V. (1986) Asymptotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscillator and applications, In SIAM J. Appl. Math., 46, No. 3, pp. 427-450.
68. Fornari, F. and Mele, A. (1997) Sign- and volatility-switching ARCH models theory and applications to international stock markets. In J. of Applied Econometrics, 12, pp. 49-65.
69. Wong, E.(1964) The construction of a class of stationary Markov process In (R.Bellman ed.), Proceedings of the 16th Symposia in Applied Mathematics: Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, Providance, RI,, pp. 264-276.

70. Heston, S.L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options: The Rview of Financial Studies, Volume 6, Issue 2, pp. 327-343.
71. Buss, G. (2013) Robust time series forecasting methods.Thesis. Riga Technical university.
72. Clive, W. J. Granger (2003) Time Series Concepts for Conditional Distributions. Oxford Bulleten of Economics and Statistics, Volume65, Issues1, Pages 689-701.
73. Ane, Th., Kharoubi C. (2003) Dependence Structure and Risk Measure, Journal of Business, Vol. 76, No. 3, pp. 411 – 438
74. Cech, C. (2006) Copula-Based Top-Down Approaches in Financial Risk Aggregation.
75. Junker, M., Szimayer A., Wagner N. (2003) Nonlinear Term Structure Dependence: Copula Functions, Empirics, and Risk Implications..
76. Savu C., Trede M. (2006) Hierarchical Archimedean Copulas. Munster.
77. Morone, M., Cornaglia A., Mignola G. (2007) Economic Capital Assessment via Copulas: Aggregation and Allocation of Different Risk Types.
78. Natale, F., P. (2006) Optimization With Tail-Dependence and Tail Risk: A Copula Based Approach For Strategic Asset Allocation.
79. Rosenberg, J., Schuermann, T. (2006) A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks, Journal of Financial Economics. Vol. 79, pp. 569 – 614.
80. Tang, A., Valdez, E. (2006) Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas. Sydney.
81. Kole, E., Koedijk, K., Verbeek M. (2006) Selecting Copulas for Risk Management.
82. Patton, A. (2006) Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. International Economic Review. Vol. 47, No. 2, pp. 527 – 556.
83. Hsu, Ch.-Ch., Tseng Ch.-P., Wang Y.-H. (2007) Dynamic Hedging with Futures: A Copula-based GARCH Model.
84. Nelsen, R. (2006) An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer. New York.
85. Фантаццини, Д. (2008) Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском, Прикладная эконометрика. № 2 (10), С. 91 – 13.
86. Mai,J., M. Scherer (2012) Financial Engineering with Copulas Explained. Palgrave Macmillan UK.
87. Пеникас, Г.И., Симакова, В.Б. (2009) Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей, Прикладная эконометрика, № 1 (13), стр. 3 – 36.
88. Ханк, Д. Э., Уичери, Д. У., Райте, А. Дж. (2003) Бизнес-прогнозирование: пер. с англ. 7-е изд. М.: Вильямс, С. 506.
89. Makridakis, B., Andersen, A., Carbone, R., Fildes, R., Hibon, M., Lewandowski, R., Newton, J., Parzen, E., Winkler, R. (1982) The accuracy of extrapolation (time series) methods: Results of a forecasting competition, Journal of Forecasting, Vol. 1. Issue 2. P. 111-153.
90. Makridakis, S., Hibon, M. (1997) ARMA models and the Box-Jenkins Methodology, Journal of Forecasting, Vol. 16. P. 147–163.
91. Yule, C. Udny. (1927) On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Vol. 226. P. 267–298.
92. Тихонов, Э.,И. (2006) Методы прогнозирования в условиях рынка. Учебное пособие, Невинномысск, 221 с.

93. Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis: Forecasting and Control, San Francisco: Holden-Day.
94. Fisher, N. I. (1997). Copulas. In: Encyclopedia of Statistical Sciences, Update Vol. 1, 159-163. John Wiley Sons, New York.